

ПОСТРОЕНИЕ СТЕРЖНЕВОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ЛОПАТКИ КАК КОМПОНЕНТА ПОВОРОТНО-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ РАБОЧЕГО КОЛЕСА

© 2011 Д. П. Давыдов

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Разработан лопаточный конечный элемент для исследования динамических характеристик лопаток турбомшины. Элемент реализован в виде программы на языке Фортран. Проведены расчётные и экспериментальные исследования собственных частот колебаний компрессорных лопаток.

Динамические характеристики, газотурбинный двигатель, лопатка, рабочее колесо, конечный элемент, модальный анализ, собственные формы колебаний.

Время и средства, затрачиваемые на обеспечение надёжности рабочих колёс вновь создаваемых компрессоров и турбин, занимают значительное место в общем балансе времени и средств, идущих на их доводку и внедрение в эксплуатацию. Это вызвано быстрым темпом развития конструкций, который сопровождается постоянным ростом интенсивности процессов, происходящих в них, при общем повышении требований к надёжности. Использование специализированных программных комплексов позволяет существенно сократить трудозатраты за счёт применения простых расчётных моделей, математический аппарат которых базируется на углублённых теоретических представлениях о динамических явлениях, сопутствующих работе турбомашин.

В подавляющем большинстве практически важных случаев рабочие колёса необходимо рассматривать как единые упругие системы. Это обусловлено широким использованием в конкретных конструкциях кольцевых связей между лопатками и применением рабочих колёс, включая несущие диски ажурных конструктивных форм.

Для специализированного комплекса программ, позволяющих исследовать колебательные процессы рабочих колёс тур-

бомашин, был разработан лопаточный волновой конечный элемент.

Лопаточный элемент рассматривается как кольцевой дискретный поворотно-симметричный набор изолированных друг от друга однотипных участков лопаток. Лопатки моделируются закрученными стержнями переменного поперечного сечения, обладающими изгибно-крутильной связанностью деформаций в соответствии с моделью, предложенной Б.Ф. Шорром [1].

В системе координат $oxyz$ (рис. 1)

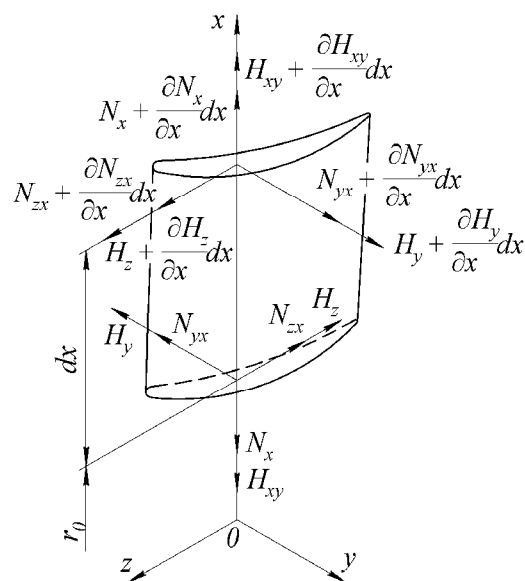


Рис. 1. Усилия в элементе лопатки

уравнения равновесия элемента k -й лопатки имеют вид:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - r_l F_l \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + r_l F_l w^2 (W + r_0) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_{zx}}{\partial x} - r_l F_l \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_{yx}}{\partial x} - r_l F_l \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + r_l F_l w^2 V = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} + N_{zx} - N_x a_y - r_l \left(J_y \frac{\partial^2 a_y}{\partial t^2} + J_{zy} \frac{\partial^2 a_z}{\partial t^2} \right) - r_l w^2 C a_y - r_l J_y \frac{\partial^2 a_y}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} - N_{yx} - N_x a_z - r_l \left(J_z \frac{\partial^2 a_z}{\partial t^2} + J_{zy} \frac{\partial^2 a_y}{\partial t^2} \right) - r_l w^2 C a_z - r_l J_z \frac{\partial^2 a_z}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_{xy}}{\partial x} + N_{yx} a_y - N_{zx} a_z - r_l J_p \frac{\partial^2 a_x}{\partial t^2} + r_l w^2 (J_y - J_z) a_x = 0. \quad (6)$$

Здесь

$N_x, N_{yx}, N_{zx}, H_y, H_z, H_{xy}$ – внутренние силы и моменты;

U, V, W, a_x, a_y, a_z – компоненты угловых и линейных смещений;

r_l – плотность материала;

F_l – площадь поперечного сечения;

J_y, J_z, J_{zy}, J_p – моменты инерции поперечного сечения;

$$C = \int_x^{x_0} F_l x dx, \quad x_l - \text{координата центра}$$

тяжести периферийного сечения;

w – угловая скорость вращения рабочего колеса.

Согласно модели Шорра внутренние силы и моменты в лопатке связаны с деформациями следующими соотношениями:

$$N_{yx} = \frac{k^2 E F_l}{2(1+m)} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + a_z \right), \quad (7)$$

$$N_{zx} = \frac{k^2 E F_l}{2(1+m)} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - a_y \right), \quad (8)$$

$$H_y = E J_y \frac{\partial a_y}{\partial x} - E J_{yz} \frac{\partial a_z}{\partial x} - E \mathfrak{J}_{yr} \frac{\partial a_x}{\partial x}, \quad (9)$$

$$H_z = -E J_{yz} \frac{\partial a_y}{\partial x} + E J_z \frac{\partial a_z}{\partial x} + E \mathfrak{J}_{zr} \frac{\partial a_x}{\partial x}, \quad (10)$$

$$H_{xy} = -E \mathfrak{J}_{yr} \frac{\partial a_y}{\partial x} + E \mathfrak{J}_{zr} \frac{\partial a_z}{\partial x} + (G J_k + E \mathfrak{J}^2 J_{4r}) \frac{\partial a_x}{\partial x}. \quad (11)$$

Здесь

E – модуль упругости материала лопатки;

G – модуль сдвига;

m – коэффициент Пуассона;

k – коэффициент, учитывающий закон распределения касательных напряжений;

\mathfrak{J} – закрутка лопатки;

$J_{yr}, J_{zr}, J_k, J_{4r}$ – жёсткостные характеристики поперечного сечения.

При рассмотрении лопатки как компонента поворотно-симметричной системы рабочего колеса [2] принимается равномерно-дискретный гармонический закон окружного распределения амплитуд волн усилий и перемещений, которые могут быть представлены в комплексной форме:

$$\tilde{c} = c e^{i \frac{2p}{S} mk} e^{ipt}, \quad (12)$$

где

c – комплексная амплитуда соответствующего компонента;

i – мнимая единица;

S – число лопаток рабочего колеса;

m – число волн деформаций в окружном направлении;

k – порядковый номер лопатки;

p – собственная частота колебаний.

Такая форма записи позволяет учесть окружные сдвиги между волнами компонентов усилий и перемещений.

Рассматривая совместно выражения (1 – 11) и осуществляя переход к амплитудам волн усилий и смещений (12), получаем определяющую систему дифференциальных уравнений, которая описывает динамические свойства элементарного участка лопаточного кольцевого элемента:

$$\begin{Bmatrix} \frac{dQ_z}{dx} \\ \frac{dM_y}{dx} \\ \frac{dQ_y}{dx} \\ \frac{dM_z}{dx} \\ \frac{dM_x}{dx} \\ \frac{dM_x}{dx} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} q_z \\ b_y \\ q_y \\ b_z \\ b_x \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} \frac{dq_z}{dx} \\ \frac{db_y}{dx} \\ \frac{dq_y}{dx} \\ \frac{db_z}{dx} \\ \frac{db_x}{dx} \\ \frac{dx}{dx} \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Для построения конечного элемента использовался метод Галеркина как частная форма метода невязок:

$$\int_x W R dx = 0, \quad p = 1, 2, \mathbf{K}, n, \quad (14)$$

где в общем случае

W – определяемые последовательно интерполянты по области (функции формы);

R – погрешность или невязка;

n – общее число узловых параметров.

Совместное рассмотрение (13) и (14) позволяет записать систему уравнений лопаточного конечного элемента:

$$\int_{x_1}^{x_2} [F] \begin{Bmatrix} \frac{dQ_z}{dx} \\ \frac{dM_y}{dx} \\ \frac{dQ_y}{dx} \\ \frac{dM_z}{dx} \\ \frac{dM_x}{dx} \\ \frac{dM_x}{dx} \end{Bmatrix} dx = \int_{x_1}^{x_2} [F] \left([A] \begin{Bmatrix} q_z \\ b_y \\ q_y \\ b_z \\ b_x \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} \frac{dq_z}{dx} \\ \frac{db_y}{dx} \\ \frac{dq_y}{dx} \\ \frac{db_z}{dx} \\ \frac{db_x}{dx} \\ \frac{dx}{dx} \end{Bmatrix} \right) dx, \quad (15)$$

где x_1, x_2 – границы конечного элемента.

Построение матрицы формы $[F]$ основано на допущении о линейном изменении амплитуд волн упругих смещений по длине элемента.

Интегрирование системы (15) для внутренней и внешней границ даёт матричное уравнение волновых динамических жёсткостей лопаточного конечного элемента, которое в общем случае имеет вид

$$\{N\} = [H_{10 \times 10}] \{q\}.$$

Здесь

$[H] = [D] - p^2 [M]$ – симметричная матрица волновых динамических жёсткостей

элемента, устанавливающая связь между вектором амплитуд волн узловых реакций $\{N\}$, возникающих на границах элемента, и вектором амплитуд волн перемещений $\{q\}$ этих границ;

$[D] = [K] + w^2 [C]$ – матрица статических жёсткостей элемента;

$[K]$ – матрица статических жёсткостей;

$[C]$ – матрица влияния вращения рабочего колеса на жёсткость лопаточного элемента;

$[M]$ – ленточная матрица масс.

Учитывая на границах взаимодействия лопаточных элементов условия равновесия и совместности деформаций и тем самым выполняя объединение всех элементов, определяем упругоинерционные свойства лопатки в целом:

$$[H_n] \{q_n\} = \{Q_n\},$$

где

$[H_n]$ – глобальная матрица волновых динамических жёсткостей лопатки, устанавливающая линейную связь между амплитудами волн внешних усилий, действующих на лопатку, и амплитудами волн перемещений её кольцевых сечений;

$\{q_n\} = \{\{q_1^{(1)}\}, \{q_2^{(1)}\}, \{q_2^{(2)}\}, \mathbf{K}, \{q_2^{(n)}\}\}^T$ – вектор амплитуд узловых смещений лопатки,

$\{Q_n\}$ – вектор амплитуд внешних узловых сил.

Для оценки корректности принятых допущений при выводе уравнений элемента проведены сравнительные расчётные и экспериментальные исследования динамических характеристик двух компрессорных лопаток (рис. 2). Первая была консольно закреплена, вторая имела шарнирное закрепление.



Рис. 2. Исследуемые лопатки

Расчётные исследования проводились с использованием разработанного конечного элемента. На алгоритмическом языке программирования Фортран была создана программа по расчёту собственных частот и форм колебаний вращаю-

щихся неравномерно нагретых лопаток. Для оценки времени вычислений были проведены аналогичные расчёты на трёхмерных моделях с помощью универсального комплекса ANSYS. Экспериментальные значения собственных частот определялись на электродинамическом стенде.

Результаты исследований колебаний лопаток по различным собственным формам представлены в табл. 1, 2, где m и n число пучностей форм колебаний соответственно в продольном и поперечном направлении. Среднее время вычислений собственных значений и векторов представлено в табл. 3.

Таблица 1. Собственные частоты консольной лопатки

Собственная частота, Гц	Форма колебаний $m \times n$								
	1x1	2x1	3x1	4x1	5x1	1x2	2x2	3x2	1x3
Волновой элемент	1007	3382	6095	7454	12622	2653	5458	9528	–
ANSYS	1022	3418	6147	7556	12787	2687	5473	9642	8879
Эксперимент	1028	3423	6127	7529	12705	2680	5465	9565	8922

Таблица 2. Собственные частоты шарнирной лопатки

Собственная частота, Гц	Форма колебаний $m \times n$							
	2x1	3x1	4x1	5x1	1x2	2x2	3x2	1x3
Волновой элемент	325,8	917,3	1758	2913	1076	2250	3412	–
ANSYS	328,2	927	1780	2917	1081	2254	3482	4054
Эксперимент	329	915	1763	2933	1101	2245	3428	4086

Таблица 3. Время вычислений

Время расчета, с	Консольная лопатка	Шарнирная лопатка
Волновой элемент	32	54
ANSYS	864	1578

Анализ результатов исследований показал, что расчётные значения частот колебаний лопаток по собственным формам с использованием разработанного конечного элемента хорошо согласуются с экспериментальными данными и результатами расчётов в программной среде

ANSYS. Расхождение составляет менее 3%. При этом выигрыш во времени вычислений более чем двадцатикратный. Это связано с меньшим числом конечных элементов, необходимых для подробного описания лопатки, и интегрированием только по одной пространственной переменной.

Таким образом, разработанный лопаточный волновой конечный элемент дает значительный прирост скорости вычислений, обеспечивая высокую точность определения динамических характеристик лопаток. Что, в свою очередь, вкупе с дисковым волновым конечным элементом позволяет существенно сократить время и средства, затрачиваемые на обеспечение надёжности рабочих колес компрессоров и турбин на этапах проектирования и доводки. К недостаткам элемента можно отнести возможность расчёта только стержневых форм колебаний лопатки. В более широком диапазоне спектра собственных

форм получение удовлетворительных результатов связано с необходимостью представления пера лопатки в виде оболочки переменной толщины с двоякой кривизной.

Библиографический список

1. Воробьев, Ю. С. Теория закрученных стержней [Текст] / Ю. С. Воробьев, Б. Ф. Шорр. – Киев: Наукова думка, 1983. – 187 с.
2. Иванов, В. П. Колебания рабочих колес турбомашин [Текст] / В. П. Иванов. – М.: Машиностроение, 1983. – 224 с.

CONSTRUCTION OF A BLADE BEAM FINITE ELEMENT AS A COMPONENT OF THE BLADE DISK ROTARY-SYMMETRICAL SYSTEM

© 2011 D. P. Davydov

Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov
(National Research University)

The blade wave finite element has been developed. A FORTRAN code program has been developed for the modal analysis of rotating nonuniform heated blades of gas turbine engines. Natural modes of oscillation of two compressor blades have been analysed.

Dynamic characteristics, gas turbine engine, blade, blade wheel, finite element, modal analysis, natural modes of oscillation.

Информация об авторах

Давыдов Данила Петрович, ассистент кафедры конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов. Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: динамика и прочность. E-mail: davydov-ssau@yandex.ru.

Davydov Danila Petrovitch, assistant of the aerospace engine design department, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), davydov-ssau@yandex.ru. Area of research: dynamics and strength.