

## СОДЕРЖАНИЕ

---

---

### АВИАЦИОННАЯ И РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА

---

- МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАССЫ ТУРБОРЕАКТИВНОГО ДВУХКОНТУРНОГО ДВИГАТЕЛЯ С УЧЁТОМ ВЛИЯНИЯ КОНСТРУКТИВНОЙ СХЕМЫ И РАЗМЕРНОСТИ**  
*С. В. Авдеев* 5
- МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПОДГОТОВКИ ПРОЕКТАНТОВ И ОПЕРАТОРОВ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**  
*О. Е. Лукьянов, Д. В. Золотов* 14
- ВЛИЯНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ОТКЛОНЕНИЙ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОТЕРМИЧЕСКОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ НА ТОЧНОСТЬ МАНЕВРИРОВАНИЯ НАНОСПУТНИКА**  
*Л. И. Синицын, И. В. Белоконов* 29
- АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С УЧЁТОМ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ**  
*А. Ф. Шорилов, А. Ю. Горанов* 46

### МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

---

- ИССЛЕДОВАНИЯ СТЕСНЁННОГО ИЗГИБА КРИВОЛИНЕЙНЫХ БОРТОВ ДЕТАЛЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**  
*Е. Г. Громова, В. К. Моисеев, А. А. Шаров,  
О. В. Ломовской, М. Н. Мантусов, А. Н. Плотников* 65
- ЦИФРОВОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТЕРМОРАЗМЕРОСТАБИЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СЛОИСТОГО УГЛЕПЛАСТИКА**  
*В. А. Комаров, Е. А. Кишов, О. Г. Лайкова, А. А. Павлов* 75
- АНАЛИЗ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛИМЕРНОГО СОТОВОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ С НЕСУЩИМИ СЛОЯМИ В ТРЁХСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ**  
*С. А. Павлова* 87
- ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ УГЛЕВОЛОКНА ПО ТИПУ РАССЛОЕНИЯ**  
*С. А. Чернякин* 97

---

---

**CONTENTS**

---

---

---

**AVIATION AND ROCKET-SPACE ENGINEERING**

---

<b>MATHEMATICAL MODEL OF TURBOFAN ENGINE WEIGHT ESTIMATION TAKING INTO ACCOUNT THE ENGINE CONFIGURATION AND SIZE</b> <i>S. V. Avdeev</i>	5
<b>METHODOLOGICAL SUPPORT FOR THE TRAINING OF UAV DESIGNERS AND OPERATORS</b> <i>O. E. Lukyanov, D. V. Zolotov</i>	14
<b>INFLUENCE OF DEVIATIONS IN MANUFACTURING OF ELECTROTHERMAL PROPULSION SYSTEM ON NANOSATELLITE MANEUVERING ACCURACY</b> <i>L. I. Sinitsin, I. V. Belokonov</i>	29
<b>ALGORITHM FOR SOLVING OPTIMAL OPEN-LOOP TERMINAL CONTROL PROBLEM FOR SPACECRAFT RENDEZVOUS WITH ACCOUNT OF CONSTRAINTS ON THE STATE</b> <i>A. F. Shorikov, A. Yu. Goranov</i>	46
<hr/> <b>MECHANICAL ENGINEERING</b> <hr/>	
<b>RESEARCH OF RESTRAINED BENDING OF AIRCRAFT PARTS WITH CURVED SIDES</b> <i>E. G. Gromova, V. K. Moiseev, A. A. Sharov, O. V. Lomovskoi, M. N. Mantusov, A. N. Plotnikov</i>	65
<b>DIGITAL DESIGN OF HEAT-RESISTANT DIMENSIONALLY STABLE CARBON LAMINATE (CFRP) STRUCTURES</b> <i>V. A. Komarov, E. A. Kishov, O. G. Laikova, A. A. Pavlov</i>	75
<b>ANALYSIS OF CONTACT INTERACTION OF POLYMER HONEYCOMB CORE AND CFRP BASE LAYERS IN SANDWICH-CORE CONSTRUCTIONS</b> <i>S. A. Pavlova</i>	87
<b>EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF CFRP FRACTURE TOUGHNESS BY DELAMINATION TYPE</b> <i>S. A. Chernyakin</i>	97

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАССЫ ТУРБОРЕАКТИВНОГО ДВУХКОНТУРНОГО ДВИГАТЕЛЯ С УЧЁТОМ ВЛИЯНИЯ КОНСТРУКТИВНОЙ СХЕМЫ И РАЗМЕРНОСТИ

© 2021

**С. В. Авдеев** аспирант кафедры теории двигателей летательных аппаратов имени В. П. Лукачёва;  
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва;  
[avdeevsergeyvik@gmail.com](mailto:avdeevsergeyvik@gmail.com)

Разработана усовершенствованная корреляционно-регрессионная модель оценки массы двухконтурного реактивного двигателя, учитывающая влияние его конструктивной схемы и размерности. Цель данного исследования заключалась в повышении достоверности оценки массы двухконтурных реактивных двигателей. Из открытых источников были найдены необходимые статистические данные по 183 турбореактивным двухконтурным двигателям. Статистика включает значения суммарного расхода воздуха через двигатель, полную температуру газа перед турбиной, суммарную степень повышения давления и степень двухконтурности, а также информацию о конструктивной схеме каждого двигателя. Предварительно двигатели и соответствующая им статистическая информация были отсортированы по конструктивной схеме и размерности. Сортировка по размерности выполнялась на основе значения приведённого по параметрам за компрессором расхода воздуха через газогенератор. В зависимости от значения данного критерия двигатели были разбиты на три группы: малоразмерные, среднеразмерные газотурбинные двигатели и газотурбинные двигатели большой размерности. По конструктивной схеме все двигатели были разделены на турбореактивные двухконтурные двигатели без камеры смещения, турбореактивные двухконтурные двигатели с камерой смещения и турбореактивные двухконтурные двигатели с форсажной камерой. Для соответствующих групп двигателей были найдены статистические коэффициенты усовершенствованной модели массы, учитывающие размерность и конструктивную схему двигателя. Коэффициенты определялись путём минимизации среднеквадратичных отклонений. С целью оценки качества разработанной модели был выполнен регрессионный анализ. Относительная средняя ошибка аппроксимации разработанной модели составила 8%, коэффициент корреляции – 0,99, среднеквадратичное отклонение – 10,2%. Модель была признана значимой и надёжной по критерию Фишера. Полученная модель может использоваться для оценки массы двигателя на этапе концептуального проектирования, а также для его оптимизации в составе летательного аппарата.

*Газотурбинный двигатель; математическое моделирование; корреляционно-регрессионная модель; масса, размер*

---

*Цитирование:* Авдеев С.В. Математическая модель массы турбореактивного двухконтурного двигателя с учётом влияния конструктивной схемы и размерности // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 1. С. 5-13. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-5-13

### Введение

Вес двигателя оказывает значительное влияние на характеристики, а также на конструкцию летательного аппарата (ЛА). По этой причине попытки точного предсказания массы авиационных газотурбинных двигателей предпринимались с самого начала эры газотурбинных двигателей (ГТД). Однако из-за сложности и разнообразия конструктивных схем, параметров, влияющих на массу двигателя, а также размерности двигателя это вовсе не тривиальная задача.

С развитием методов математического моделирования особое значение для этапа проектирования ГТД приобрёл концептуальный этап. На данном этапе проектирования

определяются параметры будущего двигателя, его конструктивная схема, а также проводится его оптимизация в составе ЛА. Естественно, что на данном этапе крайне важно иметь точную и адекватную модель оценки массы ГТД, так как от этого зависит непосредственно эффективность и достоверность процесса проектирования.

На протяжении многих лет было разработано большое количество моделей для оценки массы ГТД, использующих различные параметры и характеристики. В целом все разработанные модели можно разделить на две большие группы:

- 1) статистические (корреляционно-регрессионные) [1-9];
- 2) компонентные [10-14].

Первая группа моделей массы использует «прошлый опыт» изготовления газотурбинных двигателей, то есть различного рода статистические данные, на основе которых затем строятся соответствующие корреляционно-регрессионные зависимости массы двигателя от его параметров (основных параметров двигателя). Компонентные модели массы (вторая группа) оценивают значения каждого узла двигателя в отдельности, а затем по этим значениям определяется суммарная масса всего двигателя. Установлено, что корреляционно-регрессионные модели позволяют проводить оценку массы двигателя с точностью  $\pm 10\%$ , а компонентные –  $\pm 5\%$  [14]. Данный факт говорит о том, что статистические модели обладают меньшей точностью по сравнению с компонентными моделями, однако значительным недостатком компонентных моделей является их высокая требовательность к числу входных параметров (в частности, требуется схема поперечного разреза двигателя с его характерными размерами), количество которых жёстко ограничено на ранних этапах проектирования двигателя. Это, в свою очередь, определяет границы практического применения моделей этих двух видов. Также общим недостатком для всех статистических моделей является необходимость их постоянного уточнения по мере появления новых вариантов ГТД.

Помимо такой классификации моделей массы в настоящее время особо актуальна классификация по принадлежности модели массы к двигателям определённой размерности [15]. Ввиду всё более широкого использования малоразмерных газотурбинных двигателей проводятся исследования в направлении учёта погрешности, вносимой размерностью двигателя при создании математических моделей. Этот процесс также коснулся и моделей оценки массы [3].

Среди существующих корреляционно-регрессионных моделей массы, использующих в качестве входных параметров основные термодинамические параметры рабочего процесса двигателя, следует выделить модель массы В. С. Кузьмичёва [1], которая является одной из наиболее совершенных на сегодняшний день. Данная модель учитывает размерность, тип двигателя (разделение на одноконтурные реактивные двигатели и турбореактивные двухконтурные), его конструктивную схему (учитывает наличие камеры смешения, форсажной камеры сгорания, редуктора), а также совершенство двигателя в зависимости от времени начала серийного производства. Однако, несмотря на явно большой потенциал данной корреляционно-регрессионной модели, она не способна реализовать его в полной мере по причине использования большого количества входных параметров, что создаёт трудности в поиске необходимой статистической информации для определения и последующего уточнения её статистических коэффициентов.

В связи с этим рационально использовать в качестве основы для разработки новой модели массы, учитывающей конструктивные особенности двигателя, а также его размерность, менее требовательную модель (по количеству входных параметров) с целью увеличения объёма задействованных статистических данных. Этому в полной мере соответствует модель массы, рассмотренная в работе [3].

Актуальность данной работы состоит в необходимости создания модели массы, учитывающей конструктивные схемы и размерность турбореактивных двухконтурных двигателей (ТРДД), задействующей большой объём статистической информации относительно существующих моделей. Новым в данной работе являются коэффициенты учёта конструктивной схемы и размерности ТРДД для усовершенствованной модели оценки массы.

### Разработка усовершенствованной модели массы

Цель данной работы заключалась в повышении достоверности математической модели оценки массы ГТД. В соответствии с этим была поставлена задача усовершенствования ранее разработанной модели оценки массы [3], а также расширения её границ применимости путём введения учёта размерности и конструктивных схем турбореактивных двухконтурных двигателей.

Для решения задачи усовершенствования модели массы были собраны параметры рабочего процесса 183 турбореактивных двухконтурных двигателей различных конструктивных схем. В статистике задействованы двигатели именно такого типа (ТРДД) по причине их наибольшего распространения. Поиск данной статистической информации осуществлялся с использованием информации с официальных сайтов изготовителей, справочников и интернет-ресурсов [16-22].

Для учёта размерности ГТД в данной работе принята классификация по размерам, а в качестве основной качественной характеристики принят приведённый по параметрам за компрессором расход воздуха через газогенератор:

$$G_{B_{1\text{прк}}} = G_{B_{10}} / \pi_{\kappa\Sigma}^{*5/6}, \quad (1)$$

предложенный ЦИАМ им. П. И. Баранова [15]. Соответственно в данном уравнении  $G_{B_{10}}$  – расход воздуха через внутренний контур двигателя,  $\pi_{\kappa\Sigma}^*$  – суммарная степень повышения давления. В соответствии с данной классификацией ТРДД были разбиты на 3 группы: малоразмерные ГТД ( $G_{B_{1\text{прк}}} < 1,5$  кг/с), среднеразмерные ГТД ( $1,5 < G_{B_{1\text{прк}}} < 5$  кг/с) и ГТД большой размерности ( $G_{B_{1\text{прк}}} > 5$  кг/с).

Далее двигатели были отсортированы по конструктивным схемам, а именно были выделены следующие:

- двухконтурный турбореактивный двигатель без форсажной камеры сгорания и без камеры смешения (ТРДД);
- двухконтурный турбореактивный двигатель с камерой смешения (ТРДДсм);
- двухконтурный турбореактивный двигатель с форсажной камерой сгорания (ТРДДф).

Формула для расчёта массы ТРДД ( $M_{\text{дв}}$ ) по усовершенствованной модели имеет следующий вид:

$$M_{\text{дв}} = a \left( \frac{G_{\text{в}\Sigma\text{вл пр}}}{m+1} \right)^{1,17} \left( \left( \frac{T_r^*}{288} \right)^{0,107} + 4,3 \cdot 10^{-3} \pi_{\kappa\Sigma}^{2,78} \right) + b G_{\text{в}\Sigma\text{вл пр}}^{0,85} m^{0,165}. \quad (2)$$

Здесь  $a$  и  $b$  – статистические коэффициенты, учитывающие размерность двигателя и его конструктивную схему. В качестве входных данных модель использует следующие параметры рабочего процесса ГТД на взлётном режиме:

$G_{\Sigma \text{взл пр}}$  – суммарный расход воздуха через двигатель;

$T_{\Gamma}^*$  – полная температура газов перед турбиной;

$\pi_{\kappa \Sigma}^*$  – суммарная степень повышения давления компрессора;

$m$  – степень двухконтурности.

Для каждой группы двигателей были рассчитаны соответствующие статистические коэффициенты  $a$  и  $b$  (табл. 1). Эти статистические коэффициенты определялись в ходе решения задачи по минимизации среднеквадратичного отклонения для каждой группы двигателей определённой размерности и конструктивной схемы. Таким образом, учёт влияния конструктивной схемы и размерности ГТД в модели массы был достигнут за счёт предварительной сортировки исходных статистических данных, а также за счёт последующей оптимизации статистических коэффициентов. В свою очередь, это позволило повысить точность (достоверность) модели и расширить границы её применимости относительно исходной модели.

Таблица 1. Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  в зависимости от конструктивной схемы и размерности двигателя

Приведённый расход воздуха через внутренний контур двигателя	Значение статистического коэффициента	ТРДД	ТРДДсм	ТРДДф
$G_{\text{втрк}} > 5$ кг/с	$a$	4,49	5,30	7,39
	$b$	7,56	9,84	6,13
$1,5 < G_{\text{втрк}} < 5$ кг/с	$a$	7,41	6,99	4,95
	$b$	5,12	5,98	12
$G_{\text{втрк}} < 1,5$ кг/с	$a$	3,95	5,55	–
	$b$	6,68	6,15	–

Статистические коэффициенты для малоразмерных ТРДДф не были рассчитаны ввиду недостатка необходимой статистической информации.

По результатам определения статистических коэффициентов были построены графики отклонения фактического значения массы от расчётного, а также определены значения среднеквадратичного отклонения (рис. 1 – 3).

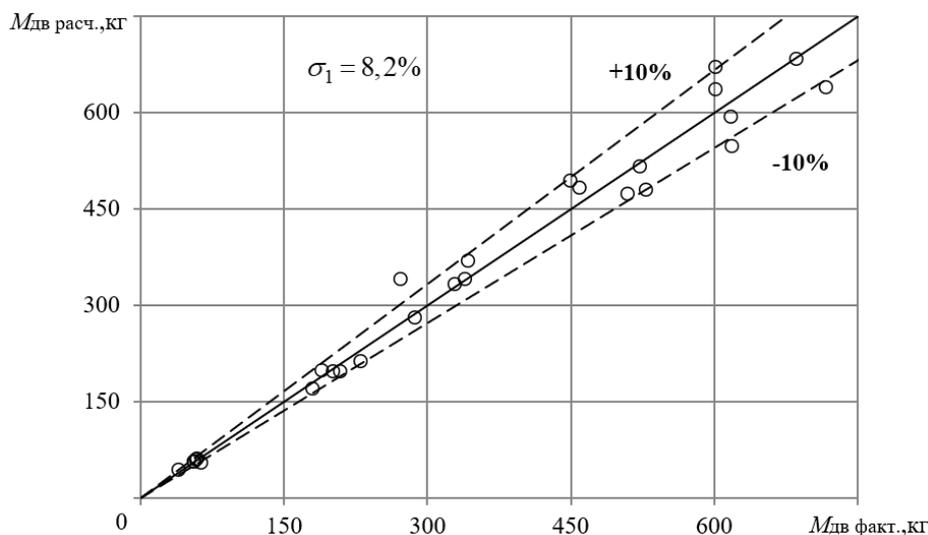


Рис. 1. Отклонения фактического значения массы от расчётного для малоразмерных ТРДД

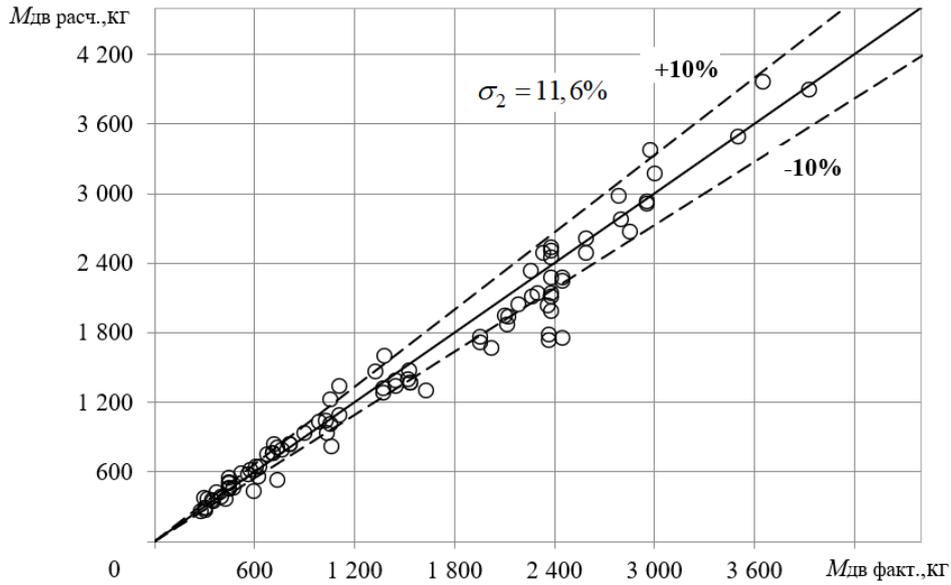


Рис. 2. Отклонения фактического значения массы от расчётного для среднеразмерных ТРДД

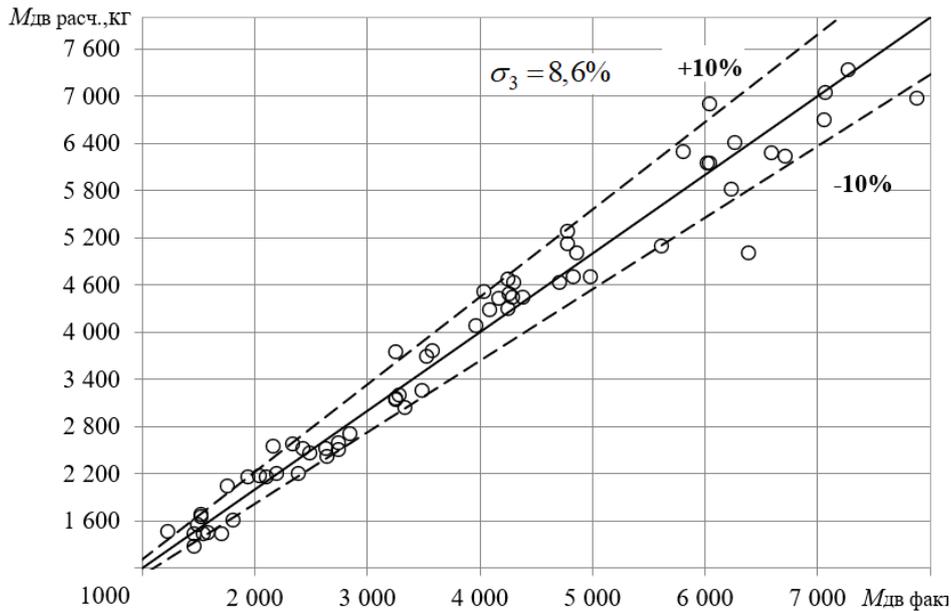


Рис. 3. Отклонения фактического значения массы от расчётного для ТРДД большой размерности

На рис. 1 – 3 видно, что для большинства двигателей погрешность вычисления массы составляет менее 10%.

В ходе регрессионного анализа были вычислены следующие величины, характеризующие точность, адекватность и значимость модели массы: относительная средняя ошибка аппроксимации ( $\bar{A}$ ), стандартное отклонение ( $\sigma$ ), коэффициент корреляции ( $R$ ), расчётное и табличное значения критерия Фишера ( $F_{\text{расч.}}$ ,  $F_{\text{табл.}}$ ). Табличное значение критерия Фишера было определено при уровне значимости  $\alpha=0,05$ . Результаты регрессионного анализа модели массы сведены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты регрессионного анализа модели массы

Показатель	$\bar{A}$ , %	$\sigma$ , %	$R$	$F_{\text{расч.}}$	$F_{\text{табл.}}$
Значение	8	10,2	0,99	1794	2,26

Известно, что средняя ошибка аппроксимации и стандартное отклонение для моделей средней точности составляет 10-15%. Модель массы удовлетворяет этому критерию. Коэффициент корреляции отражает силу и направление связи – близкое к единице и положительное значение говорит о сильной, прямой связи между моделью массы и фактическими значениями массы двигателей. Адекватность полученной модели проверялась с помощью критерия Фишера, так как  $F_{\text{расч.}} > F_{\text{табл.}}$  ( $1794 > 2,26$ ), полученная модель признаётся статистически значимой и надёжной.

### Заключение

В результате проведённого исследования на основе статистических данных 183-х авиационных двухконтурных ГТД была разработана корреляционно-регрессионная модель массы, учитывающая влияние конструктивной схемы и размерности двухконтурного реактивного двигателя. На основе регрессионного анализа было установлено, что полученная модель может использоваться на этапе концептуального проектирования ГТД, а также в различных задачах концептуального проектирования системы ГТД-ЛА.

В дальнейших исследованиях планируется разработать новые корреляционно-регрессионные модели оценки массы узлов двигателя.

### Библиографический список

1. Григорьев В.А., Ждановский А.В., Кузьмичев В.С., Осипов И.В., Пономарёв Б.А. Выбор параметров и термогазодинамические расчёты авиационных газотурбинных двигателей. Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2009. 202 с.
2. Григорьев В.А., Загребельный А.О., Калабухов Д.С. Совершенствование параметрической модели массы газотурбинного двигателя со свободной турбиной для вертолётов // Вестник Московского авиационного института. 2019. Т. 26, № 3. С. 137-143.
3. Филинов Е.П., Авдеев С.В., Красильников С.А. Корреляционно-регрессионные модели расчёта массы малоразмерных авиационных газотурбинных двигателей // Вестник Московского авиационного института. 2018. Т. 25, № 3. С. 73-81.
4. Torenbeek E. Synthesis of subsonic airplane design. Delft University Press, 1976. 598 p.
5. Raymer D.P. Aircraft design: a conceptual approach. Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992. 745 p.
6. Jenkinson L.R., Simpkin P., Rhodes D. Civil jet aircraft design. London: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999. 429 p.
7. Svoboda C. Turbofan engine database as a preliminary design tool // Aircraft Design. 2000. V. 3, Iss. 1. P. 17-31. DOI: 10.1016/s1369-8869(99)00021-x
8. Guha A., Boylan D., Gallagher P. Determination of optimum specific thrust for civil aero gas turbine engines: a multidisciplinary design synthesis and optimization // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. 2012. V. 227, Iss. 3. P. 502-527. DOI: 10.1177/0954410011435623

9. Byerley A.R., Rolling A.J., Van Treuren K.W. Estimating gas turbine engine weight, costs, and development time during the preliminary aircraft engine design process // Proceedings of ASME Turbo Expo. 2013. V. 4. DOI: 10.1115/GT2013-95778
10. Lolis P., Giannakakis P., Sethi V., Jackson A.J.B., Pilidis P. Evaluation of aero gas turbine preliminary weight estimation methods // The Aeronautical Journal. 2014. V. 118, Iss. 1204. P. 625-641. DOI: 10.1017/S0001924000009404
11. Lolis P. Development of a preliminary weight estimation method for advanced turbofan engines. Ph.D. Thesis. Cranfield University, 2014. 189 p.
12. Onat E., Klees G.W. A method to estimate weight and dimensions of large and small gas turbine engines. Final Report. National Aeronautics and Space Administration (NASA) Lewis Research Center, 1979. 132 p.
13. Pera R.J., Onat E., Klees G.W., Tjonneland E. A method to estimate weight and dimensions of aircraft gas turbine engines. Final Report. National Aeronautics and Space Administration (NASA) Lewis Research Center, 1977. 47 p.
14. Михайлова А.Б., Михайлов А.Е., Ахмедзянов Д.А. Разработка и реализация в СИМ COMPRESSOR поэлементной математической модели для оценки массы компрессора // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2014. Т. 18, № 1 (62). С. 180-185.
15. Кузьмичев В.С., Ткаченко А.Ю., Остапюк Я.А. Особенности компьютерного моделирования рабочего процесса малоразмерных газотурбинных двигателей // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2016. Т. 15, № 4. С. 91-101. DOI: 10.18287/2541-7533-2016-15-4-91-101
16. Иностранные авиационные двигатели и газотурбинные установки: (по материалам зарубежных публикаций): справочник / под ред. Л.И. Соркина, Г.К. Ведешкина, А.Н. Князева. Вып. 15. М.: ЦИАМ, 2010. 415 с.
17. Скибин В.А., Солонин В.И., Палкин В.А. Работы ведущих авиадвигателестроительных компаний в обеспечение создания перспективных авиационных двигателей: аналитический обзор. М.: ЦИАМ, 2010. 673 с.
18. Нерубасский В.В. Турбореактивные двухконтурные двигатели для региональных пассажирских, административных и учебно-тренировочных самолётов. Справочное пособие в 4 ч. Ч. 3. Двигатели малой тяги. Харьков: Харьковский авиационный институт, 2008. 2017 с.
19. Roux E. Turbofan and turbojet engines: database handbook. Blagnac: Elodie Roux, 2007. 595 p.
20. Иностранные авиационные двигатели: справочник. 11-е издание / под ред. Л.И. Соркина. М.: ЦИАМ, 1987. 319 с.
21. Иностранные авиационные двигатели: справочник / под ред. Л.И. Соркина. М.: ЦИАМ, 1992. 286 с.
22. Иностранные авиационные двигатели: справочник. 13-е издание / под ред. Л.И. Соркина. М.: Авиамир, 2000. 534 с.

## MATHEMATICAL MODEL OF TURBOFAN ENGINE WEIGHT ESTIMATION TAKING INTO ACCOUNT THE ENGINE CONFIGURATION AND SIZE

© 2021

**S. V. Avdeev** Postgraduate Student of the Department of Aircraft Engine Theory;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[avdeevsergeyvik@gmail.com](mailto:avdeevsergeyvik@gmail.com)

The paper presents a new correlation-regression model of estimating the turbofan engine weight considering the effect of the engine's design schemes and dimensions. The purpose of this study was to improve the efficiency of the conceptual design process for aircraft gas turbine engines. Information on 183 modern turbofan engines was gathered using the available sources: publications, official websites, reference books etc. The statistic information included the values of the total engine air flow, the total turbine inlet gas temperature, the overall pressure ratio and the bypass ratio, as well as information on the structural layout of each engine. The engines and the related statistics were classified according to their structural layout and size. Size classification was based on the value of the compressor outlet air flow through the gas generator given by the parameters behind the compressor. Depending on the value of this criterion, the engines were divided into three groups: small-sized, medium-sized gas turbine engines, and large gas turbine engines. In terms of the structural layout, all engines were divided into three groups: turbofan engines without a mixing chamber, engines with a mixing chamber and afterburning turbofan engines. Statistical factors of the improved weight model were found for the respective groups of engines, considering their design and size. The coefficients of the developed model were determined by minimizing the standard deviations. Regression analysis was carried out to assess the quality of the developed model. The relative average error of approximation of the developed model was 8%, the correlation coefficient was 0,99, and the standard deviation was 10,2%. The model was found to be relevant and reliable according to Fisher's test. The obtained model can be used to assess the engine weight at the stage of conceptual design and for its optimization as part of an aircraft.

*Gas turbine engine; mathematical modeling; correlation-regression model; weight; size*

---

*Citation:* Avdeev S.V. Mathematical model of turbofan engine weight estimation taking into account the engine configuration and size. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2021. V. 20, no. 1. P. 5-13.  
DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-5-13

### References

1. Grigor'ev V.A., Zhdanovskiy A.V., Kuz'michev V.S., Osipov I.V., Ponomarev B.A. *Vybor parametrov i termogazodinamicheskie raschety aviatsionnykh gazoturbinnnykh dvigateley* [Parameter selection and thermogasdynamic calculations of aircraft gas turbine engines]. Samara: Samara State Aerospace University Publ., 2009. 202 p.
2. Grigor'ev V.A., Zagrebel'nyi A.O., Kalabukhov D.S. Updating parametric gas turbine engine model with free turbine for helicopters. *Aerospace MAI Journal*. 2019. V. 26, no. 3. P. 137-143. (In Russ.)
3. Filinov E.P., Avdeev S.V., Krasilnikov S.A. Correlation-regressive model for small-sized aircraft gas turbine engines mass computation. *Aerospace MAI Journal*. 2018. V. 25, no. 3. P. 73-81. (In Russ.)
4. Torenbeek E. *Synthesis of subsonic airplane design*. Delft University Press, 1976. 598 p.
5. Raymer D.P. *Aircraft design: a conceptual approach*. Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992. 745 p.
6. Jenkinson L.R., Simpkin P., Rhodes D. *Civil jet aircraft design*. London: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999. 429 p.
7. Svoboda C. Turbofan engine database as a preliminary design tool. *Aircraft Design*. 2000. V. 3, Iss. 1. P. 17-31. DOI: 10.1016/s1369-8869(99)00021-x

8. Guha A., Boylan D., Gallagher P. Determination of optimum specific thrust for civil aero gas turbine engines: a multidisciplinary design synthesis and optimization. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2012. V. 227, Iss. 3. P. 502-527. DOI: 10.1177/0954410011435623
9. Byerley A.R., Rolling A.J., Van Treuren K.W. Estimating gas turbine engine weight, costs, and development time during the preliminary aircraft engine design process. *Proceedings of ASME Turbo Expo*. 2013. V. 4. DOI: 10.1115/GT2013-95778
10. Lolis P., Giannakakis P., Sethi V., Jackson A.J.B., Pilidis P. Evaluation of aero gas turbine preliminary weight estimation methods. *The Aeronautical Journal*. 2014. V. 118, Iss. 1204. P. 625-641. DOI: 10.1017/S0001924000009404
11. Lolis P. Development of a preliminary weight estimation method for advanced turbofan engines. Ph.D. Thesis. Cranfield University, 2014. 189 p.
12. Onat E., Klees G.W. A method to estimate weight and dimensions of large and small gas turbine engines. Final Report. National Aeronautics and Space Administration (NASA) Lewis Research Center, 1979. 132 p.
13. Pera R.J., Onat E., Klees G.W., Tjonneland E. A method to estimate weight and dimensions of aircraft gas turbine engines. Final Report. National Aeronautics and Space Administration (NASA) Lewis Research Center, 1977. 47 p.
14. Mikhailova A.B., Mikhailov A.E., Akhmedzyanov D.A. Compressor weight estimation model development and implementation in compressor simulation system. *Vestnik UGATU*. 2014. V. 18, no. 1 (62). P. 180-185. (In Russ.)
15. Kuz'michev V.S., Tkachenko A.Yu., Ostapyuk Ya.A. Peculiarities of computer modeling of the working process in small gas turbine engines. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2016. V. 15, no. 4. P. 91-101. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2016-15-4-91-101
16. *Inostrannyye aviatsionnyye dvigateli i gazoturbinnyye ustanovki: (po materialam zarubezhnykh publikatsiy): spravochnik* [Foreign manufactured aircraft engines and gas turbines: Reference book (based on materials from foreign publications) / ed. by Sorkin, G.K. Vedeshkin, A.N. Knyazev]. Vyp. 15. Moscow: TsIAM Publ., 2010. 415 p.
17. Skibin V.A., Solonin V.I., Palkin V.A. *Raboty vedushchikh aviadvigatelsestroitel'nykh kompaniy v obespechenie sozdaniya perspektivnykh aviatsionnykh dvigateley: analiticheskiy obzor* [The work of leading aircraft engine companies to ensure the creation of advanced aircraft engines: Analytical review]. Moscow: TsIAM Publ., 2010. 673 p.
18. Nerubasskiy V.V. *Turboreaktivnyye dvukhkонтурные двигатели для regional'nykh passazhirskikh, administrativnykh i uchebno-trenirovochnykh samoletov. Spravochnoe posobie v 4 ch. Ch. 3. Dvigateli maloy tyagi* [Turbojet bypass engines for regional passenger, administrative and training aircraft: Reference book: In 4 parts]. Kharkov: Kharkov Aviation Institute Publ., 2008. 2017 p.
19. Roux E. Turbofan and turbojet engines: database handbook. Blagnac: Elodie Roux, 2007. 595 p.
20. *Inostrannyye aviacionnyye dvigateli: spravochnik. 11-e izdanie* [Foreign manufactured aircraft engines: Reference book / ed. by Sorkin L.I.]. Moscow: TsIAM Publ., 1987. 319 p.
21. *Inostrannyye aviacionnyye dvigateli: spravochnik* [Foreign manufactured aircraft engines: Reference book / ed. by Sorkin L.I.]. Moscow: TsIAM Publ., 1992. 286 p.
22. *Inostrannyye aviatsionnyye dvigateli: spravochnik. 13-e izdanie* [Foreign manufactured aircraft engines: Reference book / ed. by L.I. Sorkin]. Moscow: Aviamir Publ., 2000. 534 p.

## МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПОДГОТОВКИ ПРОЕКТАНТОВ И ОПЕРАТОРОВ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

©2021

**О. Е. Лукьянов** кандидат технических наук, доцент кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов;  
Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королёва;  
[lukyanovoe@mail.ru](mailto:lukyanovoe@mail.ru)

**Д. В. Золотов** магистрант института авиационной техники;  
Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королёва;  
[dmitriy.zolotov.98@mail.ru](mailto:dmitriy.zolotov.98@mail.ru)

Предложена концепция сквозной подготовки проектантов и операторов беспилотных летательных аппаратов на основе использования специализированных учебных БПЛА самолётного типа. Обсуждаются обучающие возможности концепции с точки зрения различных направлений подготовки. Разработана методика выбора основных параметров учебного беспилотного летательного аппарата самолётного типа с комплексным учётом аэродинамических и весовых характеристик. Обозначен широкий спектр специфических требований, предъявляемых к БПЛА для приобретения первоначальных навыков управления в ручном и автоматическом режимах. В основе разработанной методики используется уравнение существования самолёта, которое модифицировано с учётом специализированных требований малоразмерных аппаратов. Данная методика включает в себя также процесс выбора наивыгоднейшего сочетания геометрических и кинематических параметров воздушного винта самолёта с использованием теории изолированного элемента лопасти. Методика проектирования БПЛА с учётом выбора параметров воздушного винта реализована в виде программы для ЭВМ на языке PascalABC.NET. Представлен демонстрационный пример выбора основных параметров учебного БПЛА под конкретные требования. Приводятся полученные основные технические характеристики БПЛА. На основе расчётных данных разработана трёхмерная геометрическая модель БПЛА и изготовлен лётный образец. Проведена серия испытательных полётов лётного образца с аппаратурой записи лётных параметров. Обсуждаются пути использования описанной методики для разработки учебно-исследовательских БПЛА.

*Учебный БПЛА; самолёт; уравнение существования; взлётная масса; выбор параметров; теория лопасти винта; проектирование; аэродинамика; натурный образец; испытания*

---

*Цитирование:* Лукьянов О.Е., Золотов Д.В. Методологическое обеспечение подготовки проектантов и операторов беспилотных летательных аппаратов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 1. С. 14-28. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-14-28

### Введение

Интенсивность развития современных технологий и повышение их доступности обусловили расширение возможностей использования беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в различных сферах человеческой деятельности. Существенно более низкая стоимость производства и эксплуатации и, часто, упрощённые требования к сертификации БПЛА по сравнению с пилотируемыми ЛА открыли возможность применения беспилотников для аэро-, фото- и видеосъёмки и наблюдений, геологической разведки местности, мониторинга лесных пожаров, состояния аграрных посевов, промышленных сооружений, поиска и целеуказания. Прорабатываются варианты и других новых способов использования БПЛА, таких как доставка грузов, обработка химикатами сельскохозяйственных культур, ретрансляция связи и интернета и многих

других [1 – 3]. Задействование БПЛА в оборонных целях позволяет перекрыть широкий спектр потребностей армии без необходимости использования более крупногабаритных, дорогих и сложных пилотируемых ЛА.

Повсеместное внедрение БПЛА во многие отрасли хозяйственной деятельности послужило причиной появления новой профессии – так называемых внешних пилотов или пилотов-операторов БПЛА. При этом потребность в таких специалистах настолько увеличилась, что в последние годы в России открываются целые направления подготовки пилотов-операторов на базе существующих коммерческих и государственных учебных заведений высшего, а также среднего специального образования [4; 5]. Овладеть данной профессией можно не только в Москве, но уже и в регионах, в частности в Самарском авиационном техникуме [6].

Стоит отметить, что массовое обучение данной профессии требует наличия существенной материальной базы в учебных организациях, определяемой в основном собственным наличием БПЛА различных типов, на которых проводится получение навыков непосредственного управления и самостоятельной разработки полётных заданий для автопилота в случае выполнения полёта в автоматическом режиме. Сегодня большинство учебных заведений чаще всего комплектуются БПЛА импортного производства, массово поставляемыми, как правило, из стран юго-восточной Азии.

В то же время известно, что в России давно накоплен богатый опыт разработки летательных аппаратов различных типов, размерностей и назначений, а также сложилась сильная, богатая традициями школа обучения авиационными специальностями. В этой связи российские учебные заведения обладают существенным преимуществом: имеется возможность осуществлять обучение пилотов-операторов с использованием учебных БПЛА собственного производства, которые в силу особенностей конструкции могут быть доступны для изготовления самими пилотами или учащимися по другим авиационным направлениям. Таким образом может быть получен замкнутый цикл проектирования, производства БПЛА и применения их в учебных целях, что в совокупности позволит существенно повысить обучающий эффект за счёт приобретения реальных практических навыков, а также откроет возможности к модернизации БПЛА и улучшения характеристик для новых задач.

Подобная концепция позволит сформировать не только централизованный процесс выпуска востребованных пилотов-операторов на БПЛА собственной разработки, но и образует целую цепочку подготовки будущих специалистов по каждой из научных областей, используемых при разработке и эксплуатации летательных аппаратов на всех стадиях жизненного цикла. Именно практическое изучение стадий жизненного цикла летательного аппарата с непосредственным личным участием обучающегося переводит учебный процесс на качественно другой уровень: появляется связь полученных теоретических знаний с практической реальностью, происходит материальное восприятие законов природы, повышается ответственность за принятие технических решений, начинает накапливаться профессиональный опыт ещё до практической деятельности на промышленном предприятии. В частности, обучающиеся по самолётостроительным специальностям приобретут навыки формирования тактико-технических требований и проведения этапа предварительного проектирования ЛА с использованием параметрической многодисциплинарной оптимизации. Для будущих инженеров-аэродинамиков это хорошее подспорье изучить механику газа в теории и на практике: контрольно-измерительная аппаратура на борту БПЛА позволит получать характеристики динамики полёта в натурном лётном эксперименте. Студенты-технологи смогут самостоятельно изготавливать планер ЛА, осваивая на практике современные технологии производства самолётных конструкций. Готовящиеся специалисты в области механики материалов получат возможность сопоставлять результаты расчётов конструкции на

прочность и жёсткость с напряжениями и деформациями силовых элементов планера ЛА в полёте или на стенде статических испытаний согласно заданным расчётным случаям. Студенты-программисты, а также обучающиеся разработке систем управления, авионики и электронного оборудования могут принимать участие в изготовлении и подготовке контрольно-измерительной аппаратуры, программировании автопилота, создании цепей электроснабжения ЛА. И, наконец, курсанты-операторы получают летательный аппарат для отработки первоначальных навыков пилотирования и обслуживания после прохождения подготовки на тренажёре.

Реализация такого комплексного подхода при подготовке будущих кадров авиационной промышленности в рамках учебного заведения возможна на простых в техническом плане учебных БПЛА из доступных недорогих материалов за счёт использования современного электронного оборудования малых габаритов и массы.

На сегодня не существует определённых норм лётной годности, которые могли бы регламентировать требования к учебным БПЛА, учитываемые при проектировании. Известные методики проектирования летательных аппаратов [7 – 10] не ориентированы на ЛА такой малой размерности и сверхмалых скоростей полёта. В то же время такой БПЛА также относится к летательным аппаратам, при проектировании которых учитываются все основополагающие физические принципы, включая законы аэродинамики, динамики полёта, механики твёрдых тел и так далее.

Следует также заметить, что в последнее время прослеживается тенденция ухода от применяемых ранее последовательных принципов проектирования, когда определение аэродинамических, весовых, энергетических и других характеристик производится итерационно друг за другом, уточняясь на каждом шаге. Такой способ определения технического облика на начальных стадиях проектирования чреват значительным увеличением трудоёмкости и затрат времени и средств в случае допущения любого рода неточностей в определении той или иной характеристики на очередном шаге. На смену последовательному подходу приходят методики комплексного, одновременного учёта ключевых показателей эффективности ЛА на его технический облик в целом, использующие математические модели из разных предметных дисциплин и методы многодисциплинарной оптимизации с возможностью формализации, алгоритмизации и автоматизации расчётов [11 – 14]. Основные идеи реализации такого подхода изложены в [15], который в существенной мере может быть продемонстрирован на примере разработки простых в изготовлении учебных БПЛА.

В данной работе ставится задача разработки выбора основных параметров учебного БПЛА с одновременным учётом аэродинамических, весовых и энергетических характеристик, а также ряда специальных требований.

### **Требования к учебным БПЛА самолётного типа**

Рассмотрим требования, которые целесообразно предъявить к учебным БПЛА. Такой аппарат должен обладать свойством «прощать» ошибки пилотирования, которые неизбежно могут возникнуть во время обучения курсантов. Таким образом, данный аппарат должен обладать необходимым запасом продольной, путевой и поперечной статической устойчивости, а также необходимыми характеристиками боковой устойчивости в балансе с хорошими характеристиками управляемости. Данные характеристики определяются величинами и знаками производных  $m_z^{c_{ya}}$ ,  $m_x^\gamma$  и соотношениями производных  $m_x^\beta$  и  $m_y^\beta$  [7].

Кроме того, для увеличения времени на реакцию обучающегося пилота следует иметь возможность выполнять полёт на небольших скоростях  $V$ , что требует снижения

величины удельной нагрузки на крыло  $p_0$  и повышения коэффициента подъёмной силы  $c_{ya}$  за счёт выбора формы профиля.

Большая продолжительность полёта учебному аппарату не обязательна, это обстоятельство можно использовать в целях снижения взлётной массы и удельной нагрузки на крыло.

БПЛА для получения самых первоначальных навыков пилотирования должен иметь наиболее простую конструкцию, изготавливаемую из доступных и недорогих материалов без использования сложного специализированного оборудования, что облегчало бы и ускоряло процесс изготовления самолёта и его ремонта при возможных поломках. Из этих соображений целесообразно оснащение БПЛА электрическим двигателем. Для удобства транспортировки, эксплуатации, быстрого развёртывания и свёртывания следует выполнять самолёт наиболее компактных габаритов с удобным членением конструкции.

### Особенности выбора основных параметров БПЛА на основе уравнения существования

Известно, что свойства каждой функциональной части ЛА требуют определённых затрат массы. Совокупность масс всех этих частей определяет взлётную массу самолёта  $m_0$  [16; 17]. Она определяет возможность полёта и является одним из основных параметров в концептуальном проектировании.

Вычисление значения взлётной массы выполняется с помощью уравнения существования [17]:

$$m_0 = \sum_i m_i / \sum_k \bar{m}_k, \quad (1)$$

где индекс суммирования  $i$  относится к заранее известным массам частей самолёта, записываемым в числитель дроби в абсолютном выражении, а индекс  $k$  – к относительным массам частей самолёта в знаменателе, величина абсолютной массы которых подлежит определению.

Использование уравнения существования (1) в классической форме [7] для маломерных летательных аппаратов может быть неудобно в силу того, что некоторые массы мало зависят от размерности такого БПЛА и его взлётной массы. Кроме того, одни категории масс целесообразно выделить в отдельные слагаемые, а другие – объединить в одно. В таком случае выражение (1) целесообразно переписать в следующем виде:

$$m_0 = \frac{m_{\text{об.упр}} + m_{\text{о.а}} + m_{\text{эл.с}} + m_{\text{р}}}{1 - (\bar{m}_{\text{АКБ}} + \bar{m}_{\text{дв}} + \bar{m}_{\text{в.в}} + \bar{m}_{\text{к}})}, \quad (2)$$

где  $m_{\text{об.упр}} = n m_{\text{с.п}} + m_{\text{р.п}} + m_{\text{р.о}}$  – масса оборудования управления может быть известна заранее, включающая в себя массу сервоприводов  $m_{\text{с.п}}$ , кг; массу приёмника радиосигнала  $m_{\text{р.п}}$ , кг; массу регулятора тока для двигателя  $m_{\text{р.о}}$ , кг;  $n$  – количество сервоприводов;  $m_{\text{эл.с}}$  – масса электросетей известна по величине электрических токов и расстояния их передачи, кг;  $m_{\text{р}}$  – резерв, кг;  $m_{\text{о.а}}$  – масса оборудования автоматического управления, кг;  $\bar{m}_{\text{АКБ}}$  – относительная масса аккумуляторных батарей;  $\bar{m}_{\text{дв}}$  – относительная

масса двигателя силовой установки;  $\bar{m}_{в.в}$  – относительная масса воздушного винта;  $\bar{m}_к$  – относительная масса конструкции планера.

Представленная модификация уравнения существования (2) относительно его классической формы записи [7] упрощает ввод исходных данных и позволяет более гибко использовать его при оптимизации параметров БПЛА или его модернизации. Массы, записанные в числитель, почти не зависят от взлётной массы ЛА такого класса и известны заранее и потому вводятся в уравнение в абсолютном виде. При этом массы ряда агрегатов чувствительны к величине  $m_0$  и вводятся в (2), будучи отнесёнными к  $m_0$ .

Относительная масса аккумуляторов зависит от продолжительности полёта и определяется по выражению:

$$\bar{m}_{АКБ} = \frac{k_{АКБ} \gamma_{АКБ} \bar{N} T}{\eta_{\text{дв}}}, \quad (3)$$

где  $\gamma_{АКБ}$  – удельная масса аккумулятора, кг/Вт·ч;  $\bar{N}$  – потребная энерговооружённость самолёта, Вт/кг;  $T$  – требуемое время полёта, ч;  $\eta_{\text{дв}}$  – коэффициент полезного действия двигателя;  $k_{АКБ}$  – коэффициент, учитывающий увеличение массы аккумулятора за счёт корпуса, проводов и разъёмов.

Относительная масса двигателя определяется энерговооружённостью самолёта:

$$\bar{m}_{\text{дв}} = k_{\text{дв}} \gamma_{\text{дв}} \bar{N}, \quad (4)$$

где  $\gamma_{\text{дв}}$  – удельная масса двигателя, кг/Вт;  $k_{\text{дв}}$  – коэффициент, учитывающий увеличение массы двигателя за счёт системы крепления, проводов и крепёжных элементов.

Потребная энерговооружённость определяется с запасом на набор высоты с заданным градиентом:

$$\bar{N} = \left[ \frac{1}{K_{\text{наб}}} + \text{tg} \theta \right] \frac{V g}{\eta_{в.в}}, \quad (5)$$

где  $K_{\text{наб}}$  – аэродинамическое качество в наборе высоты с заданным углом наклона траектории;  $\theta$  – заданный угол наклона траектории при наборе высоты;  $V$  – скорость полёта, м/с;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\eta_{в.в}$  – КПД воздушного винта.

Относительная масса воздушного винта определяется из расчёта средней массы одного метра лопасти, умноженной на диаметр винта и соотнесённой ко взлётной массе самолёта:  $\bar{m}_{в.в} = \frac{k_{в.в} D_{в.в}}{m_0}$ , где  $D_{в.в}$  – диаметр воздушного винта, м;  $k_{в.в}$  – погонная масса воздушного винта, кг/м.

Масса конструкции планера учебного БПЛА, в отличие от более крупных пилотируемых ЛА, в силу его малой размерности и низких интенсивностей нагрузок в основных силовых элементах часто определяется технологией изготовления и эксплуатационными требованиями, а не силовой работой её элементов. Таким образом, относительная масса конструкции в основном зависит от абсолютных размеров БПЛА. Например, если в конструкции учебного БПЛА широко используется пенополистирол

или лёгкие породы древесины (бальза), то массу конструкции можно определить простым геометрическим расчётом, умножив площадь омываемой поверхности  $S_{ом}$  на толщину оболочки  $\delta_{об}$  и плотность материала  $\rho_k$ :  $m_k = S_{ом} \delta_{об} \rho_k$ , а относительная масса конструкции будет равна  $\bar{m}_k = \frac{m_k}{m_0}$ . Толщина оболочки определяется из сообра-

жений технологии и условий эксплуатации. Масса силовых элементов (лонжероны, шпангоуты), выполняющихся из прочных материалов, определяется из условий жёсткости. Все элементы конструкции, параметры которых выбраны из соображений технологии и жёсткости, подлежат проверочному расчёту на прочность. В связи с зависимостью некоторых масс отдельных частей самолёта от взлётной массы и, наоборот, вычисление взлётной массы самолёта по (2) выполняется итерационно до достижения сходимости.

Блок-схема алгоритма расчёта взлётной массы самолёта представлена на рис. 1.

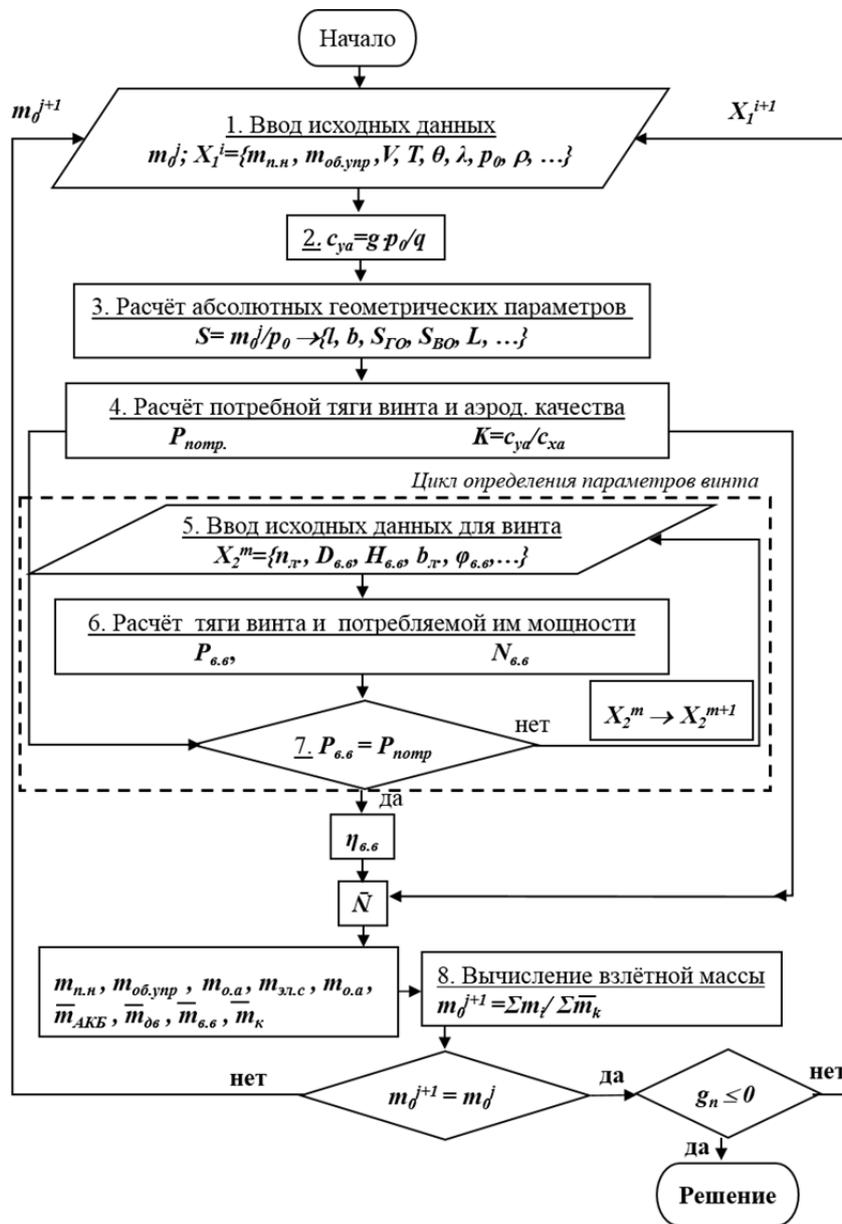


Рис.1. Блок-схема алгоритма вычисления взлётной массы

На основе представленного алгоритма разработано программное обеспечение «BPLADesign» на языке PascalABC.NET [18].

Пользователь данной программы имеет возможность задать на вход вектор исходных данных  $X_1$ , в числе которых удельная нагрузка на крыло  $p_0$ , относительные геометрические характеристики самолёта, величины известных заранее масс, скорость полёта  $V$ , время полёта  $T$  и так далее (рис. 1, блок 1). Вместе с этим задаются также исходные данные для воздушного винта  $X_2$  (рис. 1, блок 5). С полным перечнем исходных данных, а также их условными обозначениями, принятыми на блок-схеме, можно ознакомиться в табл. 1. Кроме прочего пользователь должен задать на вход стартовую величину взлётной массы  $m_0^0$  для выполнения первого приближения. Далее (рис. 1, блок 2) программа осуществляет расчёт потребного коэффициента подъёмной силы для осуществления горизонтального полёта по формуле  $c_{ya} = \frac{g P_0}{q}$ , где  $q$  – скоростной

напор, Па. С помощью соотношения  $p_0 = \frac{m_0}{S}$  вычисляется площадь крыла и на её основе – абсолютные геометрические характеристики крыла и самолёта в целом (рис. 1, блок 3). На основе полученного геометрического облика с помощью формул инженерной методики ведётся расчёт аэродинамических характеристик самолёта, в том числе – аэродинамического качества  $K$  и коэффициента максимальной подъёмной силы  $c_{ya}^{\max}$  с целью проверки выполнения условия  $c_{ya}^{\max} > c_{ya}$ , а также определяется потребная тяга

для самолёта  $P_{\text{потр}} = \left[ \frac{1}{K_{\text{наб}}} + \text{tg} \theta \right] m_0 g$  с учётом запаса для возможности осуществления набора высоты с заданным градиентом  $\theta$  или выполнение манёвра (рис. 1, блок 4).

После этого (рис. 1, блок 7) программа способна осуществить подбор геометрических и кинематических параметров воздушного винта (количество лопастей  $n_l$ , диаметр винта  $D_{e.e}$ , шаг винта  $H_{e.e}$ , закон изменения хорд лопасти по её длине  $b_l$ , геометрическую крутку и закон её изменения  $\varphi_{e.e}$ , частоту вращения  $n_{e.e}$ ) с учётом заданных компоновочных и функциональных ограничений таким образом, чтобы обеспечить равенство тяги, выдаваемой воздушным винтом  $P_{e.e}$ , потребной тяге, т.е.  $P_{e.e} = P_{\text{потр}}$ . При этом пользователь имеет возможность поочерёдно варьировать каждым из параметров при «замороженных» остальных, чтобы при выполнении условия  $P_{e.e} = P_{\text{потр}}$  достигнуть максимальной величины КПД  $\eta_{в.в} \rightarrow \max$  (рис. 1, блок 6, 7), фактически реализуя алгоритм Гаусса-Зейделя. Для решения этой задачи программа может использовать также и любой другой подходящий алгоритм оптимизации. После достижения выполнения условия (рис. 1, блок 7) программа вычисляет требуемую для винта мощность  $N_{e.e}$  как произведение крутящего момента  $M_{e.e}$  на угловую скорость вращения винта  $\omega$ . Соотношение полезной мощности ( $P_{\text{потр}} V$ ) и полной  $N_{e.e}$  определяет КПД винта  $\eta_{e.e}$ .

После завершения выбора геометрических и кинематических параметров воздушного винта производится вычисление потребной энерговооружённости самолёта по (5) и относительных масс компонентов самолёта. Затем по (2) производится вычисления взлётной массы самолёта (рис. 1, блок 8).

Полученное значение взлётной массы первого приближения  $m_0^1$  сопоставляется с  $m_0^0$ . При необходимости цикл вычисления взлётной массы повторяется до сходимости,

пока не выполнится условие  $\frac{|m_0^j - m_0^{j-1}|}{m_0^{j-1}} \leq \varepsilon$ , где  $j$  – номер итерации, а  $\varepsilon$  – наперёд заданная малая величина. После этого проверяется выполнение заданных ограничений  $g_j \leq 0$ . В случае необходимости пользователь должен изменить значения вектора входных параметров  $X_1$ . Результатом работы алгоритма является не только полученная величина взлётной массы, но и совокупность значений параметров, определяющих её значение.

Пользователь имеет возможность варьировать значениями входных параметров не только с целью удовлетворения ограничениям, но и для минимизации значения взлётной массы самолёта или же других характеристик, принятых за критерий качества.

### Расчёт аэродинамических характеристик воздушного винта

Воздушный винт является неотъемлемой частью летательного аппарата, выбор параметров которого осуществляется совместно с проектированием облика самого БПЛА согласно блок-схеме алгоритма (рис. 1).

В основе расчёта аэродинамических характеристик воздушного винта во время выбора его параметров, перечисленных в описании алгоритма, используется теория изолированного элемента лопасти. Теоретические основы этого метода описаны в работах Б.Н. Юрьева, В.Л. Александрова [19; 20]. Ниже представлена реализация этого метода в алгоритме программы «BPLADesign».

В основе определения основных интегральных аэродинамических характеристик воздушного винта в зависимости от его геометрических и кинематических параметров используется интегрирование распределённых аэродинамических характеристик по длине лопасти. Они определяются коэффициентами нормальных и тангенциальных сил, действующих в каждом сечении лопасти:

$$dY = c_y b \rho \frac{W^2}{2} dr, \quad (6)$$

$$dX = c_x b \rho \frac{W^2}{2} dr, \quad (7)$$

где  $Y, X$  – соответственно нормальная и тангенциальная силы в сечении лопасти;  $c_y, c_x$  – соответственно коэффициенты этих сил в сечении;  $b$  – хорда сечения;  $\rho \frac{W^2}{2}$  – скоростной напор в сечении;  $dr$  – длина элемента лопасти.

Отметим, что при интегрировании (6) и (7) необходимо помнить, что величины  $c_y, c_x, b$  и скоростной напор переменные по длине лопасти. Величины  $c_y, c_x$  в (6) и (7) определяются формой профиля и текущим углом атаки сечения и при необходимости вычисляются с учётом сжимаемости среды.

Вычисление тяги винта и потребляемой им мощности производится суммированием по длине лопасти сил в её сечениях:

$$P = \sum_{i=1}^n (\Delta Y_i \cos \beta_i - \Delta X_i \sin \beta_i), \quad (8)$$

$$N = \sum_{i=1}^n (\Delta Y_i \sin \beta_i + \Delta X_i \cos \beta_i) r \omega, \quad (9)$$

где  $P$  – тяга;  $N$  – мощность;  $\omega$  – угловая скорость вращения винта;  $\beta$  – угол притекания, а также угол атаки  $\alpha$ , используемый для оценки  $c_y$ , определяются с учётом величины скорости поступательного движения по треугольнику скоростей (рис. 2).

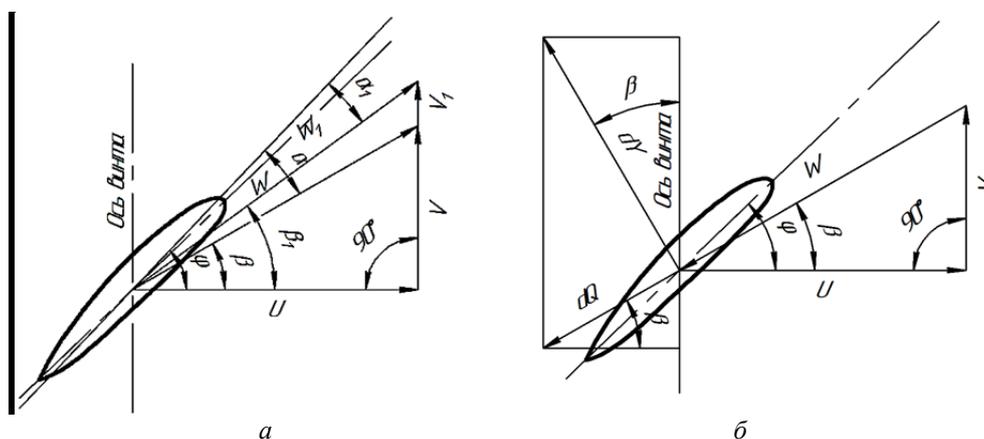


Рис. 2. К определению углов атаки и притекания:  
 а – треугольник скоростей с учётом скорости поступательного движения винта;  
 б – схема аэродинамических сил на элементе лопасти

На рис. 2 приняты следующие обозначения:  $U = 2\pi n s r$  – окружная скорость элемента лопасти;  $r$  – расстояние до сечения лопасти от оси вращения винта;  $V$  – скорость полёта самолёта;  $W$  – скорость набегающего потока на сечение лопасти;  $\alpha$  – угол атаки сечения лопасти;  $\varphi$  – угол установки сечения лопасти;  $\beta$  – угол притекания сечения лопасти;  $V_1$  – вызванная винтом осевая скорость;  $\alpha_1, \varphi_1, \beta_1$  – соответственно углы атаки, установки и притекания сечения лопасти с учётом вызванной винтом осевой скорости.

### Демонстрация предлагаемой методики

Работоспособность предложенной методики рассмотрим на примере выбора основных параметров БПЛА самолётного типа для приобретения курсантами первоначальных навыков пилотирования. В соответствии с требованиями к учебным БПЛА приняты следующие концептуальные решения: БПЛА самолётного типа выполняется по нормальной аэродинамической схеме с одним электрическим двигателем и тянущим винтом, двухопорным шасси с хвостовой опорой. Крыло прямоугольной формы на виде в плане без геометрической крутки оборудовано механизацией задней кромки в виде отклоняемого закрыла по всему размаху крыла, который одновременно выполняет функции элерона. Профиль крыла умеренной толщины имеет выпукло-плоскую форму с целью упрощения изготовления крыла. Предусматривается возможность полёта как в ручном, так и в автоматическом режимах. Основной материал конструкции – сосна в силовых элементах, работающих на растяжение-сжатие, и пенополистирол – в силовых элементах, работающих на сдвиг, и используется также в качестве заполнителя. Скорость горизонтального установившегося полёта  $V \leq 10$  м/с; размах крыла  $l \leq 1$  м, время полёта  $T = 0,25$  ч. Старт выполняется броском с руки, а посадка – на грунт на шасси.

В табл. 1 представлен ряд исходных данных, принятых постоянными.

Таблица 1. Исходные данные

Плотность воздуха $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1,18
Температура воздуха $t$ , °C	25,0
Скорость полёта $V$ , м/с	$\leq 10$
Скороподъёмность $V_y$ , м/с	$\geq 5,5$
Размах крыла $l$ , м	$\leq 1$
Время полёта $T$ , ч	0,25
Коэффициент статического момента ГО $\bar{A}_{ГО}$	0,50
Коэффициент статического момента ВО $\bar{A}_{ВО}$	0,04
Угол поперечного $V$ -крыла	+6°
Угол установки крыла $\varphi_k$	+3,5°
Угол установки стабилизатора $\varphi_{ст}$	0
Относительная толщина профиля крыла $\bar{c}$ , %	12,5
Максимальный угол отклонения закрылков $\delta_{зк}$	30,0°
Мидель фюзеляжа, мм	67×80
Максимальный угол наклона траектории полёта $\theta$	+30,0°
Удельная энергоёмкость аккумулятора, Вт ч/кг	140
Максимальное напряжение на аккумуляторе $U$ , В	8,60
Масса полезной нагрузки, кг	0,06
Удельная масса электродвигателя $\gamma_{дв}$ , кг/кВт	0,36
Плотность конструкционной древесины $\rho_д$ , кг/м <sup>3</sup>	500
Плотность конструкционного пенополистирола $\rho_{п.п}$ , кг/м <sup>3</sup>	30,0
Количество лопастей воздушного винта $n_v$	2
Стартовое значение взлётной массы нулевого приближения $m_0^0$ , кг	0,5
Масса оборудования управления	
Сервопривод, кг	0,010
Приёмник радиосигнала, кг	0,013
Регулятор тока, кг	0,036
Провода и клеммы, кг	0,010

В результате получены следующие характеристики учебного БПЛА, представленные в табл. 2.

Таблица 2. Полученные характеристики БПЛА

Взлётная масса, кг	0,422
Удельная нагрузка на крыло $p_0$ , кг/м <sup>2</sup>	3,3
Удлинение крыла $\lambda$	6
Сужение $\eta$	1
Размах крыла $l$ , м	0,8760
Хорда крыла $b$ , м	0,1460
Площадь крыла $S$ , м <sup>2</sup>	0,1279
Площадь миделевого сечения фюзеляжа $S_{м.ф}$ , м <sup>2</sup>	0,0055
Относительная площадь элерон-закрылков $\bar{S}_{мех}$	0,1850
Относительная площадь стабилизатора $\bar{S}_{Г.О}$	0,1840
Относительная площадь киля $\bar{S}_{В.О}$	0,0684
Длина самолёта $L$ , м	0,62
Высота самолёта (с шасси) $H$ , м	0,28
Скорость полёта $V$ , км/ч	35,0
Коэффициент подъёмной силы горизонтального полёта $c_{ya}$	0,60
Мощность двигателя $N_{дв}$ , Вт	140

Окончание табл. 2

Масса конструкции $m_k / \bar{m}_k$ , кг/%	0,139/33
Масса двигателя $m_{дв} / \bar{m}_{дв}$ , кг/%	0,05/120
Масса аккумулятора $m_{АКБ} / \bar{m}_{АКБ}$ , кг/%	0,066/16
Масса воздушного винта $m_{в.в} / \bar{m}_{в.в}$ , кг/%	0,018/4
Масса оборудования управления $m_{об.упр} / \bar{m}_{об.упр}$ , кг/%	0,089/21
Масса полезной нагрузки $m_{п.н} / \bar{m}_{п.н}$ , кг/%	0,06/14
Диаметр воздушного винта $D$ , м	0,178
Шаг винта $H$ , м	0,127
Средняя хорда лопасти винта $b_{А.л}$ , м	0,015
Геометрическая крутка лопасти винта $\varphi_{в.в}$	-5°
Толщина комлевого сечения лопасти, мм	1,4
Толщина концевое сечения лопасти, мм	0,4
Частота вращения винта (при максимальной мощности) $n_{в.в}$	10 500

В табл. 2 массы агрегатов даны в абсолютных и относительных величинах через косую черту. Итоговые относительные массы аккумулятора, двигателя, воздушного винта, внесённые в табл. 2, рассчитаны уже по величине абсолютной массы существующих агрегатов, подобранных по результатам расчётов.

Представленные в табл. 2 характеристики получены в результате нескольких шагов, внутри каждого из которых было решено уравнение существования (2). Такая мера понадобилась с целью удовлетворить ограничениям по скорости горизонтального полёта  $V \leq 10$  м/с и габаритам БПЛА  $l \leq 1$  м, указанным в задании.

Решение задачи выполнялось на одном ядре в два потока процессора Intel Core i5. Затрачиваемое время на выполнение одной итерации решения уравнения существования составляет 0,19 с.

На основе полученных данных разработана трёхмерная геометрическая модель и построен летающий образец учебного БПЛА (рис. 3), а также выполнена серия испытательных полётов на ручном дистанционном управлении (рис. 4).

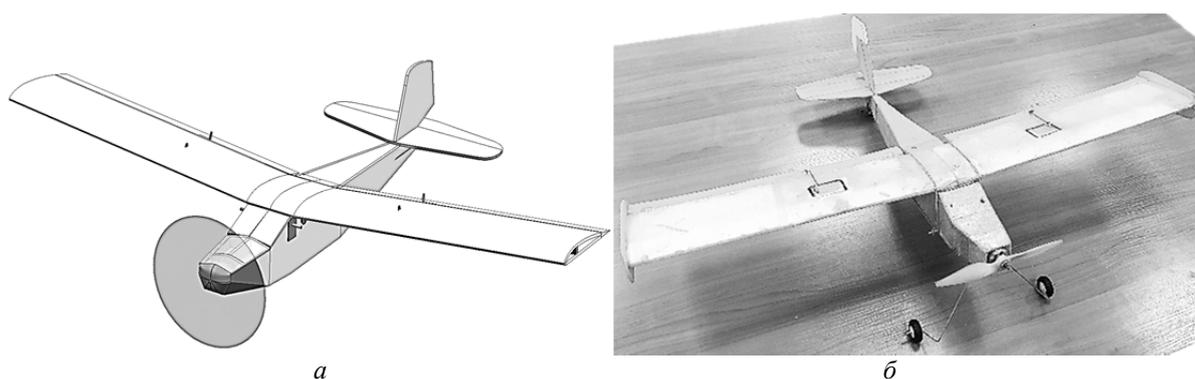


Рис. 3. Учебный БПЛА:  
а – трёхмерная геометрическая модель; б – летающий образец

Полётная масса летающего образца соответствует расчётному значению  $m_{пол} = 0,42$  кг. Масса изготовленной конструкции составила  $m_k = 0,137$  кг.

Для удобства эксплуатации и транспортировки БПЛА предусмотрена возможность отстыковки крыла от фюзеляжа. Отстыкованное крыло открывает доступ в верх-

ний отсек фюзеляжа, где располагаются аккумулятор, приёмник радиосигнала управления, регулятор мощности двигателя, рулевой привод руля высоты. Нижний отсек фюзеляжа отделён от верхнего горизонтальной перегородкой. Он предназначен для размещения контрольно-измерительной аппаратуры и модуля автопилота. Доступ в отсек производится через люк в нижней части фюзеляжа. Крыло цельное, однолонжеронное, во внутреннем объёме которого расположены рулевые приводы элерон-закрылков.

В одном из полётов (рис. 4) в составе полезной нагрузки находился микроконтроллер, барометрический и ультразвуковой датчики высоты, которые предназначались для определения лётно-технических характеристик самолёта. Датчики засвидетельствовали диапазон высот полёта, верхняя граница которого была равна 35 метрам, а диапазон вертикальных скоростей составил  $-13,6 < V_y < +8,5$  м/с.



Рис. 4. Учебный БПЛА в полёте

### Заключение

На основе модифицированного уравнения существования самолёта и теории изолированного элемента лопасти разработана методика выбора основных параметров малоразмерных низкоскоростных учебных БПЛА на начальных стадиях проектирования. Параллельный учёт весового и энергетического баланса летательного аппарата с помощью уравнения существования самолёта позволяет получать результат за короткое время. Работа предложенной методики продемонстрирована на примере разработки БПЛА для приобретения первоначальных навыков управления в ручном и автоматическом режимах. С учётом полученных расчётных данных построен лётный образец и проведена серия испытательных полётов с измерительной аппаратурой на борту. Лётные испытания подтвердили качественные характеристики ЛА, заложенные при проектировании: аппарат обладает хорошей устойчивостью и управляемостью во всех каналах управления на малых скоростях полёта, а также достаточной величиной энерговооружённости для выполнения интенсивного набора высоты и разворота малого радиуса без скольжения. Механизация крыла позволяет выполнять мягкую посадку на упругое шасси с малой скоростью на площадки ограниченных размеров в условиях города.

В качестве следующего этапа развития предложенной концепции комплексной подготовки проектантов и операторов БПЛА планируется усложнить состав контрольно-измерительной аппаратуры для получения всего спектра характеристик динамики полёта БПЛА в натурном эксперименте – в полёте и сравнения фактических характеристик БПЛА с расчётными характеристиками, полученными при его проектировании по разработанной методике с целью её уточнения.

Предложенный подход применения БПЛА при его возможных технических доработках позволяет дополнительно реализовать концепцию не только учебного, но и учебно-исследовательского БПЛА для проведения исследований по оценке эффекта внедрения отдельных инноваций в конструкцию и оборудование летательных аппаратов. Например, такой БПЛА может послужить летающей платформой для исследования новых аэродинамических схем, изучения перспектив применения адаптивного крыла, распределённой силовой установки, энергетической механизации крыла, реализации эффекта Коанда, эффекта Магнуса и так далее.

Авторы выражают благодарность профессору В.А. Комарову за внимательное чтение рукописи и ряд ценных замечаний.

### **Библиографический список**

1. Федосеева Н.А., Загвоздкин М.В. Перспективные области применения беспилотных летательных аппаратов // Научный журнал. 2017. № 9 (22). С. 26-29.
2. МЧС России. Беспилотные летательные аппараты. <https://www.mchs.gov.ru/ministerstvo/o-ministerstve/tehnika/aviacionnaya-tehnika/bespilotnye-letatelnye-apparaty>
3. Бойко А. Области применения беспилотников. <http://robotrends.ru/robopedia/oblasti-primeneniya-bespilotnikov>
4. Профессия – внешний пилот. Куда пойти учиться на оператора дрона в России? [https://aeronet.aero/press\\_room/analytics/2018\\_01\\_22\\_how\\_to\\_become\\_drone\\_operator\\_in\\_russia](https://aeronet.aero/press_room/analytics/2018_01_22_how_to_become_drone_operator_in_russia)
5. ООО «Съёмка с Воздуха». <https://geodrone.su/>
6. В Самарском авиационном техникуме появилась новая специальность – «Управление дронами». [https://yandex.ru/turbo/1tv.ru/s/news/2019-11-06/375212-v\\_samarskom\\_aviatsionnom\\_tehnikume\\_poyavilas\\_novaya\\_spetsialnost\\_upravlenie\\_dronami](https://yandex.ru/turbo/1tv.ru/s/news/2019-11-06/375212-v_samarskom_aviatsionnom_tehnikume_poyavilas_novaya_spetsialnost_upravlenie_dronami)
7. Проектирование самолётов / под ред. С.М. Егера. М.: Машиностроение, 1983. 616 с.
8. Бадягин А.А., Егер С.М., Мишин В.Ф., Склянский Ф.И., Фомин Н.А. Проектирование самолётов. М.: Машиностроение, 1972. 516 с.
9. Raymer D.P. Aircraft design: a conceptual approach. Washington: Amer. Inst. of Aeronautics and Astronautics, 2012. 227 p.
10. Roskam J. Airplane design. Part I: Preliminary sizing of airplanes. Lawrence Kansas: Design, Analysis and Research Corporation, 2017. 206 p.
11. Balunov K.A., Chedrik V.V., Tuktarov S.A., Uskov V.M. Multidisciplinary topology-based optimization in design of aircraft structural layouts // 30-th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, ICAS 2016 (September, 25-30, 2016, Daejeon, South Korea).
12. Вырыпаев А.А., Козлов Д.М., Комаров В.А., Кузнецов А.С. Выбор рациональных параметров ступенчатого крыла с учётом весовой и аэродинамической эффективности. Депонирована в ВИНТИ № 45-В2010. 28.01.2010. 40 с.
13. Wunderlich T. Multidisziplinärer entwurf und optimierung von flügeln für verkehrsflugzeuge // Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2009 (08-10. Sept. 2009, Aachen, Deutschland). P. 1-10.
14. Martins J.R.R.A., Kenway G.K.W., Brooks T. Multidisciplinary design optimization of aircraft configurations — Part 2: High-fidelity aerostructural optimization. Lecture series, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Sint-Genesius-Rode, Belgium, May 2016.

15. Комаров В.А. Точное проектирование // Онтология проектирования. 2012. № 3 (5). С. 8-23.
16. Корольков О.Н. Уравнение и область существования самолёта // Общероссийский научно-технический журнал «Полёт». 2001. № 10. С. 45-52.
17. Болховитинов В.Ф. Пути развития летательных аппаратов. М.: Оборонгиз, 1962. 132 с.
18. Лукьянов О.Е., Эспиноса Барсенас О.У., Золотов Д.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «BPLADesign» № 2021611018; 20.01.2021.
19. Юрьев Б.Н. Воздушные винты. М.: Госмашметиздат, 1933. 400 с.
20. Александров В.Л. Воздушные винты: учеб. пособие для авиац. вузов. М.: Оборонгиз, 1951. 476 с.

## METHODOLOGICAL SUPPORT FOR THE TRAINING OF UAV DESIGNERS AND OPERATORS

©2021

- O. E. Lukyanov** Candidate of Science (Engineering), Associate Professor of the Department of Aircraft Construction and Design; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [lukyanovoe@mail.ru](mailto:lukyanovoe@mail.ru)
- D. V. Zolotov** Master's Student, Institute of Aeronautical Engineering; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [dmitriy.zolotov.98@mail.ru](mailto:dmitriy.zolotov.98@mail.ru)

In this paper, we presented the developed concept for end-to-end training of designers and operators of UAVs on the basis of the use of specialized aircraft-type trainers. The educational possibilities of the concept in terms of various training programs are discussed. A methodology for the selection of the main parameters of UAV taking into account the mutual effect of aerodynamics and weight was developed. It provided a wide range of specific requirements for UAVs for acquiring initial control skills in manual and automatic modes. The developed methodology is based on the takeoff-weight buildup equation modified with regard to the specific requirements for small-sized vehicles. This methodology also includes the process of choosing the most advantageous combination of geometric and kinematic parameters of an aircraft propeller using the isolated blade element theory. The methodology is implemented in PascalABC.NET language. A demonstrative example of selecting the main parameters of a training UAV for specific requirements is presented. The obtained basic technical characteristics of the UAV are given. A three-dimensional geometric model of the UAV was developed on the basis of the calculated data, and a prototype was manufactured. The flight parameters recorded through a series of test flights of the prototype are presented. The ways of using the described methodology for the development of training-and-research UAVs are discussed.

*UAV trainer; aircraft; takeoff-weight buildup equation; aircraft gross weight; isolated blade element theory; design; aerodynamics; full-scale vehicle; flight experiment*

---

*Citation:* Lukyanov O.E., Zolotov D.V. Methodological support for the training of UAV designers and operators. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2021. V. 20, no. 1. P. 14-28. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-14-28

## References

1. Fedoseeva N.A., Zagvozdkin M.V. Promising areas of use of unmanned aerial vehicles. *Nauchnyy Zhurnal*. 2017. No. 9 (22). P. 26-29. (In Russ.)
2. *MChS Rossii. Bepilotnye letatel'nye apparaty* [Digital source]. Available at: <https://www.mchs.gov.ru/ministerstvo/o-ministerstve/tehnika/aviacionnaya-tehnika/bepilotnye-letatelnye-apparaty>

3. Boyko A. *Oblasti primeneniya bespilotnikov* [Areas of use of unmanned aerial vehicles]. Available at: <http://robotrends.ru/robopedia/oblasti-primeneniya-bespilotnikov>
4. *Professiya – vneshniy pilot. Kuda poyti uchit'sya na operatora drona v Rossii?* [Remote pilot profession. How to become a drone operator in Russia]. Available at: [https://aeronet.aero/press\\_room/analytics/2018\\_01\\_22\\_how\\_to\\_become\\_drone\\_operator\\_in\\_russia](https://aeronet.aero/press_room/analytics/2018_01_22_how_to_become_drone_operator_in_russia)
5. ООО «S'emka s Vozdukha» [ООО «Aerial cinematography»]. Available at: <https://geodrone.su/>
6. *V Samarskom aviatsionnom tekhnikume poyavilas' novaya spetsial'nost' – «Upravlenie dronami»* [Digital source]. Available at: [https://yandex.ru/turbo/1tv.ru/s/news/2019-11-06/375212-v\\_samarskom\\_aviatsionnom\\_tekhnikume\\_poyavilas\\_novaya\\_spetsialnost\\_upravlenie\\_dronami](https://yandex.ru/turbo/1tv.ru/s/news/2019-11-06/375212-v_samarskom_aviatsionnom_tekhnikume_poyavilas_novaya_spetsialnost_upravlenie_dronami)
7. *Proektirovanie samoletov / pod red. S.M. Egera* [Aircraft design / ed. by S.M. Eger]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1983. 616 p.
8. Badyagin A.A., Eger S.M., Mishin V.F., Sklyanskiy F.I., Fomin N.A. *Proektirovanie samoletov* [Aircraft design]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1972. 516 p.
9. Raymer D.P. Aircraft design: a conceptual approach. Washington: Amer. Inst. of Aeronautics and Astronautics, 2012. 227 p.
10. Roskam J. Airplane design. Part I: Preliminary sizing of airplanes. Lawrence Kansas: Design, Analysis and Research Corporation, 2017. 206 p.
11. Balunov K.A., Chedrik V.V., Tuktarov S.A., Uskov V.M. Multidisciplinary topology-based optimization in design of aircraft structural layouts // 30-th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, ICAS 2016 (September, 25-30, 2016, Daejeon, South Korea).
12. Vyrypaev A.A., Kozlov D.M., Komarov V.A., Kuznetsov A.S. Selection of rational parameters of stepped wing with account for their weight and aerodynamic efficiency. VINITI no. 45-B2010. 28.01.2010. 40 p. (In Russ.)
13. Wunderlich T. Multidisziplinärer entwurf und optimierung von flügeln für verkehrsflugzeuge. *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 2009 (08-10. Sept. 2009, Aachen, Deutschland)*. P. 1-10.
14. Martins J.R.R.A., Kenway G.K.W., Brooks T. Multidisciplinary design optimization of aircraft configurations – Part 2: High-fidelity aerostructural optimization. Lecture series, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Sint-Genesius-Rode, Belgium, May 2016.
15. Komarov V.A. Concurrent design. *Ontology of Designing*. 2012. No. 3 (5). P. 8-23. (In Russ.)
16. Korolkov O. N. The equation and the area of existence of an airplane. *All-Russian Scientific-Technical Journal «Polyot»*. 2001. No. 10. P. 45-52. (In Russ.)
17. Bolkhovitinov V.F. *Puti razvitiya letatel'nykh apparatov* [Ways of aircraft evolution]. Moscow: Oborongiz Publ., 1962. 132 p.
18. Lukyanov O.E., Espinosa Barsenas O.U., Zolotov D.V. *Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM «BPLADesign»* [«UAV Design» computer program. State registration certificate]. No. 2021611018, 20.01.2021.
19. Yur'ev B.N. *Vozdushnye vinty* [Airplane propellers]. Moscow: Gosmashmetizdat Publ., 1933. 400 p.
20. Aleksandrov V.L. *Vozdushnye vinty: ucheb. posobie dlya aviats. vuzov* [Airplane propellers]. Moscow: Oborongiz Publ., 1951. 476 p.

## ВЛИЯНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ОТКЛОНЕНИЙ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОТЕРМИЧЕСКОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ НА ТОЧНОСТЬ МАНЕВРИРОВАНИЯ НАНОСПУТНИКА

© 2021

**Л. И. Сеницын** аспирант;  
Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королёва;  
[sinitsin\\_leonid@mail.ru](mailto:sinitsin_leonid@mail.ru)

**И. В. Белоконов** доктор технических наук, профессор, заведующий межвузовской  
кафедрой космических исследований;  
Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королёва;  
[ibelokonov@mail.ru](mailto:ibelokonov@mail.ru)

Предложена методика оценки результатов проведения манёвров коррекции наноспутника (НС) с электротермической двигательной установкой (ЭТДУ). На примере разрабатываемого наноспутника SamSat-M выявлены общие причины возникновения неточности маневрирования, связанные с производственными отклонениями изготовления двигательной установки. Выполнен в вероятностной постановке анализ процесса маневрирования НС. В качестве случайных факторов рассматриваются проектные параметры ЭТДУ. Статистические модели распределений всех случайных факторов полагаются равновероятными, что является наихудшим сценарием, так как истинные распределения проектных параметров ЭТДУ неизвестны. Методической основой исследования является метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) с последующим использованием регрессионного и факторного анализа, на основании которых определено влияние разбросов каждого из проектных параметров на контролируемые параметры. Сформированы требования к проектным параметрам ЭТДУ, влияющим на разброс проекций вектора изменения скорости движения НС и на возникающее угловое движение. Представленные результаты могут быть использованы для оценки влияния производственных отклонений проектных параметров двигательных установок на характер движения космического аппарата, а также для формирования требований к разбросам проектных параметров для обеспечения выполнения целевой задачи.

*Наноспутник; электротермическая двигательная установка; стохастическая модель движения; метод Монте-Карло; факторный анализ; уравнение регрессии; коррекция орбиты*

---

**Цитирование:** Сеницын Л.И., Белоконов И.В. Влияние производственных отклонений изготовления электротермической двигательной установки на точность маневрирования наноспутника // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 1. С. 29-45. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-29-45

---

### Введение

В настоящее время космические аппараты нанокласса полностью завоевали рынок научно-образовательных спутников и активно осваивают область практического и научного применения, которую раньше занимали «большие» космические аппараты. Одной из наиболее актуальных проблем при этом является создание миниатюрных двигательных установок, которые позволяли бы решать широкий круг задач: ликвидация ошибок выведения наноспутников (НС) на орбиту, поддержание орбитальных параметров, межорбитальное маневрирование, построение орбитальных группировок НС, инспектирование других орбитальных объектов, наблюдение за околоземным космическим пространством, увод НС на орбиту утилизации и т.д.

Одними из наиболее интересных с практической точки зрения выступают электротермические двигательные установки (ЭТДУ), так как они имеют относительно высокие удельные импульсы и могут работать с инертным рабочим телом (РТ). В уста-

новках такого типа происходит предварительная газификация РТ в испарителе, а затем его окончательный перегрев за счёт бортовых источников энергии и выброс газа через сопло в окружающее пространство, за счёт чего создаётся реактивная сила. В этой связи многие научные коллективы, занимающиеся разработкой платформ нанокласса, предлагают различные варианты ЭТДУ [1 – 3].

Ещё в 2005 году компанией Surrey Satellite Technology Ltd (Великобритания) была предложена ЭТДУ на ксеноне, позволяющая получать удельный импульс 48 с и силу тяги 18 мН [4]. В 2008 году Южно-Калифорнийским университетом предложена ЭТДУ, позволяющая получать удельный импульс около 80 с [5]. В качестве РТ выступала вода. Активно ведутся разработки ЭТДУ с фреоном в качестве РТ. К ним относятся ЭТДУ с удельными импульсами, достигающими 150 с, предложенные в 2015-2017 годах американскими компаниями CU Aerospace, VACCO Industries и Busek Co Inc [6]. Существуют и российские разработки, например в Омском государственном техническом университете предложена ЭТДУ с реализуемой характеристической скоростью более 60 м/с и аммиаком в качестве РТ [7]. В работе [8] предлагается использовать для перегрева РТ солнечную энергию. В силу возникновения неизбежных производственных отклонений изготовления миниатюрных ЭТДУ эффективность коррекции траектории, а также их влияния на динамику движения НС в вероятностной постановке в настоящее время не изучены. В настоящей работе предлагается методика исследования влияния разброса проектных параметров ЭТДУ на эффективность маневрирования НС и выбора допустимых технологических погрешностей изготовления на базе регрессионного и факторного анализа.

### **Постановка задачи**

Для анализа космических миссий маневрирующего НС необходимо сформировать комплекс математических моделей, позволяющий оценить эффективность принимаемых технических решений. Эти модели должны учитывать производственные отклонения изготовления и носить вероятностный характер, а также учитывать комплекс факторов, связанных с внешними и управляющими воздействиями, в значительной мере влияющими на движение НС.

Практический интерес представляет формирование требований к допускам производственных отклонений для обеспечения требуемых значений проектных параметров ЭТДУ, которые оказывают влияние на разбросы реализующегося вектора корректирующего импульса скорости и возникновение возмущённого движения относительно центра масс.

В статье описывается разработка методики исследования влияния производственных отклонений изготовления электротермической двигательной установки на ошибки маневрирования НС и характер его движения после коррекции.

Для оценки влияния работы ЭТДУ на характер движения НС (как движения центра масс, так и движения относительно центра масс) разработано программное обеспечение, позволяющее проводить численное моделирование исследуемой динамической системы. Задача моделирования процесса коррекции движения рассмотрена в вероятностной постановке. В качестве случайных факторов в вероятностной модели учитываются проектные параметры ЭТДУ. Статистические модели распределений всех случайных факторов полагаются равновероятными, что является наихудшим сценарием, так как истинные распределения проектных параметров ЭТДУ неизвестны и их достоверное математическое описание может быть получено в результате большого числа испытаний.

В вектор контролируемых параметров включены параметры движения центра масс и относительно центра масс: проекции векторов изменения скорости

$\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z$ , импульса моментов сил  $L_x, L_y, L_z$ , порождаемых тягой и приводящих к закрутке НС, и скорости изменения углов ориентации НС относительно центра масс  $\dot{\gamma}_T, \dot{\psi}_T, \dot{\theta}_T$  (в дальнейшем называются угловыми скоростями), приобретаемые ко времени окончания выдачи импульса тяги.

Для формирования требований к разбросам проектных параметров в рамках предлагаемой методики используется комбинация методов регрессионного и факторного анализов [9;10].

### Математическая модель для оценки эффективности коррекции траектории наноспутника

Движение центра масс наноспутника рассматривается в геоцентрической прямоугольной системе координат (ГСК)  $O_0X_0Y_0Z_0$ , начало которой совпадает с центром Земли. Основная плоскость  $O_0X_0Y_0$  совпадает с плоскостью экватора, ось  $O_0X_0$  направлена в точку весеннего равноденствия, ось  $O_0Z_0$  – по оси вращения Земли, а ось  $O_0Y_0$  дополняет систему координат до правой [11].

Матрица перехода из ГСК в орбитальную систему координат (ОСК) имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{C_2 Z_0^* - C_3 Y_0^*}{Cr} & \frac{C_3 X_0^* - C_1 Z_0^*}{Cr} & \frac{C_1 Y_0^* - C_2 Z_0^*}{Cr} \\ \frac{C_1}{C} & \frac{C_2}{C} & \frac{C_3}{C} \\ \frac{X_0^*}{r} & \frac{Y_0^*}{r} & \frac{Z_0^*}{r} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $C = (C_1; C_2; C_3)$  – векторная константа интеграла площадей;  $X_0^*, Y_0^*, Z_0^*$  – координаты центра масс наноспутника в ГСК;  $r = \sqrt{X_0^{*2} + Y_0^{*2} + Z_0^{*2}}$  – радиус-вектор НС.

Вектор интеграла площадей вычисляется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} C_1 &= Y_0^* V_z - Z_0^* V_y, \\ C_2 &= Z_0^* V_x - X_0^* V_z, \\ C_3 &= X_0^* V_y - Y_0^* V_x, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $V_x, V_y, V_z$  – проекции вектора скорости движения центра масс в ГСК.

Наноспутник рассматривается как твёрдое тело, которое совершает вращательно-поступательное движение под действием приложенных к нему сил. Центр масс перемещается по изменяющейся в инерциальном пространстве траектории и одновременно с этим происходит вращательное движение НС за счёт несоосности линии приложения силы тяги и продольной оси НС, проходящей через центр масс, а также под воздействием гравитационного и аэродинамического моментов.

Для описания углового положения НС введена опорная система координат, относительно которой измеряются угловые отклонения, угловые скорости и ускорения связанной с космическим аппаратом системы координат.

В качестве опорной выбрана ОСК  $OXYZ$  с началом в центре масс наноспутника  $O$ . Оси ОСК направлены следующим образом: ось  $OZ$  – по местной вертикали от цен-

тра Земли к центру масс аппарата  $O$ ; ось  $OX$  – перпендикулярно оси  $OZ$  в плоскости орбиты и направлена в сторону полёта; ось  $OY$  – по бинормали к орбите для формирования правой системы координат [12]. Связанная система координат выбирается таким образом, чтобы оси её совпадали с главными центральными осями инерции космического аппарата. Начало связанной системы координат  $OX_i Y_i Z_i$  располагается в центре масс наноспутника, ось  $OX_i$  направлена вперёд вдоль продольной оси наноспутника,  $OZ_i$  направлена вверх по нормали, третья ось  $OY_i$  дополняет систему координат до правой.

Ориентация космического аппарата в пространстве, то есть положение связанных осей  $OX_i Y_i Z_i$  относительно орбитальной системы координат  $OXYZ$  определяется тремя независимыми углами: углом крена  $\gamma$ , углом рысканья  $\psi$  и углом тангажа  $\vartheta$  [13].

Модель движения имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\omega}} = I^{-1}(-\boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_{\Sigma}); \\ \dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}; \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}; \\ \mathbf{V} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_a + \frac{\mathbf{F}_T}{m}, \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – мгновенная угловая скорость;  $I$  – тензор инерции НС;  $\mathbf{M}_{\Sigma}$  – вектор моментов сил, включающий в себя гравитационный и аэродинамический моменты, а также возмущающий момент, возникающий при выдаче импульса тяги;  $\Lambda$  – кватернион ориентации ССК в ОСК;  $\mathbf{a}_E$  – вектор ускорения, обусловленный влиянием формы Земли и неравномерности распределения её массы;  $\mathbf{a}_a$  – вектор ускорения от действия атмосферы;  $\mathbf{F}_T$  – вектор силы тяги, выраженный в проекциях на оси ГСК,  $m$  – масса НС, считающаяся переменной во время проведения коррекции из-за выработки РТ.

Профиль силы тяги ЭТДУ состоит из участка выхода на режим, участка установившегося режима и участка спада тяги. На рис. 1 приведены данные, соответствующие ЭТДУ, разработанной на межвузовской кафедре космических исследований Самарского университета [14].

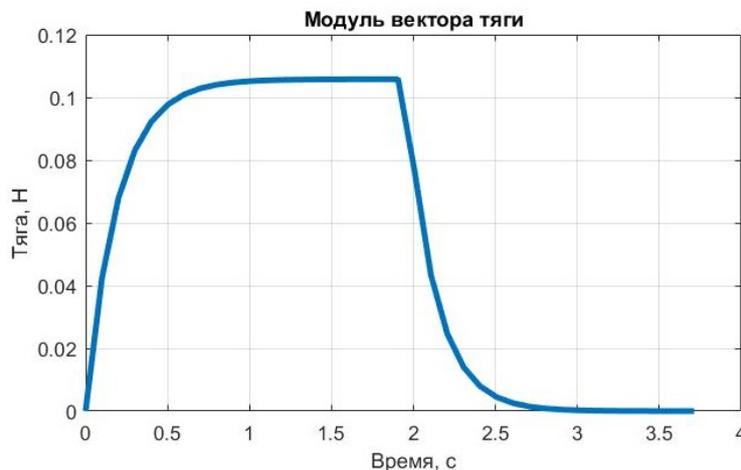


Рис. 1. Профиль силы тяги ЭТДУ

Математическая модель тяги ЭТДУ представляется в виде [15]:

$$\begin{cases} P_0 = P_n \left( 1 - e^{-\frac{10t}{T_1}} \right), t < T_1; \\ P_0 = P_n, T_1 \leq t < T_1 + T_0; \\ P_0 = P_n e^{-\frac{10(t-T_1-T_0)}{T_2}}, t \geq T_1 + T_0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $t$  – текущее время с момента включения двигательной установки;  $T_0 = 0$  с,  $T_1 = 1,9$  с,  $T_2 = 1,5$  с – длительности установившегося режима, выхода на режим и спада тяги соответственно.

С учётом отклонения сопла от продольной оси в плоскости  $X_l O Y_l$  (угол  $\alpha$ ) и плоскости  $X_l O Z_l$  (угол  $\beta$ ), проекции силы тяги  $\mathbf{P}$  в ССК можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} P_x = P_0 \cos \left( \arctg \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} \right); \\ P_y = P_0 \sin \alpha; \\ P_z = P_0 \sin \beta. \end{cases} \quad (5)$$

Проекция тяги в ССК пересчитываются в ГСК и учитываются в правых частях дифференциальных уравнений движения центра масс.

Момент силы тяги определяется как векторное перемножение вектора положения сопла относительно центра масс НС на вектор силы тяги в связанной системе координат:

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{C}_n \times \mathbf{P}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{C}_n$  – вектор положения сопла относительно центра масс НС.

При моделировании используются следующие выражения для проекций гравитационного момента [16]:

$$\begin{cases} M_{gx} = 3\omega_0^2 (I_z - I_y) M_{32} M_{33}; \\ M_{gy} = 3\omega_0^2 (I_x - I_z) M_{33} M_{31}; \\ M_{gz} = 3\omega_0^2 (I_y - I_x) M_{31} M_{32}, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\omega_0$  – орбитальная скорость;  $M_{31}, M_{32}, M_{33}$  – элементы матрицы направляющих косинусов.

Выражения для проекций аэродинамического момента имеют вид:

$$\begin{cases} M_{ax} = Q(U_y M_{13} - U_z M_{12}); \\ M_{ay} = Q(U_z M_{11} - U_x M_{13}); \\ M_{az} = Q(U_x M_{12} - U_y M_{11}), \end{cases} \quad (8)$$

где  $Q$  – модуль силы аэродинамического сопротивления;  $U_x, U_y, U_z$  – координаты центра давления относительно центра масс в ССК;  $M_{11}, M_{12}, M_{13}$  – элементы матрицы направляющих косинусов.

Матрица направляющих косинусов выражается через нормированный кватернион ориентации  $\Lambda = (q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3)$  следующим образом:

$$M = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(q_0 q_3 + q_1 q_2) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

К контролируемым параметрам относятся векторы изменения скорости и импульса момента сил. Вектор изменения скорости вычисляется как разница между вектором скорости наноспутника в ОСК в момент  $T$  после приложения импульса тяги и вектором скорости до приложения импульса тяги в ОСК:

$$\Delta V^o = V_T^o - V_0^o, \quad (10)$$

где  $V_T^o$  – вектор конечной скорости в ОСК,  $V_0^o$  – вектор начальной скорости в ОСК.

Поскольку при моделировании движения центра масс используется ГСК, вектор начальной скорости (до выдачи импульса) в орбитальной системе координат определяется с помощью матрицы перехода  $B$  по формуле:

$$V_0^o = B V_0^G, \quad (11)$$

где  $B$  – матрица перехода из ГСК в ОСК;  $V_0^G$  – вектор начальной скорости в ГСК.

Матрица  $B$  определяется из выражения (1).

Скорость наноспутника в ОСК после выдачи импульса  $V_T^o$  определяется аналогично:

$$V_T^o = B V_T^G, \quad (12)$$

где  $V_T^G$  – вектор скорости наноспутника в ГСК после выдачи импульса.

Вектор импульса момента вычисляется с помощью выражения:

$$L = \int_0^{T_0+T_1+T_2} M_{\Sigma} dt, \quad (13)$$

где  $M_{\Sigma}$  – вектор моментов сил, включающий в себя гравитационный и аэродинамический моменты, а также возмущающий момент, возникающий при выдаче импульса тяги.

В перечень проектных параметров ЭТДУ, вероятностные модели которых учитываются, входят следующие: радиус критического сечения сопла, температура газа на входе в сопло, длительности участков профиля силы тяги, угловое отклонение сопла от продольной оси, массогабаритные параметры элементов системы хранения и подачи РТ, к которым относятся параметры бака для хранения РТ, поршня и пружин для поддержания давления РТ (общее число учитываемых проектных параметров равно 23). Проектные параметры считаются независимыми друг от друга случайными величинами, распределёнными по равновероятному закону с заданными границами изменения реализаций.

Описанный выше комплекс математических моделей используется при моделировании процесса проведения корректирующих манёвров для наноспутника с ЭТДУ и оценивания результатов коррекции для выделения группы факторов, оказывающих наибольшее влияние на погрешность формирования корректирующего импульса.

### Методика исследования влияния производственных отклонений изготовления двигательной установки на характер движения наноспутника

Исследование влияния производственных отклонений изготовления двигательной установки на характер движения НС состоит из нескольких этапов.

Блок-схема предлагаемой методики исследования влияния производственных отклонений изготовления двигательной установки на характер движения наноспутника и формирования требований к проектным параметрам ЭТДУ и её монтажа приведена на рис. 2

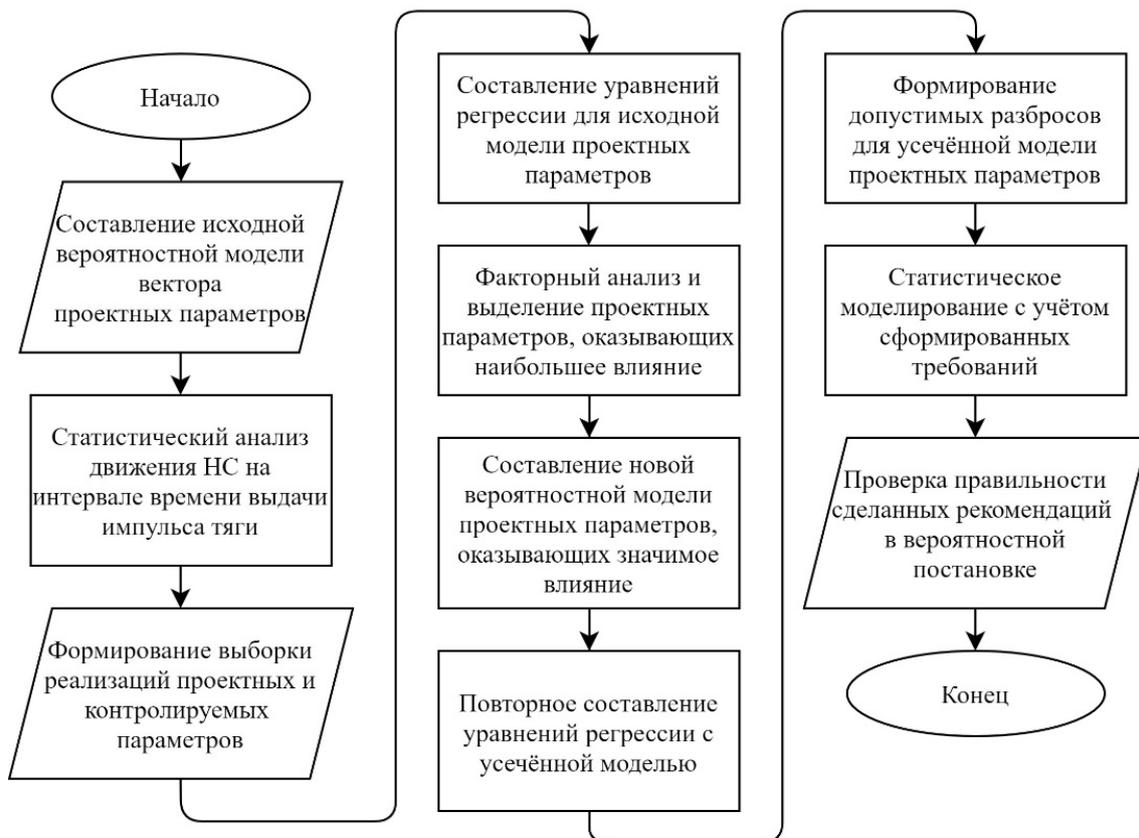


Рис. 2. Блок-схема методики исследования влияния производственных отклонений изготовления двигательной установки на характер движения наноспутника и формирования требований к проектным параметрам ЭТДУ и её монтажа на НС

На первом этапе формируется вероятностная математическая модель проектных параметров, которые являются случайными факторами при проведении численного моделирования. Задаются параметры законов распределения случайных факторов с учётом возможностей технологического процесса изготовления двигательной установки и особенностей её функционирования. Формируется перечень контролируемых параметров, в который входят величины, позволяющие оценить эффективность выполнения корректирующего манёвра. К контролируемым параметрам относятся вектор изменения скорости, вектор импульса моментов сил и вектор скорости изменения углов ориентации НС на момент завершения выдачи импульса тяги.

На втором этапе происходит формирование выборки реализаций в рамках метода Монте-Карло [17]. Для этого проводится серия статистических моделирований движения НС на интервале работы двигательной установки.

Далее по результатам накопленной выборки реализаций строятся линейные уравнения регрессии вида с проверкой их адекватности [9].

$$y = Gx + b, \tag{14}$$

где  $y$  – вектор-столбец контролируемых параметров размерности  $m$ ;  $G = [g_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}]$  – матрица коэффициентов уравнений регрессии;  $x$  – вектор-столбец проектных параметров размерности  $n$ ;  $b$  – вектор-столбец коэффициентов при фиктивных переменных размерности  $m$ .

С использованием построенных регрессионных моделей выполняется факторный анализ [10], в результате которого выделяются значимые факторы и оценивается их вклад в формирование разбросов контролируемых параметров. Процент влияния в формировании каждого из контролируемых параметров можно вычислить по формуле:

$$O_i(x_j) = 100 \frac{g_{ij}^2 D_j}{\sum_{k=1}^m g_{ik}^2 D_k}, \tag{15}$$

где  $O_i(x_j)$  – оценка влияния фактора  $x_j$  на контролируемый параметр  $y_i$ , выраженная в процентах;  $g_{ij}$  – коэффициент уравнения регрессии, относящийся к фактору  $x_j$  для  $i$ -го уравнения регрессии;  $D_j$  – дисперсия фактора  $x_j$ ;  $i = \overline{1, n}$ , где  $n$  – размерность вектора контролируемых параметров;  $j = \overline{1, m}$ , где  $m$  – количество факторов регрессионной модели.

Разбросы проектных параметров, оказавшие незначительное влияние на контролируемые параметры, отбрасываются из дальнейшего рассмотрения. Для факторов, в значительной мере влияющих на разбросы контролируемых параметров, составляются уточнённые регрессионные модели.

Далее на основе регрессионных моделей составляется система неравенств, которые позволяют сформировать требования к вектору проектных параметров  $x$ , при которых значение вектора контролируемых параметров  $y$  будет соответствовать предъявленным требованиям к эффективности коррекции и ограничениям на допустимые возмущения, вносимые в динамику движения НС:

$$y_{\min} \leq Gx + b \leq y_{\max},$$

где  $y_{\min}$ ,  $y_{\max}$  – векторы размерности  $m$ , содержащие предельные значения контролируемых параметров.

### Результаты применения методики на примере наноспутника SamSat-M с электротермической двигательной установкой

На межвузовской кафедре космических исследований Самарского университета в соответствии с современными тенденциями в области проектирования и создания научно-образовательных спутников был разработан блок маневрирования для НС стандарта CubeSat – SamSat-M [14]. В разработанном блоке маневрирования используется ЭТДУ с жидким РТ, включающая бак с вытеснительной системой подачи РТ, распределитель, осуществляющий дозирование и подачу РТ в рабочую область, и нагреватель, осуществляющий испарение и перегрев пара РТ до выбранной температуры и направляющий его к соплу.

В качестве РТ выбрана смесь дистиллированной воды и этилового спирта, что обеспечивает экологическую безопасность, которая является необходимым требованием для наземной обработки и доставки НС на МКС с целью последующего запуска.

Экспериментально определены характеристики ЭТДУ: удельный импульс 120 с, тяга 0,1 Н, величина одного импульса коррекции для наноспутника массой 4,5 кг составляет не менее 0,1 м/с, запас характеристической скорости при массе РТ 180 г составляет не менее 50 м/с. Внешний вид блока маневрирования показан на рис. 3.

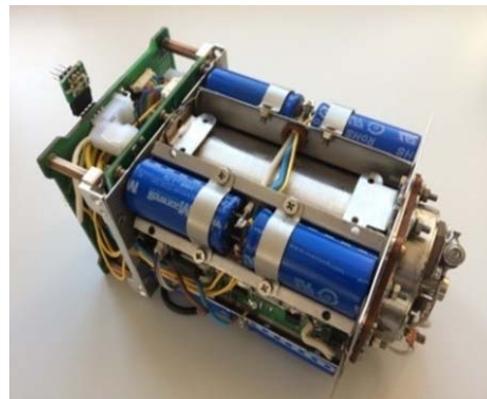


Рис. 3. Внешний вид блока маневрирования

После проведения факторного анализа и оставления проектных параметров, оказывающих существенное влияние на контролируемые выходные параметры, вектор входных параметров уменьшился до 6: радиус критического сечения сопла, температура газа на входе в сопло, длительность роста тяги, длительность затухания тяги, угловые отклонения продольной оси сопла от продольной оси НС в плоскостях  $X_1OY_1$  и  $X_1OZ_1$ . Доля влияния отброшенных 17 проектных параметров на показатели эффективности коррекции составляет не более 0,1%.

Номинальные значения проектных параметров ЭТДУ для SamSat-M и их разбросы, отражающие допуски производственных отклонений изготовления, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Допуски производственных отклонений изготовления проектных параметров НС с ЭТДУ

Параметр	Значение
Радиус критического сечения сопла, мм	$0,2 \pm 0,05$
Температура газа на входе в сопло, К	$900 \pm 50$
Длительность роста тяги, с	$1,75 \pm 0,25$
Длительность затухания тяги, с	$1,75 \pm 0,25$
Угловое отклонение продольной оси сопла от продольной оси НС в плоскости $X_1OY_1$ , градусы	$0 \pm 0,5$
Угловое отклонение продольной оси сопла от продольной оси НС в плоскости $X_1OZ_1$ , градусы	$0 \pm 0,5$

В результате статистического моделирования получены гистограммы относительных частот распределения проекций вектора изменения скорости, которые показаны на рис. 4. Для получения гистограмм проводилась серия статистических испытаний с объёмом выборки 40000, что приблизительно соответствует 0,5% точности получения вероятностных оценок. Вектор изменения скорости определялся с помощью соотношений (10) – (12).

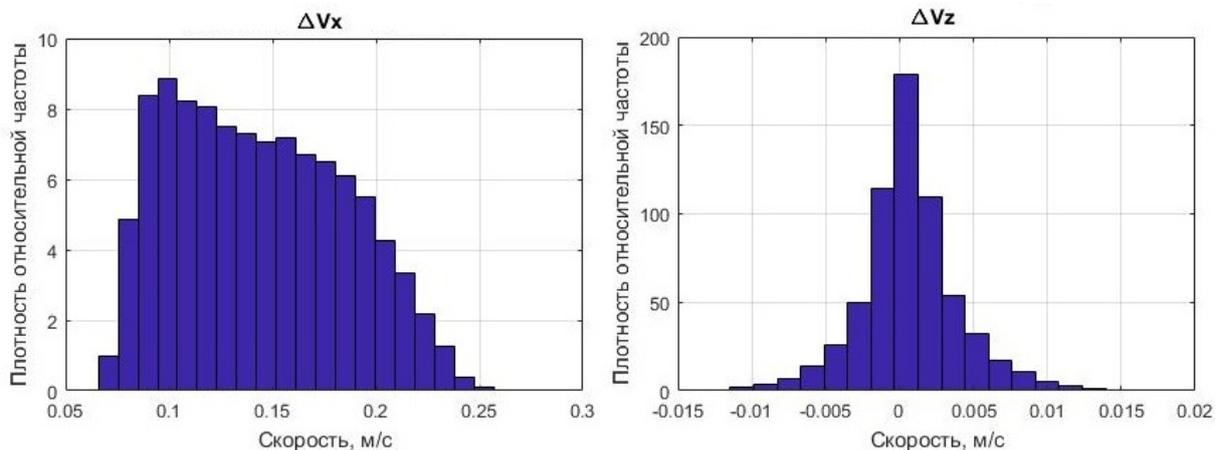


Рис. 4. Гистограммы относительных частот проекций вектора изменения скорости в ОСК

Видно, что при выдаче разгонного импульса изменение скорости по оси  $Ox$  не превышает 25 см/с, математическое ожидание равно 13 см/с, среднеквадратическое отклонение 4 см/с. Распределение изменения скорости  $\Delta V_x$  по бинормали к орбите имеет вид, близкий к нормальному, и имеет следующие характеристики: модуль математического ожидания 0,4 мм/с, среднеквадратическое отклонение 1,6 мм/с. Отметим, что изменение скорости по оси  $Oy$  в ОСК (ось направлена вдоль местной вертикали) оказалось крайне незначительным. Поэтому на круговой орбите радиальная скорость практически не изменяется.

К моменту окончания выдачи импульса тяги формируются угловые скорости, значения которых изменяются в зависимости от реализации комбинации проектных параметров. Гистограммы относительных частот угловых скоростей, приобретаемых в результате корректирующего импульса, показаны на рис. 5.

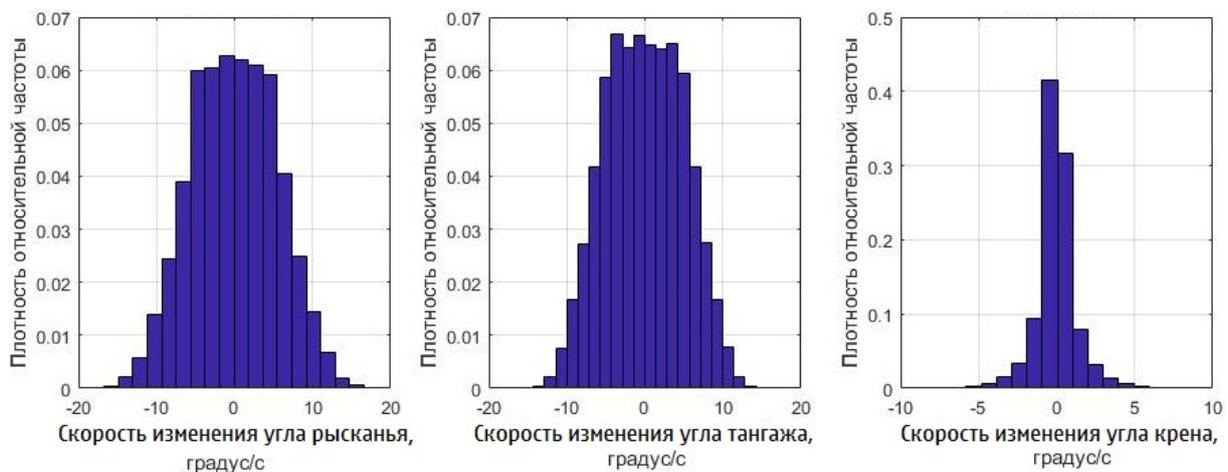


Рис. 5. Гистограммы относительных частот конечных скоростей изменения углов ориентации

При идеальном совмещении продольной оси НС, проходящей через его центр масс, и линии приложения силы тяги угловые скорости не возникают. Однако как видно из рис. 4, случайное распределение проектных параметров приводит к разбросам угловых скоростей, приобретаемых НС во время работы ЭТДУ. Среднеквадратические отклонения конечных угловых скоростей существенны, поэтому они оказывают сильное влияние на проекции вектора изменения скорости, а следовательно на эффективность коррекции орбиты.

Для повышения эффективности коррекции необходимо ужесточить требования к допускам производственных отклонений изготовления и монтажа ЭТДУ на НС, то есть задать повышенные требования к разбросам выделенных проектных параметров или создать дополнительные исполнительные устройства, позволяющие поддерживать ориентацию вектора тяги на протяжении всего времени выдачи корректирующего импульса.

По полученной выборке реализаций были построены новые линейные уравнения регрессии, коэффициенты которых представлены в табл. 2.

Таблица 2. Коэффициенты линейных уравнений регрессии

Фактор	$\Delta V_x$	$\Delta V_z$	$L_y$	$L_z$	$\psi_T$	$\dot{\vartheta}_T$
Коэффициент при фиктивной переменной	5,57e+5 м/с	-2,10e-3 м/с	-8,35e-6 Н·м·с	4,49e-6 Н·м·с	4,80e-2 градус/с	-1,72e-1 градус/с
Угловое отклонение в плоскости $X_1OY_1$	4,86e-6 м·с <sup>-1</sup> градус <sup>-1</sup>	-2,00e-1 м·с <sup>-1</sup> градус <sup>-1</sup>	-6,99e-2 Н·м·с/градус	6,99e-2 Н·м·с/градус	8,48e+2 с <sup>-1</sup>	2,51e-1 с <sup>-1</sup>
Угловое отклонение в плоскости $X_1OZ_1$	-1,84e-3 м·с <sup>-1</sup> градус <sup>-1</sup>	1,98e-4 м·с <sup>-1</sup> градус <sup>-1</sup>	1,62e-05 Н·м·с/градус	-1,63e-5 Н·м·с/градус	-9,60e-2 с <sup>-1</sup>	-8,68e+2 с <sup>-1</sup>
Радиус критического сечения сопла	1,21e+3 с <sup>-1</sup>	4,32e+0 с <sup>-1</sup>	1,63e-2 Н·с	-2,98e-2 Н·с	-3,24e+2 градус·м <sup>-1</sup> с <sup>-1</sup>	1,48e+2 градус·м <sup>-1</sup> с <sup>-1</sup>
Температура РТ	1,39e-4 м·с <sup>-1</sup> К <sup>-1</sup>	4,48e-7 м·с <sup>-1</sup> К <sup>-1</sup>	4,47e-9 Н·м·с/К	5,95e-9 Н·м·с/К	6,70e-5 градус·К <sup>-1</sup> с <sup>-1</sup>	7,33e-5 градус·К <sup>-1</sup> с <sup>-1</sup>
Длительность роста тяги	8,43e-2 м/с <sup>2</sup>	-7,44e-3 м/с <sup>2</sup>	6,11e-7 Н·м	-2,50e-6 Н·м	-2,84e-2 градус/с <sup>2</sup>	4,78e-3 градус/с <sup>2</sup>
Длительность затухания тяги	3,43e-3 м/с <sup>2</sup>	-7,51e-3 м/с <sup>2</sup>	-9,15e-9 Н·м	-4,02e-7 Н·м	-3,55e-3 градус/с <sup>2</sup>	3,94e-4 градус/с <sup>2</sup>
Критерий адекватности Фишера	5,57e+5	7,09e+4	4,25e+5	4,27e+5	4,42e+5	3,86e+5

С использованием представленных выше уравнений был вновь проведен факторный анализ для выделения проектных параметров, оказывающих наибольшее влияние на разброс контролируемых параметров. По формуле (15) оценивались влияния дисперсий проектных параметров на дисперсии контролируемых параметров в предположении, что проектные параметры являются независимыми случайными величинами. Факторный анализ показал, что на вектор изменения скорости преобладающий вклад в разбросы вносит радиус критического сечения сопла (более 75% вклада) и угловое отклонение сопла от продольной оси (около 23% вклада). На движение относительно

центра масс оказывают наибольшее влияние угол отклонения сопла от продольной оси (более 85% вклада) и радиус критического сечения (около 14% вклада).

Записывая регрессионные модели в виде неравенств, в левой части которых стоят предельные значения контролируемых параметров (приведены в табл. 3), можно сформулировать повышенные требования к погрешностям проектных параметров ЭТДУ.

Таблица 3. Предельные значения контролируемых параметров

Параметр	Значение
$ \Delta V_x^{\min} $	0,1 м/с
$ \Delta V_z^{\max} $	0,01 м/с
$ L_y^{\max} ,  L_z^{\max} $	0,1 мН·м·с
$ \dot{\psi}_z^{\max} ,  \dot{g}_z^{\max} $	1 градус/с

Предельные значения контролируемых параметров в табл. 3 определяются требованиями технического задания и целевым назначением НС. В данной работе они определялись исходя из предположения о необходимости обеспечения группового полёта, в котором SamSat-M является одним из участников группировки.

Найденные повышенные требования к погрешностям проектных параметров ЭТДУ приведены в табл. 4.

Таблица 4. Повышенные требования к погрешностям проектных параметров ЭТДУ

Параметр	Значение
Радиус критического сечения сопла, мм	$0,2 \pm 0,04$
Температура газа на входе в сопло, К	$900 \pm 30$
Длительность роста тяги, с	$1,75 \pm 0,25$
Длительность затухания тяги, с	$1,75 \pm 0,25$
Угловое отклонение продольной оси сопла от продольной оси НС в плоскости $X_1OY_1$ , градусы	$0 \pm 0,05$
Угловое отклонение продольной оси сопла от продольной оси НС в плоскости $X_1OZ_1$ , градусы	$0 \pm 0,05$

Результаты моделирования с учётом повышенных требований к погрешностям проектных параметров приведены на рис. 6.

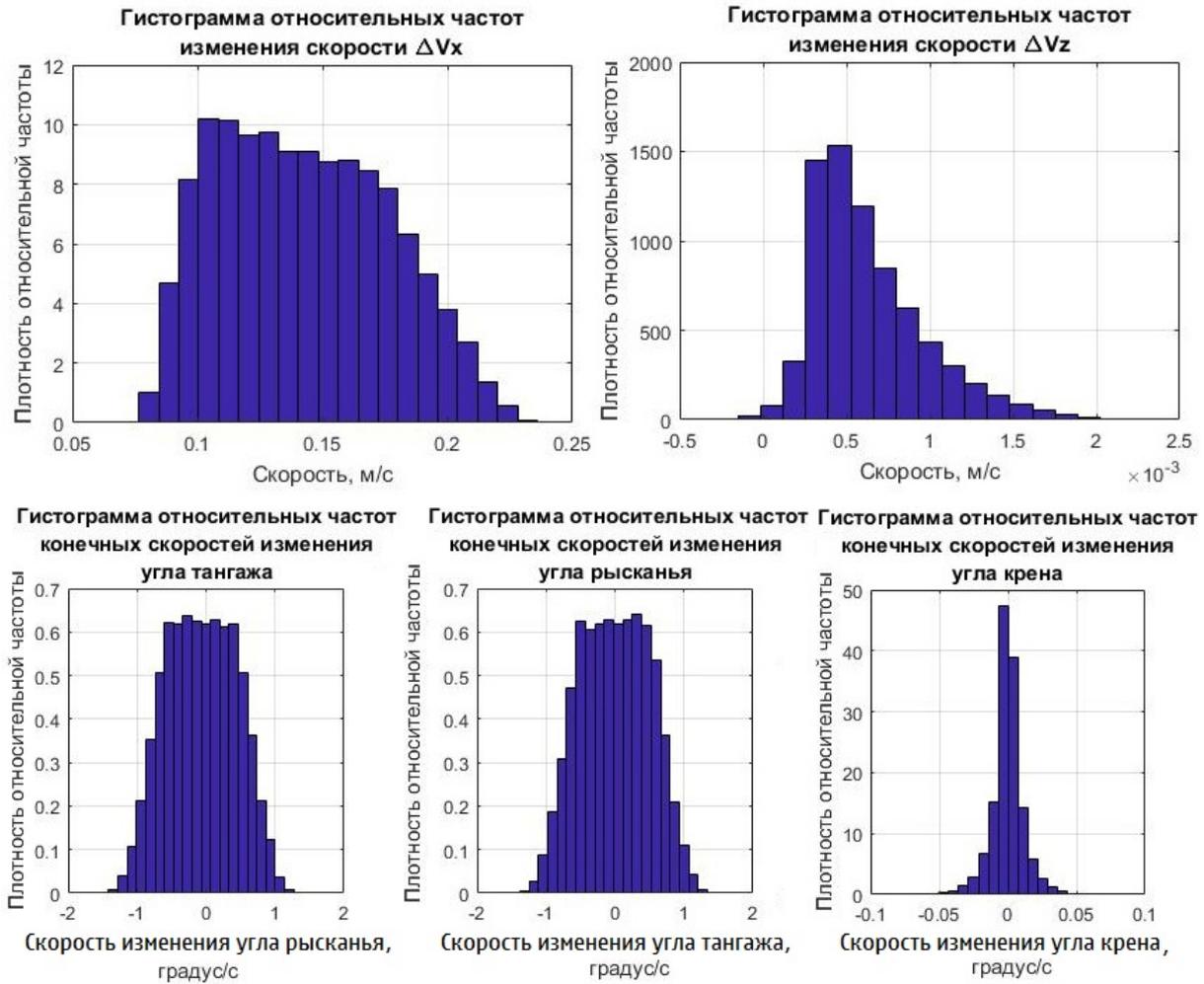


Рис. 6. Гистограммы относительных частот проекций вектора изменения скорости и конечных угловых скоростей НС при повышении требований к погрешностям проектных параметров ЭТДУ

При сравнении рис. 4, 5 с рис. 6 можно наблюдать значительный выигрыш в приросте полезной составляющей вектора изменения скорости (проекция  $\Delta V_x$ ) при значительном уменьшении разбросов поперечной составляющей изменения скорости и возникающих угловых скоростей. При выдаче корректирующего импульса математическое ожидание изменения скорости по оси  $OX$  равно 17 см/с (до ужесточения требований было 13 см/с). Среднеквадратическое отклонение изменения скорости  $\Delta V_z$  относительно нуля составило 0,5 мм/с (было 1,6 мм/с). Разбросы конечных угловых скоростей относительно поперечных осей снизились практически на порядок: среднеквадратические отклонения стали равны 0,6 градус/с, в то время как до повышения требований они составляли 7 градус/с.

### Заключение

Предложена методика оценки результатов проведения манёвров коррекции наноспутника (НС) с электротермической двигательной установкой в вероятностной постановке. Выполнен вероятностный анализ процесса маневрирования наноспутника. Исследовано влияние производственных отклонений изготовления электротермической

двигательной установки на ошибки маневрирования НС и характер его движения после коррекции.

Предложенная методика может быть использована для формирования требований к разбросам проектных параметров для обеспечения выполнения целевой задачи маневрирования с требуемым качеством.

Применение предложенной методики продемонстрировано на примере НС с ЭТДУ SamSat-M, разработанного на межвузовской кафедре космических исследований Самарского университета.

Для НС SamSat-M построены регрессионные модели, которые позволили выявить проектные параметры, разбросы которых оказывают значимое влияние на результативность манёвра коррекции траектории. Как показал факторный анализ, «размазывание» изменения скорости вдоль направления движения практически полностью определяется производственными отклонениями изготовления критического сечения сопла ЭТДУ (более 75% вклада). Во время выдачи импульса тяги НС закручивается относительно центра масс, вследствие чего приобретает составляющая вектора силы тяги, лежащая вне плоскости орбиты. Закрутка относительно поперечных осей обусловлена разбросами углового отклонения сопла от продольной оси НС (более 85% вклада).

Для осуществления эффективной коррекции орбиты сформированы требования к допускам производственных отклонений изготовления ЭТДУ, а именно: к погрешности несоосности сопла относительно продольной оси НС (не более 0,06 градусов), погрешности создания критического сечения сопла (более 0,04 мм), погрешности нагрева рабочего тела в пределах 30 К относительно проектного значения нагрева в 900 К.

Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России.

### **Библиографический список**

1. Sochacki M., Narkiewicz J. Propulsion system modelling for multi-satellite missions performed by nanosatellites // Transactions on Aerospace Research. 2018. V. 2018, Iss. 4. P. 58-67. DOI: 10.2478/tar-2018-0030
2. Tummala A.R., Dutta A. An overview of cube-satellite propulsion technologies and trends // Aerospace. 2017. V. 4, Iss. 4. DOI: 10.3390/aerospace4040058
3. Лукьянчик А.И. Параметрические исследования маневрирующего наноспутника с аммиачным электротермическим микродвигателем // Информация и космос. 2018. № 3. С. 157-166.
4. Coxhill I.G., Gibbon D. A xenon resistojet propulsion system for microsatellites // 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit (July, 10-13, 2005, Tucson, Arizona). DOI: 10.2514/6.2005-4260
5. Lee R.H., Bauer A.M., Killingsworth M.D., Lilly T.C., Duncan J.A., Ketsdever A.D. Free-molecule-microresistojet performance using water propellant for nanosatellite applications // Journal of Spacecraft and Rockets. 2008. V. 45, Iss. 2. P. 264-269. DOI: 10.2514/1.32341
6. Lemmer K. Propulsion for CubeSats // Acta Astronautica. 2017. V. 134. P. 231-243. DOI: 10.1016/j.actaastro.2017.01.048
7. Блинов В.Н., Вавилов И.С., Косицын В.В., Лукьянчик А.И., Рубан В.И., Шалай В.В. Исследование энерговооружённости электротермической двигательной установки маневрирующей спутниковой платформы наноспутников // Динамика

систем, механизмов и машин. 2017. Т. 5, № 2. С. 4-16. DOI: 10.25206/2310-9793-2017-5-2-04-16

8. Жумаев З.С., Щеглов Г.А. Анализ проектных параметров солнечной электродвигательной установки для наноспутника // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2012. № 12. С. 59-65.

9. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1986. 366 с.

10. Харман Г. Современный факторный анализ. М.: Статистика, 1972. 489 с.

11. Мантуров А.И. Механика управления движением космических аппаратов. Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2003. 62 с.

12. Попов В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1986. 184 с.

13. Иванов Д.С., Трофимов С.П., Широбоков М.Г. Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 118 с. DOI: 10.20948/mono-2016-trofimov

14. Белоконов И.В., Ивлиев А.В., Богатырев А.М., Кумарин А.А., Ломака И.А., Симаков С.П. Выбор проектного облика двигательной установки наноспутника // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. Т. 18, № 3. С. 29-37. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-3-29-37

15. Титов Б.А., Сирант А.Л. Исследование динамики космического аппарата с системой ориентации на базе двухкомпонентных жидкостных ракетных двигателей малой тяги // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. 2007. № 1 (12). С. 98-105. DOI: 10.18287/2541-7533-2007-0-1(12)-98-105

16. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 39. 36 с.

17. Семёнов К.К. Достоверность результатов применения метода Монте-Карло в задачах интервального анализа // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 2. С. 42-52.

## INFLUENCE OF DEVIATIONS IN MANUFACTURING OF ELECTROTHERMAL PROPULSION SYSTEM ON NANOSATELLITE MANEUVERING ACCURACY

© 2021

**L. I. Sinitsin**

Postgraduate Student;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[sinitsin\\_leonid@mail.ru](mailto:sinitsin_leonid@mail.ru)

**I. V. Belokonov**

Doctor of Science (Engineering), Professor, Head of Inter-University  
Department of Space Research;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[ibelokonov@mail.ru](mailto:ibelokonov@mail.ru)

A method is proposed for assessing the results of adjustment maneuvers for a nanosatellite (NS) with an electrothermal propulsion system (ETPS). Using the example of the SamSat-M nanosatellite under development, common causes of maneuvering errors associated with deviations in the manufacturing of the propulsion system are revealed. Probabilistic analysis of the NS maneuvering process was carried out. The design parameters of the ETPS are considered as random factors. Statistical models of the distributions of all random factors are assumed to be equally probable, which is the worst-case scenario, since the true distributions of the design parameters of the ETPS are unknown. The

methodological basis of the study is the method of statistical modeling (Monte Carlo method) followed by the use of regression and factor analysis, on the basis of which the influence of the scatter of each of the design parameters on the controlled parameters is determined. Requirements for the design parameters of the ETPS that affect the spread of the projections of the velocity growth vector of the NS and the arising angular motion have been formulated. The presented results can be used to assess the influence of production deviations in the design parameters of propulsion systems on the nature of spacecraft motion, as well as to state requirements for the spread of design parameters to ensure the achievement of the objective.

*Nanosatellite; electrothermal propulsion system; stochastic model of motion; Monte Carlo method; factor analysis; regression equation; orbit correction*

---

*Citation:* Sinitin L.I., Belokonov I.V. Influence of deviations in manufacturing of electrothermal propulsion system on nanosatellite maneuvering accuracy. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2021. V. 20, no. 1. P. 29-45. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-29-45

## References

1. Sochacki M., Narkiewicz J. Propulsion system modelling for multi-satellite missions performed by nanosatellites. *Transactions on Aerospace Research*. 2018. V. 2018, Iss. 4. P. 58-67. DOI: 10.2478/tar-2018-0030
2. Tummala A.R., Dutta A. An overview of cube-satellite propulsion technologies and trends. *Aerospace*. 2017. V. 4, Iss. 4. DOI: 10.3390/aerospace4040058
3. Lukyanchik A. Parametrical studies of a maneuvering ammonia resistojet nanosatellite. *Information and Space*. 2018. No. 3. P. 157-166. (In Russ.)
4. Coxhill I.G., Gibbon D. A xenon resistojet propulsion system for microsattellites. *41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit (July, 10-13, 2005, Tucson, Arizona)*. DOI: 10.2514/6.2005-4260
5. Lee R.H., Bauer A.M., Killingsworth M.D., Lilly T.C., Duncan J.A., Ketsdever A.D. Free-molecule-microresistojet performance using water propellant for nanosatellite applications. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2008. V. 45, Iss. 2. P. 264-269. DOI: 10.2514/1.32341
6. Lemmer K. Propulsion for CubeSats. *Acta Astronautica*. 2017. V. 134. P. 231-243. DOI: 10.1016/j.actaastro.2017.01.048
7. Blinov V.N., Vavilov I.S., Kositsyn V.V., Lukyanchik A.I., Ruban V.I., Shalay V.V. Study of power-to-weight ratio of the electrothermal propulsion system of nanosatellite maneuvering satellite platform. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines*. 2017. V. 5, no. 2. P. 4-16. (In Russ.). DOI: 10.25206/2310-9793-2017-5-2-04-16
8. Zhumayev Z.S., Shcheglov G.A. Analysis of design parameters of solar power propulsion systems for nano-satellite. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*. 2012. No. 12. C. 59-65. (In Russ.)
9. Draper N.R., Smith H. Applied regression analysis. New York: Wiley, 1981. 709 p.
10. Harman H.H. Modern factor analysis. The University of Chicago Press, 1960. 400 p.
11. Manturov A.I. *Mekhanika upravleniya dvizheniyem kosmicheskikh apparatov* [Mechanics of spacecraft motion control]. Samara: Samara State Aerospace University Publ., 2003. 62 p.
12. Popov V.I. *Sistemy oriyentatsii i stabilizatsii kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft orientation and stabilization systems]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1986. 184 p.
13. Ivanov D.S., Trofimov S.P., Shirobokov M.G. *Chislennoye modelirovaniye orbitalnogo i uglovogo dvizheniya kosmicheskikh apparatov* [Numerical modeling of spacecraft orbital and angular motion]. Moscow: IPM im. M.V. Keldysha Publ., 2016. 118 p. DOI: 10.20948/mono-2016-trofimov

14. Belokonov I.V., Ivliev A.V., Bogatyrev A.M., Kumarin A.A., Lomaka I.A., Simakov S.P. Selection of project structure for nanosatellite propulsion system. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2019. V. 18, no. 3. P. 29-37. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-3-29-37
15. Titov B.A., Sirant A.L. Investigating the dynamics of space vehicles with an attitude control system on the basis of two-component liquid propellant low-thrust rocket engines. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2007. No. 1. P. 98-105. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2007-0-1(12)-98-105
16. Sarychev V.A., Gutnik S.A. Dynamics of satellite subject to gravitational and aerodynamic torques. Investigation of equilibria. *Keldysh Institute Preprints*. 2014. No. 39. 36 p. (In Russ.)
17. Semenov K.K. The reliability of Monte-Carlo approach for applications in the interval analysis problems. *Journal of Computational Technologies*. 2016. V. 21, no. 2. P. 42-52. (In Russ.)

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С УЧЁТОМ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

© 2021

**А. Ф. Шориков** доктор физико-математических наук, профессор;  
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского  
Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург;  
[afshorikov@mail.ru](mailto:afshorikov@mail.ru)

**А. Ю. Горанов** ассистент; Уральский федеральный университет имени первого  
Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург;  
инженер-конструктор; НПО автоматики им. академика Н.А. Семихатова,  
г. Екатеринбург;  
[goranovayu@mail.ru](mailto:goranovayu@mail.ru)

Предлагается алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления сближением двух космических аппаратов (КА) с ограничениями на их фазовые состояния. В качестве исходной модели рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая динамику активного КА (маневрирующего КА) относительно пассивного КА (станции) в центральном поле тяготения Земли в орбитальной системе координат, связанной с центром масс пассивного КА. Сформированная нелинейная модель динамики активного КА линеаризуется относительно заданной опорной фазовой траектории пассивного КА, а затем дискретизируется и приводится к линейному рекуррентному виду. Для сформированной аппроксимирующей линейной дискретной управляемой динамической системы приводится математическая формализация рассматриваемой задачи сближения двух КА в заданный финальный момент времени, качество решения которой оценивается соответствующим выпуклым терминальным функционалом, с учётом наличия геометрических ограничений на фазовые состояния активного КА и управляющие воздействия, связанные с ним, в виде выпуклых многогранников-компактов в соответствующем конечномерном векторном пространстве. На основе общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости линейных дискретных управляемых динамических систем, учитывающего заданные условия и ограничения, а также используя метод прямых и обратных конструкций, в работе предлагается решение задачи оптимального программного терминального управления сближением активного КА с пассивным КА в виде конструктивного алгоритма. В заключительной части статьи приводятся результаты компьютерного моделирования и делаются выводы об эффективности разработанного алгоритма.

*Оптимальное управление; программное управление; терминальное управление; сближение космических аппаратов; области достижимости*

---

*Цитирование:* Шориков А.Ф., Горанов А.Ю. Алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления сближением космических аппаратов с учётом фазовых ограничений // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 1. С. 46-64.  
DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-46-64

### Введение

Проблема управления сближением космических аппаратов (КА) на околоземной орбите или орбите другого небесного тела представляет собой одну из важнейших научно-технических задач космонавтики. При этом в качестве цели процесса управления может быть сближение двух КА, когда отсутствует заданное ограничение на значение относительной скорости между аппаратами в финальный момент времени, или необходима встреча, когда финальная относительная скорость должна быть достаточно мала.

В данной статье рассматривается случай, в котором предполагается, что все необходимые манёвры по сближению аппаратов выполняет активный КА (маневрирующий КА), который для изменения своей траектории имеет двигательную установку с достаточным запасом топлива. Другой КА в процессе сближения не маневрирует и называется пассивным КА (станцией). Желаемым результатом процесса управления активным КА является его сближение с пассивным КА в заданный финальный момент времени при обеспечении наименьших, т.е. минимальных, значений их относительных дальности и скоростей.

Решению задачи оптимального управления сближением КА, начиная с 60-х годов XX века, было посвящено большое количество работ, среди которых можно выделить, например, работы [1 – 4]. С точки зрения математического описания эти подходы к решению задачи оптимального терминального сближения КА при заданных ограничениях классифицируются как детерминированные, стохастические и игровые (конфликтные). Детерминированному подходу отвечает математическая модель движения КА, в которой связь между параметрами движения и временем однозначна [1 – 4]. В стохастических моделях связь между входными и выходными параметрами движения КА известна только приближённо и зависит от качества известных вероятностных характеристик параметров, определяющих движение КА. Игровые модели отражают круг ситуаций при управлении движением КА, когда этот процесс протекает в условиях конфликта или при наличии информационной неопределённости и неконтролируемых возмущений [5 – 8; 11]. Каждый из перечисленных подходов предполагает применение соответствующих теоретических моделей и методов, наилучшим образом отвечающих возможностям и уровню информированности субъектов управления о текущем абсолютном или относительном фазовом состоянии рассматриваемых КА, а также имеющимся условиям и ограничениям на процесс сближения КА в рамках соответствующей математической модели.

Отметим, что большинство существующих подходов к решению задач оптимального управления динамическими объектами в условиях неопределённости базируются на аппарате стохастического моделирования, при применении которого требуется информация о вероятностных характеристиках основных параметров управляемого объекта, а также выполнение очень жёстких требований к условиям реализации рассматриваемого процесса управления, которые, чаще всего, оказываются невыполнимыми. Предлагаемый в работе детерминированный подход к решению задачи оптимального программного терминального управления сближением КА базируется на применении аппарата построения и анализа точных *областей достижимости* [5 – 8; 11] линейных дискретных управляемых динамических систем при наличии геометрических ограничений на априори неопределённые параметры в виде выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) в соответствующих конечномерных векторных пространствах.

В данной статье описывается применение детерминированного подхода к решению задачи оптимального программного терминального управления сближением двух КА, основанного на результатах, представленных в работах [9 – 13]. В этом подходе предполагается, что управляемые и неопределённые априори параметры системы принимают свои значения из некоторых известных множеств, имеющих вид выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) в соответствующих конечномерных векторных пространствах. В качестве исходной модели рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая динамику активного КА относительно пассивного КА в центральном поле тяготения Земли в орбитальной системе координат, связанной с центром масс пассивного КА. Сформированная нелинейная модель динамики активного КА линеаризуется относительно заданной опорной

фазовой траектории пассивного КА, а затем дискретизируется и приводится к линейному рекуррентному виду [14]. Для сформированной аппроксимирующей линейной дискретной управляемой динамической системы приводится математическая формализация рассматриваемой задачи сближения двух КА в заданный финальный момент времени, качество решения которой оценивается соответствующим выпуклым терминальным функционалом, с учётом наличия ограничений на фазовые состояния активного КА и управляющие воздействия, связанные с ним, в виде выпуклых многогранников-компактов в соответствующих конечномерных векторных пространствах.

Предлагаемое решение задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА для сформированной линейной дискретной управляемой динамической системы основывается на *методе прямых и обратных конструкций* (Шориков А.Ф., 1986), описанном в работах [9 – 13], базирующемся на *общем рекуррентном алгебраическом методе* построения прямых и обратных областей достижимости (Шориков А.Ф., 1986) для рассматриваемых динамических систем [9 – 11], который имеет вид конструктивного алгоритма. Предлагаемый алгоритм решения рассматриваемой задачи сближения двух КА с ограничениями на фазовые состояния реализуется в виде конечной последовательности одношаговых операций, состоящих из решений: задач линейного математического программирования, вспомогательных конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, применения операции двойственного описания выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) в соответствующих конечномерных векторных пространствах, задачи выпуклого математического программирования, вспомогательных одношаговых краевых задач.

В данной статье для разработки алгоритма решения рассматриваемой задачи сближения КА, в части построения областей достижимости, используется *модификация общего рекуррентного алгебраического метода* построения областей достижимости, описанная в работе [14].

В заключительной части данной статьи на конкретном модельном примере продемонстрированы результаты применения разработанного алгоритма для решения задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА. Моделирование осуществлялось с использованием созданного авторами специализированного компьютерного программного комплекса в среде MATLAB.

### **Формирование математической модели**

Рассматривается дифференциальная модель движения двух материальных точек в центральном поле тяготения Земли, описывающая динамику двух КА. Предполагается, что пассивный КА не маневрирует, в то время как субъект управления активным КА – игрок  $P$  может корректировать его движение за счёт создания соответствующего управляющего воздействия.

На промежутке времени  $[0, T]$  ( $T$  – финальный момент времени для процесса управления,  $T \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}$  – множество всех натуральных чисел) рассматривается система дифференциальных уравнений относительного движения активного КА в орбитальной системе координат (ОСК), связанной с центром масс пассивного КА, имеющая следующий вид [1 – 4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_*(t) - 2\omega_n(t)\dot{y}_*(t) - \omega_n^2(t)x_*(t) - \dot{\omega}_n(t)y_*(t) + \\ \quad + r_n^2(t)\omega_n^2(t)p^{-1}\left(\sqrt{x_*^2(t) + (r_n(t) + y_*(t))^2 + z_*^2(t)}\right)^{-3} x_*(t) = a_{x_*}(t); \\ \ddot{y}_*(t) + 2\omega_n(t)\dot{x}_*(t) - \omega_n^2(t)y_*(t) + \dot{\omega}_n(t)x_*(t) - \\ \quad - r_n^2(t)\omega_n^2(t)p^{-1}\left(\sqrt{x_*^2(t) + (r_n(t) + y_*(t))^2 + z_*^2(t)}\right)^{-3} (r_n(t) + y_*(t)) = a_{y_*}(t); \\ \ddot{z}_*(t) + r_n^2(t)\omega_n^2(t)p^{-1}\left(\sqrt{x_*^2(t) + (r_n(t) + y_*(t))^2 + z_*^2(t)}\right)^{-3} z_*(t) = a_{z_*}(t), \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $t$  – непрерывное время;  $x_*(t)$ ,  $y_*(t)$ ,  $z_*(t)$  – декартовы геометрические координаты активного КА в ОСК;  $a_{x_*}(t)$ ,  $a_{y_*}(t)$ ,  $a_{z_*}(t)$  – проекции вектора относительного ускорения активного КА в ОСК;  $\omega_n(t)$  – угловая скорость вращения пассивного КА вокруг Земли;  $r_n(t)$  – радиус-вектор, соединяющий центр масс пассивного КА с центром масс Земли;  $p$  – фокальный параметр эллиптической орбиты пассивного КА;  $t \in [0, T]$ .

Система дифференциальных уравнений (1), описывающая относительное движение активного КА в ОСК, является нелинейной, что затрудняет её практическое использование. Вместе с тем, применение к полученной системе метода малых отклонений приводит к формированию модели, являющейся её линеаризацией относительно наперёд заданного движения пассивного КА, рассматриваемого как опорное движение (которое, по предположению, является допустимым, с заданной точностью, для активного КА) [1 – 4], которую можно представить с помощью системы уравнений Клохеси-Уилтшира вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_*(t) - 2\omega_n(t)\dot{y}_*(t) + \omega_n^2(t)(r_n(t)p^{-1} - 1)x_*(t) - \dot{\omega}_n(t)y_*(t) = \hat{a}u_{x_*}(t); \\ \ddot{y}_*(t) + 2\omega_n(t)\dot{x}_*(t) - 2\omega_n^2(t)(r_n(t)p^{-1} + 1)y_*(t) + \dot{\omega}_n(t)x_*(t) = \hat{a}u_{y_*}(t); \\ \ddot{z}_*(t) + \omega_n^2(t)r_n(t)p^{-1}z_*(t) = \hat{a}u_{z_*}(t). \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь  $(\hat{a}u_{x_*}(t), \hat{a}u_{y_*}(t), \hat{a}u_{z_*}(t)) = (a_{x_*}(t), a_{y_*}(t), a_{z_*}(t))$ , где  $u(t) = (u_{x_*}(t), u_{y_*}(t), u_{z_*}(t))$  – вектор управляющего воздействия (управления) игрока  $P$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^3$  (для  $n \in \mathbb{N}$ :  $\mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерное пространство векторов-столбцов);  $\hat{a}$  – значение управляющего ускорения активного КА, генерируемое в результате работы двигательной установки.

Сформированной системе линейных дифференциальных уравнений (2), описывающей относительное движение активного КА в ОСК, ставится в соответствие её дискретная аппроксимация, которая позволяет использовать цифровую вычислительную технику для реализации процесса управления сближением двух рассматриваемых КА.

Процесс перехода от линейной дифференциальной динамической модели (2) к соответствующей системе дискретных рекуррентных уравнений подробно описан в монографии [5] и основан на формировании решения векторного дискретного уравнения в форме Коши вида:

$$x(t+1) = \Phi(t+1, t)x(t) + \left[ \int_t^{t+1} \Phi(t+1, \tau)B(\tau)d\tau \right] u(t), \quad (3)$$

где  $t$  – целочисленный период времени,  $t \in \overline{0, T-1} = \{0, 1, \dots, T-1\}$ ;  $T$  – количество периодов времени,  $T \in \mathbb{N}$ , на которых возможно применение управляющего воздействия  $u(t) \in \mathbb{R}^3$ ;  $x(t)$  – фазовый вектор активного КА,  $x(t) \in \mathbb{R}^6$ ;  $\Phi(t+1, t)$  – фундаментальная матрица Коши размерности  $(6 \times 6)$ .

Тогда в соответствии с (3) разработка алгоритма решения задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух рассматриваемых КА будет осуществляться для линейной дискретной управляемой динамической системы, которая может быть записана в следующем векторно-матричном виде:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

где  $t$  – целочисленный период времени,  $t \in \overline{0, T-1}$ ;  $x(t)$  – фазовый вектор системы,  $x(t) \in \mathbb{R}^6$ ;  $x(0) = x_0$  – заданное начальное значение фазового вектора;  $u(t)$  – управление игрока  $P$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^3$ ;  $A(t)$  – матрица состояния,  $A(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ , при этом предполагается, что для всех  $t \in \overline{0, T-1}$  для матрицы  $A(t)$  существует обратная ей матрица  $A^{-1}(t)$ ;  $B(t)$  – матрица управления,  $B(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ .

Предполагается, что в сформированной линейной дискретной управляемой динамической системе (4) её начальное фазовое состояние  $x(0) = x_0$  априори определено и совпадает с начальным значением соответствующих координат фазового вектора исходной нелинейной дифференциальной системы (1).

Считается, что фазовый вектор активного КА  $x(t)$  и вектор управляющего воздействия  $u(t)$  игрока  $P$  удовлетворяют заданным геометрическим ограничениям:

$$\forall t \in \overline{0, T} : x(t) \in \mathbf{X}^*(t) \subset \mathbb{R}^6, \quad (5)$$

$$\forall t \in \overline{0, T-1} : u(t) \in \mathbf{U}^*(t) \subset \mathbb{R}^3, \quad (6)$$

где множества  $\mathbf{X}^*(t)$ ,  $\mathbf{U}^*(t)$  являются выпуклыми многогранниками-компактами (с конечным числом вершин) в пространствах  $\mathbb{R}^6$  и  $\mathbb{R}^3$  соответственно, имеющими вершинное описание  $V\text{-rep}(\mathbf{X}^*(t))$  и  $V\text{-rep}(\mathbf{U}^*(t))$ , т.е. с помощью соответствующих конечных наборов их крайних опорных вершин [11].

### Постановка задачи оптимизации управления сближением КА

Для математической формализации задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА введём ряд необходимых определений, основывающихся на работе [11].

Множеством допустимых программных управлений игрока  $P$  на фиксированном целочисленном промежутке времени  $\overline{0, T}$ , соответствующим ограничению (6), называется множество

$$\mathbf{U}(\overline{0, T}) = \left\{ u(\cdot) : u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \mathbb{R}^{T \times 3}, \forall t \in \overline{0, T-1}, u(t) \in \mathbf{U}^*(t) \right\}.$$

Следует отметить, что точность реализации процесса сближения оценивается значениями отклонений кинематических параметров пассивного КА и активного КА в финальный момент времени  $T$ , поэтому для оценки качества процесса управления в динамической системе (4) – (6) на промежутке времени  $\overline{0, T}$  целесообразно рассмотреть нижеследующий *терминальный критерий качества – терминальный функционал*.

Для каждого допустимого программного управления  $u(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{0, T})$  игрока  $P$  качество процесса управления в динамической системе (4) – (6) оценивается выпуклым терминальным функционалом  $J_{(\overline{0, T}, x_0)} : \mathbf{U}(\overline{0, T}) \rightarrow \mathbb{R}^1$ , значения которого определяются по формуле

$$J_{(\overline{0, T}, x_0)}(u(\cdot)) = \left\| \bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot)) \right\|_6 = \left\| x_{u(\cdot)}(T) \right\|_6, \quad (7)$$

где  $x_{u(\cdot)}(T) = \bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot)) \in \mathbf{X}^*(T)$  – фазовый вектор, описывающий местоположение и скорость активного КА относительно пассивного КА в финальный момент времени  $T$  и являющийся финальным сечением фазовой траектории  $x_{u(\cdot)}(\cdot) = \bar{x}(\cdot; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot))$  активного КА, соответствующей набору  $(\overline{0, T}, x_0, u(\cdot))$ ;  $\|\cdot\|_6$  – евклидова норма в векторном пространстве  $\mathbb{R}^6$ .

Будем считать, что на промежутке времени  $\overline{0, T}$  игрока  $P$  интересует такой результат рассматриваемого процесса программного терминального управления сближением двух КА, полученный путём выбора его допустимого программного управления  $u(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{0, T})$ , при котором выпуклый терминальный функционал вида (7) принимал бы наименьшее возможное значение.

Таким образом, основываясь на вышесказанном, можно сформулировать *задачу оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА*, динамика которого описывается линейной дискретной системой вида (4) – (6), являющейся аппроксимацией исходной нелинейной дифференциальной системы (1) при наличии выпуклых ограничений на реализации фазового вектора активного КА и управления игрока  $P$ .

**Задача.** Для дискретной управляемой динамической системы (4) – (6), описывающей динамику рассматриваемого процесса сближения двух КА на заданном целочисленном промежутке времени  $\overline{0, T}$  при фиксированном начальном фазовом векторе  $x(0) = x_0$  и имеющихся ограничениях на реализации фазового вектора активного КА и управления игрока  $P$ , требуется найти такое *множество оптимальных программных*

терминальных управлений  $U^{(e)}(\overline{0, T}) \subseteq U(\overline{0, T})$  игрока  $P$ , что для любого управления  $u^{(e)}(\cdot) \in U^{(e)}(\overline{0, T})$  и соответствующей траектории

$$x^{(e)}(\cdot) = \{x^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0, T}} = \left\{ \bar{x}(\cdot; \overline{0, T}, x_0^{(e)}, u^{(e)}(\cdot)) \right\}_{t \in \overline{0, T}}, \quad x^{(e)}(0) = x_0, \quad \forall t \in \overline{0, T}: x^{(e)}(t) \in \mathbf{X}^*(t),$$

терминальный критерий качества  $J_{(\overline{0, T}, x_0)}$ , значения которого вычисляются по формуле (7), принимал бы оптимальное (наименьшее) значение  $J^{(e)}$ , а именно выполнялось следующее условие оптимальности:

$$\begin{aligned} J^{(e)} &= J_{(\overline{0, T}, x_0)}(u^{(e)}(\cdot)) = \min_{u(\cdot) \in U(\overline{0, T})} \left\| \bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot)) \right\|_6 = \\ &= \left\| \bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u^{(e)}(\cdot)) \right\|_6 = \left\| x^{(e)}(T) \right\|_6 = \bar{J}(x^{(e)}(T)), \end{aligned}$$

где  $x^{(e)}(T) = \bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u^{(e)}(\cdot)) \in \mathbf{X}^*(T)$  – оптимальный фазовый вектор, характеризующий местоположение и скорость активного КА относительно пассивного КА в финальный момент времени  $T$ , который является финальным сечением фазовой траектории  $x^{(e)}(\cdot) = \bar{x}(\cdot; \overline{0, T}, x_0, u^{(e)}(\cdot)) \in \mathbf{X}^*(\cdot) = \{\mathbf{X}^*(t)\}_{t \in \overline{0, T}}$  активного КА, соответствующей набору  $(\overline{0, T}, x_0, u^{(e)}(\cdot))$ ;  $\bar{J}: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^1$  – функционал, значения которого для всех  $x(T) \in \mathbb{R}^6$  определяются по формуле:

$$\bar{J}(x(T)) = \|x(T)\|_6. \quad (8)$$

Предлагаемый в данной статье алгоритм решения сформулированной задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА основывается на *методе прямых и обратных конструкций* [9 – 13] и на *общем рекуррентном алгебраическом методе* построения областей достижимости [9 – 11], которые разработаны Шориковым А.Ф. применительно к линейным дискретным управляемым динамическим системам при наличии геометрических ограничений на векторы управляющих воздействий в виде выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) в соответствующих конечномерных векторных пространствах, и описывается в следующих двух разделах.

### Области достижимости линейной дискретной управляемой динамической системы

В математической теории оптимального управления большое внимание уделяется проблеме вычисления или оценки множеств всех возможных состояний, в которых может находиться рассматриваемая линейная дискретная управляемая динамическая система (4) – (6) в заданный момент времени. Эти множества называются областями достижимости [5; 12] и являются важной составляющей при решении различных классов задач оптимального управления и оценивания.

Для рассматриваемого фиксированного промежутка времени  $\overline{\tau, \mathcal{G}} \subseteq \overline{0, T}$  ( $\tau < \mathcal{G}$ ) *прямой областью достижимости*  $\mathbf{G}_+(\tau, \mathbf{X}(\tau), \mathcal{G})$  линейной дискретной управляемой динамической системы (4) – (6) на момент времени  $\mathcal{G}$ , соответствующей набору

$(\tau, \mathbf{X}(\tau)) \in \overline{0, T-1} \times \mathbf{2}^{\mathbb{R}^6}$ , где  $\mathbf{X}(\tau) \subset \mathbf{X}^*(\tau)$ , называется множество, определяемое следующим соотношением:

$$\mathbf{G}_+(\tau, \mathbf{X}(\tau), \mathcal{G}) = \{x(\mathcal{G}): x(\mathcal{G}) \in \mathbb{R}^6, x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ t \in \overline{\tau, \mathcal{G}-1}, x(\tau) \in \mathbf{X}(\tau) \subset \mathbf{X}^*(\tau), x(0) = x_0 \in \mathbf{X}^*(0), u(t) \in \mathbf{U}^*(t)\}. \quad (9)$$

Здесь и далее для любого множества  $M$  символом  $\mathbf{2}^M$  обозначается множество всех его подмножеств.

Нетрудно показать [11], что для рассматриваемой линейной дискретной динамической системы (4) – (6) прямая область достижимости вида (9), является выпуклым многогранником-компактом (с конечным числом вершин) в пространстве  $\mathbb{R}^6$ .

Для рассматриваемого фиксированного промежутка времени  $\overline{\tau, \mathcal{G}} \subseteq \overline{1, T}$  ( $\tau < \mathcal{G}$ ) *обратной областью достижимости*  $\mathbf{G}_-(\mathcal{G}, \mathbf{X}(\mathcal{G}), \tau)$  линейной дискретной управляемой динамической системы (4) – (6) на момент времени  $\tau$ , соответствующей набору  $(\mathcal{G}, \mathbf{X}(\mathcal{G})) \in \overline{0, T-1} \times \mathbf{2}^{\mathbb{R}^6}$ , называется множество, определяемое следующим соотношением:

$$\mathbf{G}_-(\mathcal{G}, \mathbf{X}(\mathcal{G}), \tau) = \{x(\tau): x(\tau) \in \mathbb{R}^6, x(t) = A^{-1}(t)[x(t+1) - B(t)u(t)], \\ t \in \{\mathcal{G}-1, \mathcal{G}-2, \dots, \tau+1, \tau\}, x(\mathcal{G}) \in \mathbf{X}(\mathcal{G}), u(t) \in \mathbf{U}(t)\}. \quad (10)$$

Отметим, что при имеющихся условиях и ограничениях для рассматриваемой линейной дискретной динамической системы (4) – (6) это множество является выпуклым многогранником-компактом (с конечным числом вершин) в пространстве  $\mathbb{R}^6$ .

Для вычисления прямой области достижимости  $\mathbf{G}_+(0, \mathbf{X}(0), t)$ , где  $t \in \overline{1, T}$ , и обратной области достижимости  $\mathbf{G}_-(T, \mathbf{X}(T), t)$ , где  $t \in \{T-1, T-2, \dots, 1\}$ , в работе используется *общий рекуррентный алгебраический метод*, подробно описанный в работах [9-11], основанный на их полугрупповом свойстве:

$$\mathbf{G}_+(0, \mathbf{X}(0), t) = \mathbf{G}_+(t-1, \overline{\mathbf{G}}_+(t-1), t), t \in \overline{1, T} \\ \mathbf{G}_-(T, \mathbf{X}(T), t-1) = \mathbf{G}_-(t, \overline{\mathbf{G}}_-(t), t-1), t \in \{T-1, T-2, \dots, 2\}, \quad (11)$$

где  $\overline{\mathbf{G}}_+(T-1) = \mathbf{G}_+(0, \mathbf{X}(0), T)$ ;  $\overline{\mathbf{G}}_+(0) = \mathbf{X}(0) = \{x_0\}$ ;  $\overline{\mathbf{G}}_-(t) = \mathbf{G}_-(T, \mathbf{X}(T), t)$ ;  $\overline{\mathbf{G}}_-(T) = \mathbf{X}(T)$ , и использующий: алгебраические операции над векторами, свойства и решения конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, возможности симплекс-метода для решения задач линейного математического программирования и операции двойственного описания выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) с помощью конечного числа вершин и с помощью соответствующих конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, а также операции над выпуклыми многогранниками-компактами в соответствующих конечномерных векторных пространствах.

Тогда, учитывая свойства (11), многошаговые процедуры вычисления искомых прямых  $\mathbf{G}_+(0, \mathbf{X}(0), t)$ ,  $t \in \overline{1, T}$  и обратных  $\mathbf{G}_-(T, \mathbf{X}(T), t)$ ,  $t \in \{T-1, T-2, \dots, 1\}$  обла-

стей достижимости линейной дискретной динамической системы (4) – (6), отвечающих соответственно наборам  $(0, \mathbf{X}(0))$  и  $(T, \mathbf{X}(T))$ , сводятся к реализации только одношаговых процедур построения соответственно прямых и обратных областей достижимости на шаг вперёд и на шаг назад на основе построенной предыдущей прямой и обратной области достижимости соответственно.

При этом также используется свойство (см., например, [11;15]): любой выпуклый многогранник-компакт (с конечным числом вершин) может быть представлен двумя способами, т.е. иметь двойственное описание – как выпуклая оболочка конечного числа крайних вершин (*V-rep*) и как множество решений конечной системы линейных алгебраических уравнений и неравенств (*H-rep*), соответствующих крайним опорным гиперплоскостям.

Для вычисления последовательностей прямых и обратных областей достижимости для всех моментов времени  $t \in \overline{1, T}$  используется алгоритм, основывающийся на общем рекуррентном алгебраическом методе [9 – 11] и его модификации, описанной в работе [14].

### Алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления сближением двух КА

Используя приведённые выше определения и результаты работ [9 – 13], можно показать, что поиск решения задачи оптимального программного терминального управления сближением двух КА, соответствующей дискретной управляемой динамической системе (4) – (6) с функционалом качества (8), можно свести к решению следующей последовательности одношаговых вспомогательных подзадач:

- 1) полагается:  $t := 0$ ;  $\bar{\mathbf{G}}_+(t) := \mathbf{X}(0) = \{x_0\}$ ;
- 2) на основе известных множеств  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t))$  и  $V\text{-rep}(\mathbf{U}^*(t))$  – вершинных описаний соответственно множеств  $\bar{\mathbf{G}}_+(t)$  и  $\mathbf{U}^*(t)$ , осуществляется вычисление прямой области достижимости  $\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) = \mathbf{G}_+(t, \bar{\mathbf{G}}_+(t), t+1)$  на шаг вперёд (решение этой задачи сводится к реализации конечной последовательности одношаговых операций – алгебраических действий над векторами, поиска решений задач линейного математического программирования для нахождения множества всех вершин выпуклого многогранника-компакта  $\bar{\mathbf{G}}_+(t+1)$ , и на его основе – формирования множества  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1))$  – вершинного описания прямой области достижимости  $\bar{\mathbf{G}}_+(t+1)$ , которое реализуется согласно модификации общего рекуррентного алгебраического метода, изложенной в работе [14]);
- 3) для сформированной прямой области достижимости  $\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) = \mathbf{G}_+(t, \bar{\mathbf{G}}_+(t), t+1)$ , на основе её вершинного описания  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1))$ , формируется и запоминается соответствующая ей конечная система линейных уравнений и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1))$ , множество решений которой совпадает с множеством  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1)) = \bar{\mathbf{G}}_+(t+1)$ ;
- 4) для множества-ограничения  $\mathbf{X}^*(t+1)$  из (5), на основе его вершинного описания  $V\text{-rep}(\mathbf{X}^*(t+1))$ , формируется и запоминается соответствующая ему конечная си-

стема линейных уравнений и неравенств  $\sum(\mathbf{X}^*(t+1))$ , множество решений которой совпадает с множеством  $H\text{-rep}(\mathbf{X}^*(t+1)) = \mathbf{X}^*(t+1) \mathbf{X}^*(t+1)$ ;

5) для множеств  $\bar{\mathbf{G}}_+(t+1)$  и  $\mathbf{X}^*(t+1)$  из соответствующих им систем линейных алгебраических равенств и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1))$  и  $\sum(\mathbf{X}^*(t+1))$  формируется и запоминается соответствующая им конечная система линейных уравнений и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1)) = \sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1)) \cup \sum(\mathbf{X}^*(t+1))$ , множество решений которой совпадает с множеством  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1)) = \bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1)$ ;

6) если  $t+1 = T$ , то осуществляется переход на пункт 9), в противном случае – осуществляется переход на следующий пункт 7);

7) на основании сформированного множества  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1))$  находится множество  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1))$ , которое является вершинным описанием множества  $\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1)$ ;

8) полагается:  $t := t+1$ ;  $\bar{\mathbf{G}}_+(t) = V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t))$  и осуществляется переход на пункт 2);

9) учитывая ограничения (5) и рекуррентные формулы (11), осуществляется оптимизация выпуклого терминального функционала  $\bar{J} = \bar{J}(x(T))$ , значения которого определяются на основании соотношения (8), на финальном множестве  $\bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T) = \mathbf{G}_+(T-1, \bar{\mathbf{G}}_+(T-1), T) \cap \mathbf{X}^*(T)$ , описываемом множеством решений конечной системы линейных алгебраических уравнений и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T)) = \sum(\bar{\mathbf{G}}_+(T)) \cup \sum(\mathbf{G}_+(T)) \cup \sum(\mathbf{X}^*(T))$ , т.е. на множестве  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T)) = \bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T) = \mathbf{G}_+(T-1, \bar{\mathbf{G}}_+(T-1), T) \cap \mathbf{X}^*(T)$ , путём нахождения множества  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(T) = \mathbf{X}_J^{(e)}(0, \mathbf{X}(0), T)$  финальных фазовых состояний системы (4) – (6) из решения следующей задачи выпуклого математического программирования:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_J^{(e)}(0, \mathbf{X}(0), T) &= \{x^{(e)}(T) : x^{(e)}(T) \in H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T))\}, \\ \bar{J}^{(e)} = \bar{J}(x^{(e)}(T)) &= \min_{x(T) \in \{\mathbf{G}_+(T-1, \bar{\mathbf{G}}_+(T-1), T) \cap \mathbf{X}^*(T)\}} \bar{J}(x(T)) = \min_{x(T) \in H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T))} \bar{J}(x(T)) = \\ &= \min_{x(T) \in H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T))} \left\{ \|x(T)\|_6 = \|x^{(e)}(T)\|_6 \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

(решение этой одношаговой оптимизационной задачи можно осуществить, например, с помощью метода Зойтендейка (см., например, [13]);

10) осуществляется аппроксимация (с заданной точностью) выпуклого множества  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(T) = \mathbf{X}_J^{(e)}(0, \mathbf{X}(0), T)$  выпуклым многогранником с вершинным описанием, т.е. выполняется формирование множества  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(T))$ ;

11) полагается:  $t := T-1$ ;

12) на основе известных множеств  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t+1))$  и  $V\text{-rep}(\mathbf{U}^*(t+1))$  – вершинных описаний соответственно множеств  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t+1)$  и  $\mathbf{U}^*(t+1)$  осуществляется вычис-

ление обратной области достижимости  $\bar{\mathbf{G}}_-(t) = \mathbf{G}_-(t+1, \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t+1), t)$  на шаг назад (решение этой задачи сводится к реализации конечной последовательности одношаговых операций – алгебраических действий над векторами, поиска решений задач линейного математического программирования для нахождения множества всех вершин выпуклого многогранника-компакта  $\bar{\mathbf{G}}_-(t)$ , и на его основе – формирования множества  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_-(t))$  – вершинного описания обратной области достижимости  $\bar{\mathbf{G}}_-(t)$ );

13) для сформированной обратной области достижимости  $\bar{\mathbf{G}}_-(t) = \mathbf{G}_-(t+1, \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t+1), t)$ , на основе её вершинного описания  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_-(t))$ , формируется соответствующая ей конечная система линейных уравнений и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_-(t))$ , множество решений которой совпадает с множеством  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_-(t)) = \bar{\mathbf{G}}_-(t)$ ;

14) для множеств  $\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t)$  и  $\bar{\mathbf{G}}_-(t)$  из соответствующих им систем линейных алгебраических равенств и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t)) = \sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t)) \cup \sum(\mathbf{X}^*(t))$  и  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_-(t))$  формируется соответствующая им конечная система линейных уравнений и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t)) = \sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t)) \cup \sum(\mathbf{X}^*(t)) \cup \sum(\bar{\mathbf{G}}_-(t))$ , множество решений которой совпадает с множеством  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t)) = \bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t) = \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t)$ ;

15) если  $t-1=0$ , то полагается:  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t) = \mathbf{X}(0) = \{x_0\}$  и осуществляется переход на пункт 18, в противном случае – осуществляется переход на следующий пункт 16);

16) на основании сформированного множества  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t)) = \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t)$  находится множество  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t))$ , которое является вершинным описанием множества  $\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t) = \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t)$ ;

17) полагается:  $t := t-1$ ;  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t+1) = V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t+1))$  и осуществляется переход на пункт 12);

18) на основании сформированного набора множеств  $\{\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0, T}}$ , где  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(0) = \mathbf{X}(0) = \{x_0\}$ ,  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(T) = \mathbf{X}_J^{(e)}(0, \mathbf{X}(0), T)$  (нахождение этого набора свелось к реализации конечной последовательности одношаговых операций – алгебраических операций над векторами, поиска решений одношаговых задач линейного математического программирования, а также поиска решений конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, являющихся объединением аналогичных систем, описывающих соответствующие прямые и обратные области достижимости и фазовые ограничения, сформированных на основе их вершинного описания), осуществляется формирование множества допустимых программных управлений  $\tilde{u}^{(e)}(\cdot) \in \tilde{\mathbf{U}}(\overline{0, T})$ , которые определяют множество  $\tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(T), T)$ , описываемое соотношением:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(T)) = \{\tilde{u}^{(e)}(\cdot) : \tilde{u}^{(e)}(\cdot) = \{\tilde{u}^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \tilde{\mathbf{U}}(\overline{0, T}), \\ \tilde{x}^{(e)}(t+1) = A(t)\tilde{x}^{(e)}(t) + B(t)\tilde{u}^{(e)}(t) \in \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t+1), t \in \overline{0, T-1}, \tilde{x}^{(e)}(0) = x_0\}$$

(решается с помощью реализации рекуррентной последовательности решений одношаговых краевых задач).

Из результатов работ [9 – 12], [14] следует, что сформированное множество  $\tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T))$  описывает множество всех оптимальных программных терминальных управлений игрока  $P$ , т.е. справедливо равенство:

$$\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0, T}) = \tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T)),$$

и порождает соответствующее ему множество

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T)) &= \{ \tilde{x}^{(e)}(\cdot) : \tilde{x}^{(e)}(\cdot) = \{ \tilde{x}^{(e)}(t) \}_{t \in \overline{0, T}} = \\ &= \{ \tilde{x}(t; \overline{0, T}, x_0, \tilde{u}^{(e)}(\cdot)) \}_{t \in \overline{0, T}}, \tilde{u}^{(e)}(\cdot) = \{ \tilde{u}^{(e)}(t) \}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T)), \tilde{x}^{(e)}(0) = x_0 \} \end{aligned}$$

всех оптимальных фазовых траекторий активного КА, удовлетворяющих заданному фазовому ограничению (5). Следовательно множество  $\tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T), T)$  описывает множество всех решений рассматриваемой задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА для дискретной динамической системы (4) – (6) с функционалом качества (8), удовлетворяющих условию оптимальности (7).

На основании предыдущих рассуждений можно сделать вывод, что алгоритм формирования множества  $\tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T))$  всех оптимальных программных терминальных управлений, которое обеспечивает описание множества  $\mathbf{X}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T))$  всех оптимальных фазовых траекторий для рассматриваемой задачи сближения активного КА с пассивным КА в финальный момент времени  $T$ , удовлетворяющих фазовому ограничению (5), сводится к реализации конечной последовательности поиска решений только одношаговых задач – выполнения алгебраических операций над векторами, линейного и выпуклого математического программирования, выполнения операций перехода от вершинного описания выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) к их описанию соответствующими конечными системами линейных алгебраических уравнений и неравенств и наоборот – поиска решений конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, а также решения одношаговых краевых задач.

Таким образом, решение исходной многошаговой задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения активного КА с пассивным КА свелось к алгоритму, являющемуся реализацией *конечной последовательности решений только одношаговых алгебраических и оптимизационных задач*.

### Численный пример

Эффективность предлагаемого алгоритма решения задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА иллюстрируется на численном модельном примере.

На целочисленном промежутке времени  $\overline{0, T} = \overline{0, t_f} = \overline{0, 4}$  рассматривается линейная дискретная система:  $x(0) = x_0 = (2650; -2540; 2120; -3; 2; 3) \in \mathbb{R}^6$ ;  $A(t)$  – матрица

состояния,  $A(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ;  $B(t)$  – матрица управления,  $B(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  (где  $t \in \overline{0,3}$ ), которые формируются численно при реализации процедур линеаризации системы (1) и дискретизации системы (2).

Ограничения на фазовый вектор и управляющее воздействие имеют следующий конкретный вид:

$$\begin{aligned} x(t) \in \mathbf{X}^*(t) &= \{x(t): x(t) \in \mathbb{R}^6, \forall t \in \overline{0,4}, \\ |x_1(t)| &\leq 3000 \text{ м}, |x_2(t)| \leq 3000 \text{ м}, |x_3(t)| \leq 3000 \text{ м}, \\ |x_4(t)| &\leq 7,5 \text{ м/с}, |x_5(t)| \leq 7,5 \text{ м/с}, |x_6(t)| \leq 7,5 \text{ м/с}\}, \\ u(t) \in \mathbf{U}^*(t) &= \{u(t): u(t) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \overline{0,3}, \\ |u_1(t)| &\leq 1, |u_2(t)| \leq 1, |u_3(t)| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Численное моделирование проводилось в программной среде MATLAB R2014a на персональном компьютере с процессором Intel® Core™ i7-3770 CPU @ 3.4 GHz, оперативной памятью 8 Gb и с видеокартой NVIDIA GeForce GT 730. Визуализация построения областей достижимости осуществлена с использованием библиотеки инструментов MPT Toolbox для MATLAB. Полученные результаты компьютерного моделирования представлены на рис. 1 и рис. 2, данные для которых размещены в табл. 1 – 3.

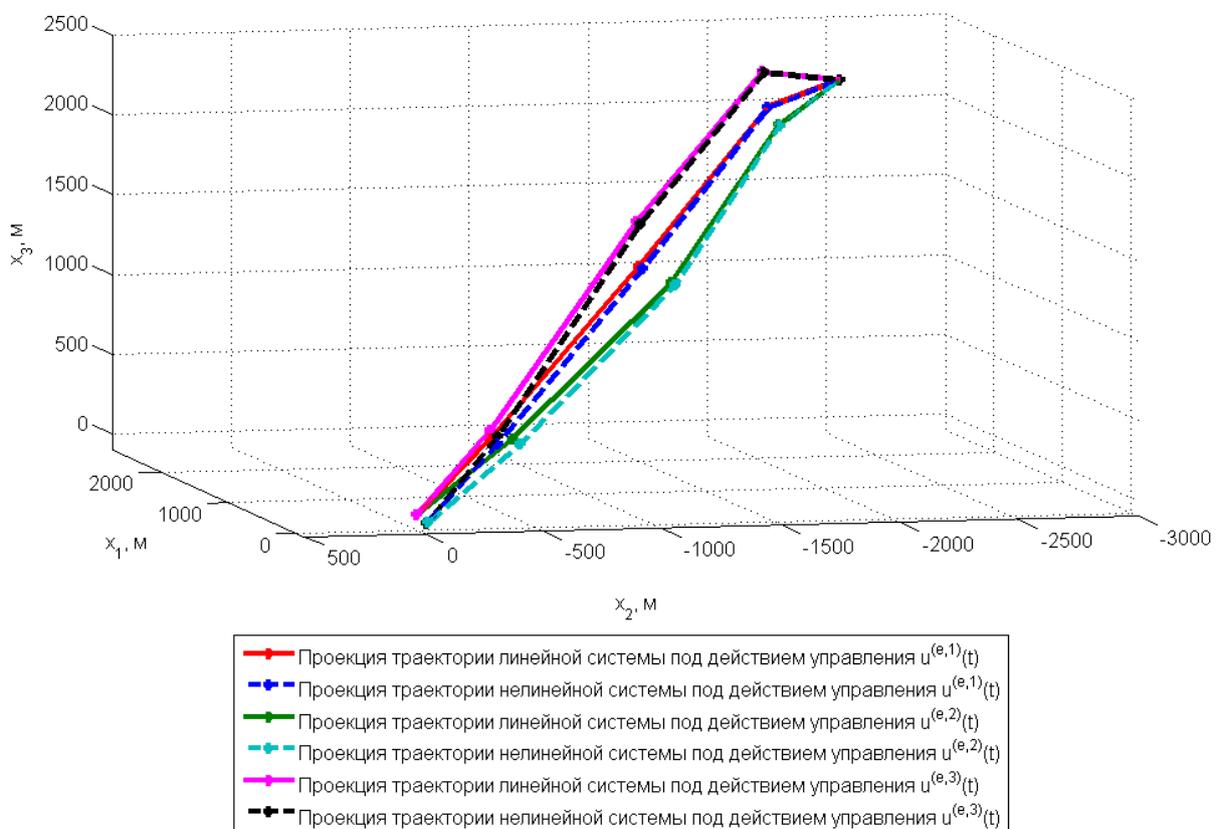


Рис. 1. Проекция геометрических координат фазовых траекторий линейной системы на  $\mathbb{R}^3$

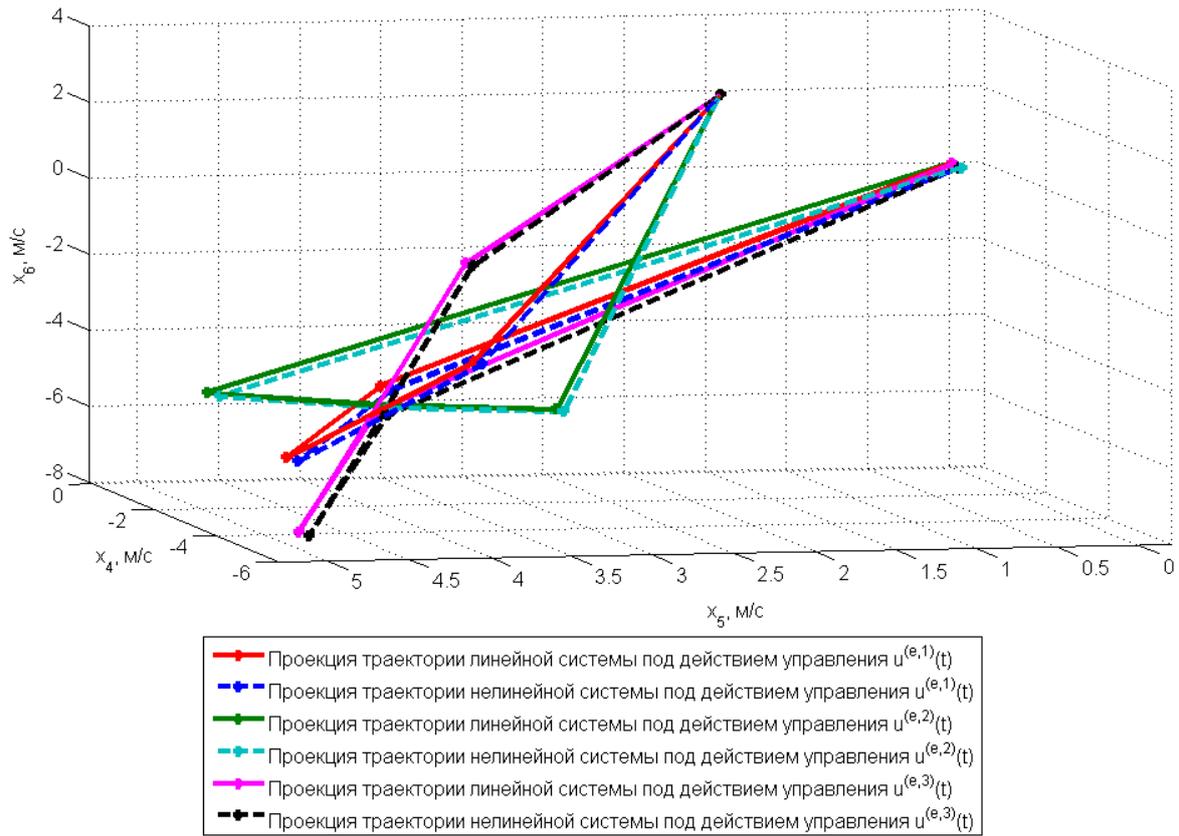

 Рис. 2. Проекция скоростных координат фазовых траекторий линейной системы на  $\mathbb{R}^3$ 

 Таблица 1. Фазовые траектории нелинейной и линейной систем под действием управления  $u^{(e,1)}(t)$ 

	Параметр	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
Управление	$u_1^{(e,1)}(t)$	-0,1206	-0,0337	0,0358	0,0821	-
	$u_2^{(e,1)}(t)$	0,0555	0,0042	-0,0690	-0,1623	-
	$u_3^{(e,1)}(t)$	-0,2164	-0,0883	0,0414	0,1703	-
Нелинейная система $J = 73,19$	$x_1(t)$	2650	1879,7	902,6	200,8	-54,3
	$x_2(t)$	-2540	-2018,0	-1214,5	-397,2	-29,1
	$x_3(t)$	2120	2110,9	1318,9	386,3	-40,6
	$x_4(t)$	-3	-5,47	-5,14	-2,90	-0,12
	$x_5(t)$	2	3,94	5,01	4,01	-0,03
	$x_6(t)$	3	-3,10	-5,68	-4,66	-0,07
Линейная система $J = 0$	$x_1(t)$	2650	1884,2	937,24	234,85	0
	$x_2(t)$	-2540	-2014,2	-1202,0	-375,2	0
	$x_3(t)$	2120	2114,6	1332,6	413,2	0
	$x_4(t)$	-3	-5,42	-5,05	-2,80	0
	$x_5(t)$	2	3,98	5,07	-4,06	0
	$x_6(t)$	3	-3,05	-5,62	-4,58	0

Таблица 2. Фазовые траектории нелинейной и линейной систем под действием управления  $u^{(e,2)}(t)$

	Параметр	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
Управление	$u_1^{(e,2)}(t)$	-0,1254	-0,0034	0,0055	0,0893	-
	$u_2^{(e,2)}(t)$	-0,0373	0,0021	-0,0019	-0,2055	-
	$u_3^{(e,2)}(t)$	-0,2612	-0,0012	0,0001	0,1685	-
Нелинейная система $J = 75,37$	$x_1(t)$	2650	1864,0	937,6	227,6	-55,7
	$x_2(t)$	-2540	-2060,9	-1356,5	-502,2	-32,3
	$x_3(t)$	2120	2002,2	1206,2	382,7	-39,6
	$x_4(t)$	-3	-5,66	-4,59	-3,26	-0,12
	$x_5(t)$	2	3,47	4,34	5,13	-0,03
	$x_6(t)$	3	-4,31	-4,52	-4,61	-0,07
Линейная система $J = 0$	$x_1(t)$	2650	1868,5	954,3	262,05	0
	$x_2(t)$	-2540	-2057,1	-1343,4	-478,2	0
	$x_3(t)$	2120	2005,9	1219,6	480,9	0
	$x_4(t)$	-3	-5,61	-4,50	-3,15	0
	$x_5(t)$	2	3,51	4,40	5,19	0
	$x_6(t)$	3	-4,27	-4,46	-4,54	0

Таблица 3. Фазовые траектории нелинейной и линейной систем под действием управления  $u^{(e,3)}(t)$

	Параметр	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
Управление	$u_1^{(e,3)}(t)$	-0,0879	-0,0899	0,0519	0,0895	-
	$u_2^{(e,3)}(t)$	-0,0559	0,0115	-0,0732	-0,1655	-
	$u_3^{(e,3)}(t)$	-0,1314	-0,2357	0,0846	0,1913	-
Нелинейная система $J = 74,85$	$x_1(t)$	2650	1958,7	1017,6	219,1	-54,8
	$x_2(t)$	-2540	-2024,4	-1232,2	-402,2	-27,0
	$x_3(t)$	2120	2317,1	1575,6	435,4	-43,9
	$x_4(t)$	-3	-4,59	-5,80	-3,11	-0,11
	$x_5(t)$	2	3,83	5,07	4,07	-0,02
	$x_6(t)$	3	-0,81	-7,41	-5,23	-0,82
Линейная система $J = 0$	$x_1(t)$	2650	1963,2	1034,5	253,5	0
	$x_2(t)$	-2540	-2020,6	-1220,1	-381,3	0
	$x_3(t)$	2120	2320,9	1590,6	464,2	0
	$x_4(t)$	-3	-4,54	-5,72	-3,15	0
	$x_5(t)$	2	3,87	5,12	5,19	0
	$x_6(t)$	3	-0,77	-7,34	-4,54	0

Таким образом, можно сделать вывод, что каждое программное управление из множества  $\tilde{U}^{(e)}(\cdot)$  оптимальных программных терминальных управлений, сформированного для линеаризованной дискретной системы с помощью реализации предлагаемого алгоритма решения рассматриваемой задачи сближения КА, разработанного на основе метода прямых и обратных конструкций [11], при подстановке его в уравнения динамики исходной нелинейной дифференциальной системы даёт хороший результат.

### Заключение

В данной работе предложен алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА, динамика которых описывается с помощью системы нелинейных дифференциальных уравнений. Исходная модель рассматриваемого процесса управления линеаризуется относительно заданного опорного движения и полученная линейная дифференциальная система дискретизируется. Для сформированной линейной дискретной управляемой динамической системы формулируется задача оптимального программного терминального управления процессом сближения активного КА с пассивным КА. Для решения этой задачи предлагается алгоритм, который основывается на методе прямых и обратных конструкций [9 – 12], а в части построения областей достижимости используется модификация общего рекуррентного алгебраического метода [9 – 13], описанная работе [14]. Предлагаемый алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления сближением двух КА является реализацией конечной последовательности – выполнения алгебраических операций над векторами и операций над выпуклыми многогранниками-компактами (с конечным числом вершин), поиска решений задач линейного и выпуклого математического программирования, поиска решений систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, а также нахождения решений одношаговых краевых задач. Действие предлагаемого алгоритма иллюстрируется на модельном примере решения задачи управления процессом сближения двух КА.

На основе предлагаемого алгоритма решения рассматриваемой задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА в программной среде MATLAB был разработан комплекс компьютерных программ, с помощью которого было реализовано компьютерное моделирование решения данной задачи на модельном примере. Результаты компьютерного моделирования показали эффективность разработанного алгоритма решения задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА.

Работа выполнена в соответствии с Планом НИР Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

### Библиографический список

1. Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, 1987. 440 с.
2. Ермилов Ю.А., Иванова Е.Е., Пантюшин С.В. Управление сближением космических аппаратов. М.: Наука, 1977. 448 с.
3. Иванов Н.М., Лысенко Л.Н., Мартынов А.И. Методы теории систем в задачах управления космическим аппаратом. М.: Машиностроение, 1981. 255 с.
4. Лебедев А.А., Соколов В.Б. Встреча на орбите. М.: Машиностроение, 1969. 67 с.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

6. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
7. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
9. Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 1993. № 4. С. 115-127.
10. Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф. Об одном алгоритме построения области достижимости линейной управляемой системы // В сб.: «Негладкие задачи оптимизации и управление». Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 55-61.
11. Шориков А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Уральский университет, 1997. 242 с.
12. Шориков А.Ф. Алгоритм решения задачи оптимального терминального управления в линейных дискретных динамических системах // Сб. научных трудов «Информационные технологии в экономике: теория, модели и методы». Екатеринбург: Уральский государственный экономический университет, 2005. С. 119-138.
13. Шориков А.Ф., Тюлюкин В.А. Описание библиотеки компьютерных программ для моделирования решения задачи апостериорного минимаксного оценивания // Известия Уральского государственного экономического университета. 1999. № 2. С. 36-49.
14. Горанов А.Ю., Шориков А.Ф. Модифицированный рекуррентный метод построения областей достижимости линейной дискретной системы // Сб. трудов Шестой Международной научной конференции «Информационные технологии и системы» (01-05 марта 2017 г., Банное). Челябинск: Челябинский государственный университет, 2017. С. 87-92.
15. Черников С.Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.

## **ALGORITHM FOR SOLVING OPTIMAL OPEN-LOOP TERMINAL CONTROL PROBLEM FOR SPACECRAFT RENDEZVOUS WITH ACCOUNT OF CONSTRAINTS ON THE STATE**

© 2021

- A. F. Shorikov** Doctor of Science (Phys. & Math.), Professor;  
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch  
of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS),  
Yekaterinburg, Russian Federation;  
[afshorikov@mail.ru](mailto:afshorikov@mail.ru)
- A. Yu. Goranov** Assistant Lecturer;  
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin,  
Yekaterinburg, Russian Federation;  
Design Engineer;  
Scientific and Production Association of Automatics named after Academician  
N.A. Semikhatov, Yekaterinburg, Russian Federation;  
[goranovayu@mail.ru](mailto:goranovayu@mail.ru)

The paper proposes an algorithm for solving the optimal open-loop terminal control problem of two spacecraft rendezvous with constraints on their states. A system of nonlinear differential equations that describes the dynamics of the active (maneuvering) spacecraft relative to the passive spacecraft (station) in the central gravitational field of the Earth in the orbital coordinate system of coordinates related to the passive spacecraft center-of-mass is considered as an initial model. The obtained

nonlinear model of the active spacecraft dynamics is linearized relative to the specified reference state trajectory of the passive spacecraft, and then it is discretized and reduced to linear recurrence relations. Mathematical formalization of the spacecraft rendezvous problem under consideration is carried out at a specified final moment of time for the obtained discrete-time controlled dynamical system. The quality of solving the problem is estimated by a convex functional taking into account the geometric constraints on the active spacecraft states and the associated control actions in the form of convex polyhedral-compacta in the appropriate finite dimensional vector space. We propose a solution of the problem of optimal terminal control over the approach of the active spacecraft relative to the passive spacecraft in the form of a constructive algorithm on the basis of the general recursive algebraic method for constructing the availability domains of linear discrete controlled dynamic systems, taking into account specified conditions and constraints, as well as using the methods of direct and inverse constructions. In the final part of the paper, the computer modeling results are presented and conclusions about the effectiveness of the proposed algorithm are made.

*Optimal control; open-loop control; terminal control; spacecraft rendezvous; availability domains*

---

*Citation:* Shorikov A.F., Goranov A.Yu. Algorithm for solving optimal open-loop terminal control problem for spacecraft rendezvous with account of constraints on the state. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2021. V. 20, no. 1. P. 46-64. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-46-64

---

## References

1. Appazov R.F., Sytin O.G. *Metody proektirovaniya traektoriy nositeley i sputnikov Zemli* [Methods of designing trajectories of launch vehicles and Earth satellites]. Moscow: Nauka Publ., 1987. 440 p.
2. Ermilov Yu.A., Ivanova E.E., Pantyushin S.V. *Upravlenie sblizheniem kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft rendezvous control]. Moscow: Nauka Publ., 1977. 448 p.
3. Ivanov N.M., Lysenko L.N., Martynov A.I. *Metody teorii sistem v zadachakh upravleniya kosmicheskim apparatom* [Systems theory method in spacecraft control problems]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1981. 255 p.
4. Lebedev A.A., Sokolov V.B. *Vstrecha na orbite* [Orbital rendezvous]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1969. 67 p.
5. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion control theory]. Moscow: Nauka Publ., 1968. 476 p.
6. Krasovskiy N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizheniy* [Game-theory problems of space traffic rendezvous]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 420 p.
7. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional differential games]. Moscow: Nauka Publ., 1974. 456 p.
8. Chernous'ko F.L., Melikyan A.A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* [Game-theory problems of control and search]. Moscow: Nauka Publ., 1978. 270 p.
9. Tyulyukin V.A., Shorikov A.F. Algorithm for solving terminal control-problems for a linear discrete system. *Automation and Remote Control*. 1993. V. 54, no. 4. P. 632-643.
10. Tyulyukin V.A., Shorikov A.F. Ob odnom algoritme postroeniya oblasti dostizhimosti lineynoy upravlyaemoy sistemy. *V sb.: «Negladkie Zadachi Optimizatsii i Upravlenie»*. Sverdlovsk: UrO AN SSSR Publ., 1988. P. 55-61. (In Russ.)
11. Shorikov A.F. *Minimaksnoe otsenivanie i upravleni v diskretnykh dinamicheskikh sistemakh* [Minimax estimation and control in discrete dynamical systems]. Ekaterinburg: Ural University Publ., 1997. 242 p.
12. Shorikov A.F. Algoritm resheniya zadachi optimal'nogo terminal'nogo upravleniya v lineynykh diskretnykh dinamicheskikh sistemakh. *Sb. nauchnykh trudov «Informatsionnye tekhnologii v ekonomike: teoriya, modeli i metody»*. Yekaterinburg: Ural State University of Economics Publ, 2005. P. 119-138. (In Russ.)
13. Shorikov A.F., Tyulyukin V.A. Description of the package of computer subroutines for simulation of solving the problem of a posteriori minimax estimation. *Izvestiya Ural'skogo*

*Gosudarstvennogo Ekonomicheskogo Universiteta*. 1999. No. 2 P. 36-49. (In Russ.)

14. Goranov A.Y., Shorikov A.F. Modified general recursion algebraic method of the linear control systems reachable sets computation. *Sb. trudov Shestoy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Informatsionnye tekhnologii i sistemy» (01-05 marta 2017 g., Bannoe)*. Chelyabinsk: Chelyabinsk State University Publ., 2017. P. 87-92. (In Russ.)

15. Chernikov S.N. *Lineynye neravenstva* [Linear inequalities]. Moscow: Nauka Publ., 1968. 488 p.

## ИССЛЕДОВАНИЯ СТЕСНЁННОГО ИЗГИБА КРИВОЛИНЕЙНЫХ БОРТОВ ДЕТАЛЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

© 2021

- Е. Г. Громова** кандидат технических наук, доцент кафедры производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [pla.gromova@ya.ru](mailto:pla.gromova@ya.ru)
- В. К. Моисеев** доктор технических наук, профессор, профессор кафедры производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [moiseevvk@mail.ru](mailto:moiseevvk@mail.ru)
- А. А. Шаров** кандидат технических наук, доцент кафедры производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [aa.sharov@ya.ru](mailto:aa.sharov@ya.ru)
- О. В. Ломовской** кандидат технических наук, доцент кафедры производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [oleg.lomovskoi@ya.ru](mailto:oleg.lomovskoi@ya.ru)
- М. Н. Мантусов** ведущий инженер; Ульяновский филиал КБ «ПАО Туполев», г. Ульяновск; [mishaufkb@ya.ru](mailto:mishaufkb@ya.ru)
- А. Н. Плотников** кандидат технических наук, доцент кафедры производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [anplotnikov@ya.ru](mailto:anplotnikov@ya.ru)

Представлен метод стеснённого изгиба эластомером листовых деталей летательных аппаратов с криволинейными бортами. Изготовление детали осуществляется за два перехода, в результате первого перехода получается деталь с утонением в радиусной части, второй переход проводят на формблочке сниженной высоты, в результате полученная волна избыточного материала деформируется по радиусу гибочной оправки. В готовой детали наблюдается увеличение толщины заготовки в зоне радиусагиба. Проведены численные исследования процесса с применением программного комплекса «ANSYS/LS-DYNA». В рамках исследования отработана модель протекания процесса, получены значения распределения толщины материала детали по всей рассматриваемой поверхности и построены графики, показывающие распределения давления эластомера и деформации материала детали в характерных точках.

*Технология производства летательных аппаратов; штамповка эластомером; стеснённый изгиб; притупок; численное моделирование*

---

**Цитирование:** Громова Е.Г., Моисеев В.К., Шаров А.А., Ломовской О.В., Мантусов М.Н., Плотников А.Н. Исследования стеснённого изгиба криволинейных бортов деталей летательных аппаратов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 1. С. 65-74.  
DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-65-74

### Введение

В конструкции летательных аппаратов широко применяются детали, получаемые холодной штамповкой эластомером из листовых заготовок. В частности, имеют большое распространение гнутые детали, имеющие борта криволинейной формы в плане.

При изготовлении таких деталей предлагается использование схем стеснённого изгиба для исключения утонения стенок и уменьшения предельных радиусовгиба [1-4]. Стеснённый изгиб детали по одной из схем происходит за два перехода (рис. 1). На первом переходе заготовка изгибается по формблоку-пуансону под действием давления эластичной среды. Перед вторым переходом удаляется проставка, за счёт чего формируется превышение борта и создаётся зазор между заготовкой и формблоком, далее под действием эластомера происходит прогиб полуфабриката с формированием избыточного материала в зоне радиусагиба. Этот избыток материала в дальнейшем осаживается на кромку формблока с утолщением стенки детали в этой зоне. Вместе с утолщением стенки появляется возможность уменьшения радиусагиба, что даёт свои преимущества по жёсткости и весу детали. Существуют и другие схемы, все они сводятся к созданию избыточной волны материала за счёт превышения борта с её последующей посадкой на радиус кромки формблока, то есть принципиально не отличаются от описанной процедуры.

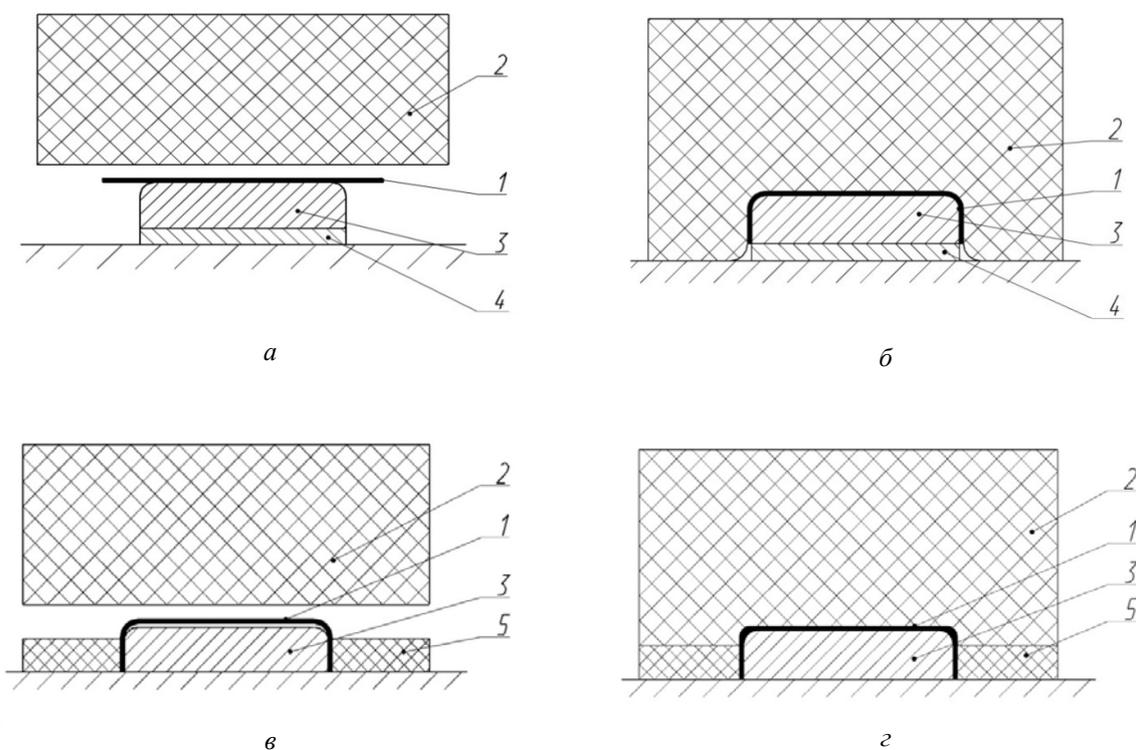


Рис. 1. Физическая модель процесса стеснённого изгиба:

а – до деформирования; б – в конце первого перехода;

в – до начала второго перехода; г – в конце второго перехода;

1 – заготовка; 2 – полиуретан; 3 – формблок; 4 – проставка; 5 – эластичный подпор

### Общая постановка задачи

При проектировании технологических процессов штамповки-гибки требуется определить ряд технологических параметров и спрогнозировать толщину стенки детали на предмет её соответствия техническим требованиям, оговоренным в чертеже. Решению этих вопросов должны предшествовать исследования процесса формоизменения полуфабриката в соответствии с предлагаемой технологией. Исследования в настоящее время подразумевают проведение натурных экспериментов, разработку аналитических моделей и численное моделирование процесса.

Для проведения численных исследований процесса была разработана конечно-элементная модель при использовании следующих допущений:

- нагружение тел считается квазистатическим;
- формблок принимается абсолютно жёстким;
- эластомер-полиуретан СКУ-7Л является несжимаемым, упругим, модуль упругости 10 МПа;
- трение подчиняется закону Амонтона-Кулона.

Входными параметрами численных исследований были приняты материал заготовки, толщина заготовки, превышение борта, радиус кривизны криволинейного борта, радиусгиба (табл. 1, рис. 2).

Таблица 1. Входные параметры

Материал заготовки	Толщина заготовки $S$ , мм	Радиусгиба $r$ , мм	Радиус кривизны криволинейного борта $R$ , мм	Превышение высоты борта $\Delta H$ , мм
Д16АМ	1,5	4	80; 100; 120; 150	0,5; 1,0; 1,5; 1,6; 1,8; 2,0

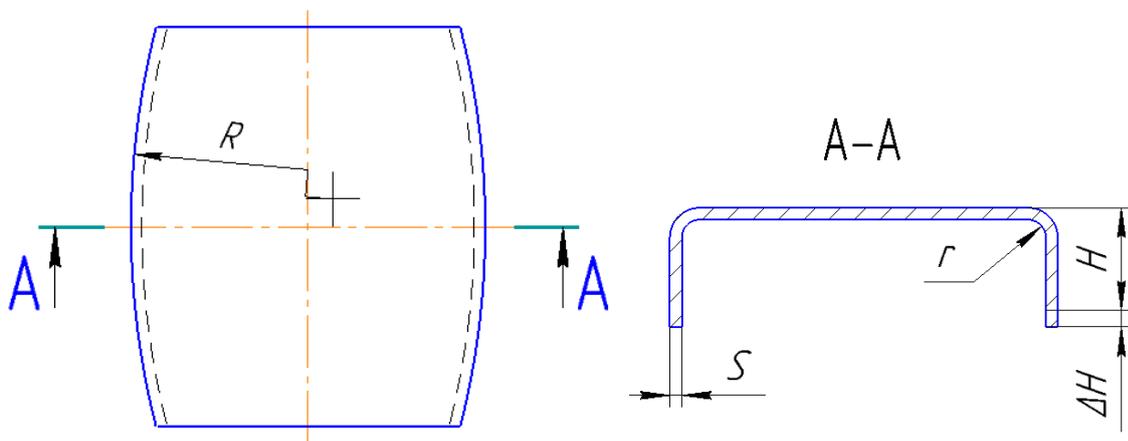


Рис. 2. Параметры детали

Моделирование проводилось с применением программного комплекса «ANSYS/LS-DYNA» и препроцессора LS-PrePost [5]. Рассматривалась четвертая часть геометрической модели ввиду симметричности детали.

3D-модель (рис. 3) была спроектирована в CAD системе и импортирована в программный комплекс «ANSYS/LS-DYNA» через формат Parasolid.

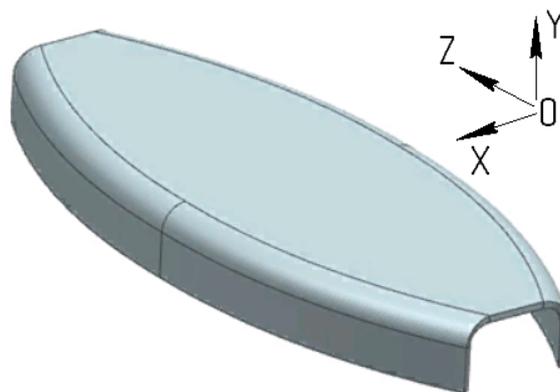


Рис. 3. 3D-модель детали

Геометрическая модель процесса представлена на рис. 4.

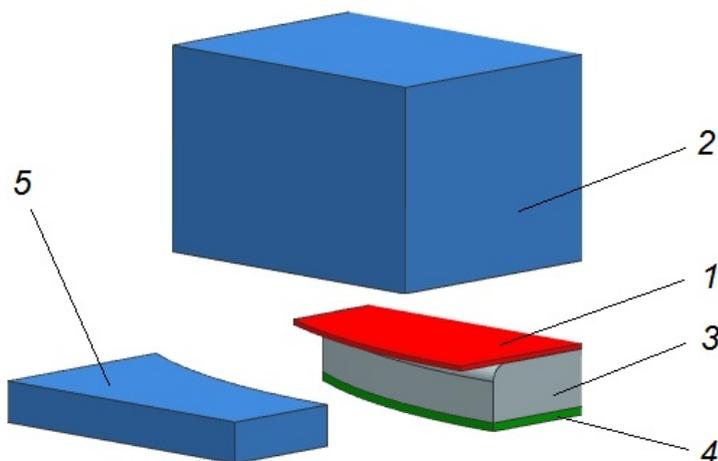


Рис. 4. Геометрическая модель процесса стесненного изгиба:  
1 – заготовка; 2 – полиуретан; 3 – формблок; 4 – эластичная проставка; 5 – эластичный прижим

С использованием разработанной конечноэлементной модели процесса стесненного изгиба изучалось влияние превышения борта на утолщение материала в зонегиба и на величину необходимого давления.

### Основная часть

Определение толщины виртуальной детали для анализа результатов расчёта проводилось в пяти точках по трем сечениям в одной четвертой части детали, что вполне допустимо в силу её симметрии (рис. 5).

Поэтапное формообразование детали при предварительной гибке на первом переходе и в условиях стеснённого изгиба на втором переходе с учетом взаимодействия с эластичной средой представлено на рис. 6 – 9.

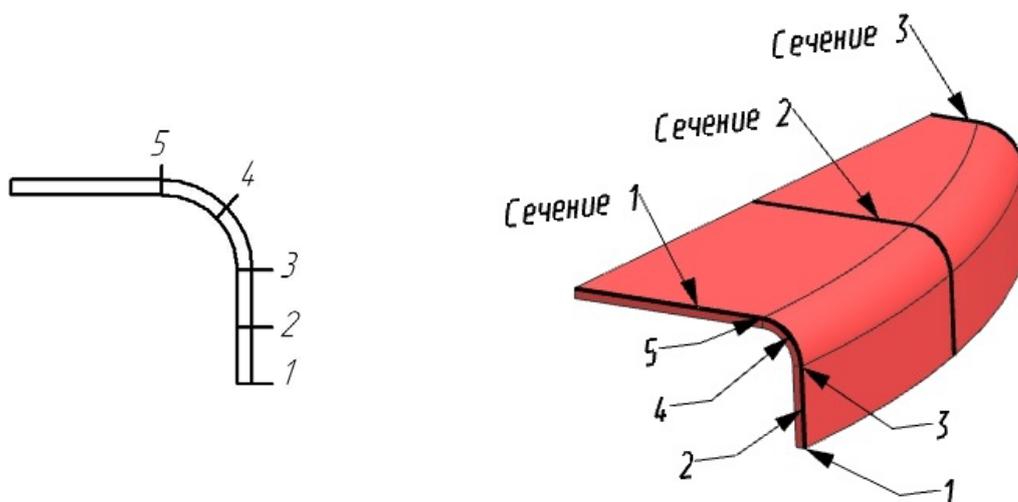


Рис. 5. Точки замера изменения толщины детали

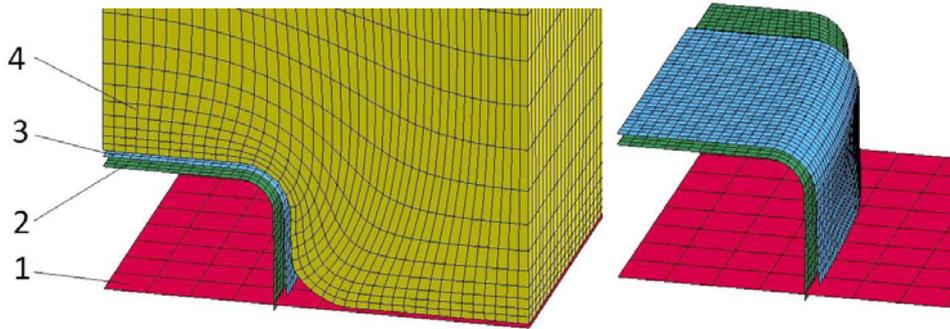


Рис. 6. Конечноэлементная модель процесса стеснённого изгиба в конце первого перехода:  
1 – основание; 2 – формблок; 3 – деталь; 4 – полиуретан

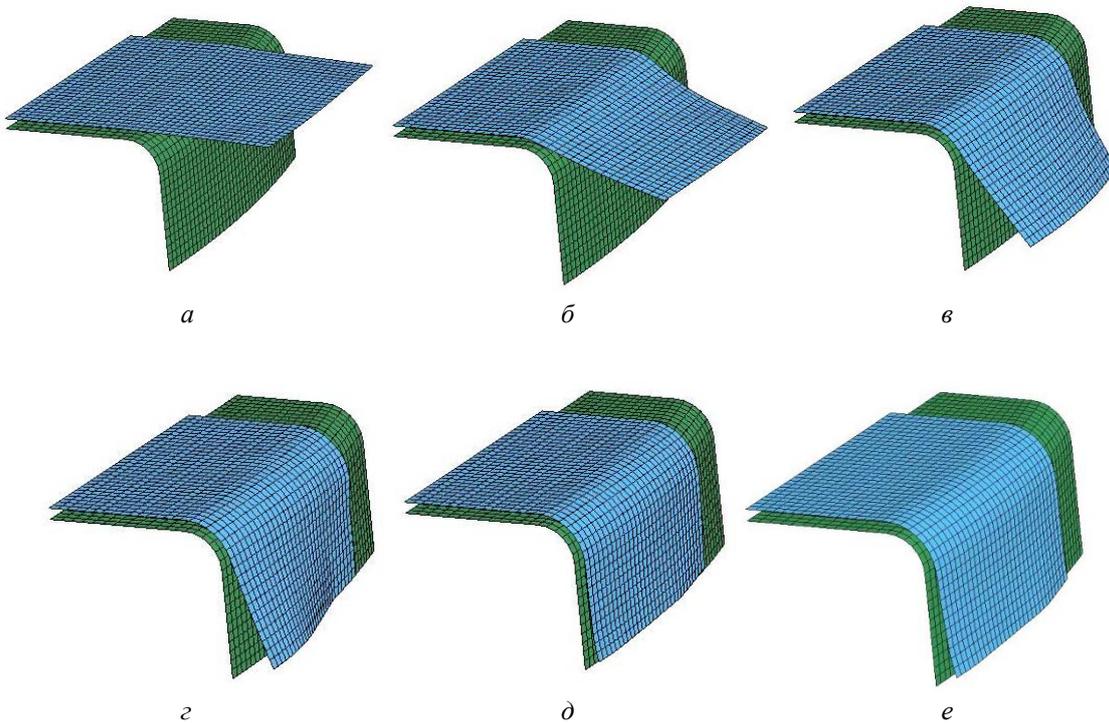


Рис. 7. Этапы формирования детали на первом переходегиба:  
а – начало деформирования; б, в, г – промежуточные стадии процесса деформирования;  
д – завершение деформирования; е – после снятия нагрузки

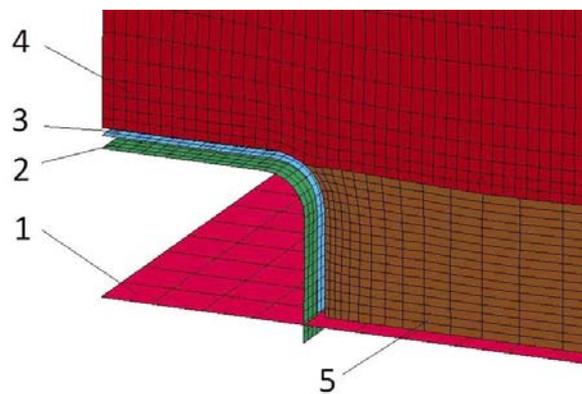


Рис. 8. Конечноэлементная модель процесса стеснённого изгиба в конце второго перехода:  
1 – основание; 2 – формблок; 3 – деталь; 4 – полиуретан; 5 – полиуретановый прижим

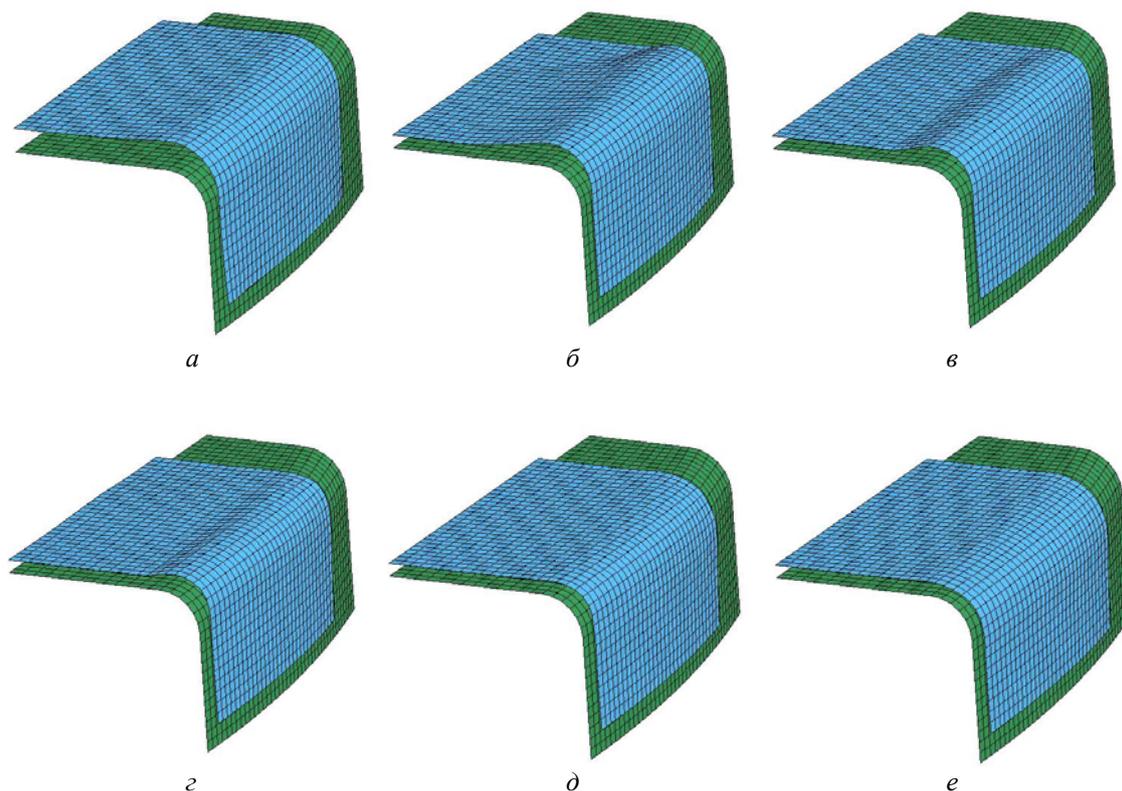


Рис. 9. Этапы формирования детали на втором переходегиба:  
 а – начало деформирования; б, в, г, д – промежуточные стадии процесса деформирования;  
 е – после снятия нагрузки

В результате моделирования получены диаграммы и графики изменения толщины стенки детали для различных этапов деформирования, а именно после первого и второго переходов в отдельности. При этом были определены изменения толщины после первого перехода относительно исходной толщины, а также после второго перехода относительно исходной толщины и толщины после второго перехода. Выяснено, что в конце стеснённого изгиба (рис. 10) наблюдается увеличение толщины материала детали в зоне точки 4 (радиусной зоне) между сечениями 1 и 3. При этом больший набор толщины происходит в точках 3 и 5 (рис. 5).

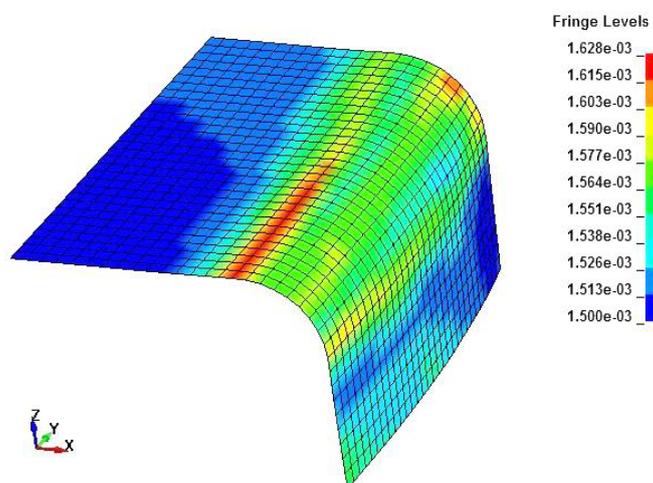


Рис. 10. Диаграмма изменения толщины детали после второго перехода ( $R = 150$  мм,  $\Delta H = 1,0$  мм)

Получены также графические зависимости величины необходимого давления и деформаций по толщине от радиуса кривизны борта в плане  $R$  и превышения борта  $\Delta H$ . Примеры этих зависимостей приведены на рис. 11, 12. Деформации по толщине представлены для конечной толщины относительно начальной толщины стенки заготовки. Из графиков следует, что утолщение стенки детали, осреднённое по длине дуги зоны радиусагиба, составляет 8...10% при превышении борта, равном толщине стенки.

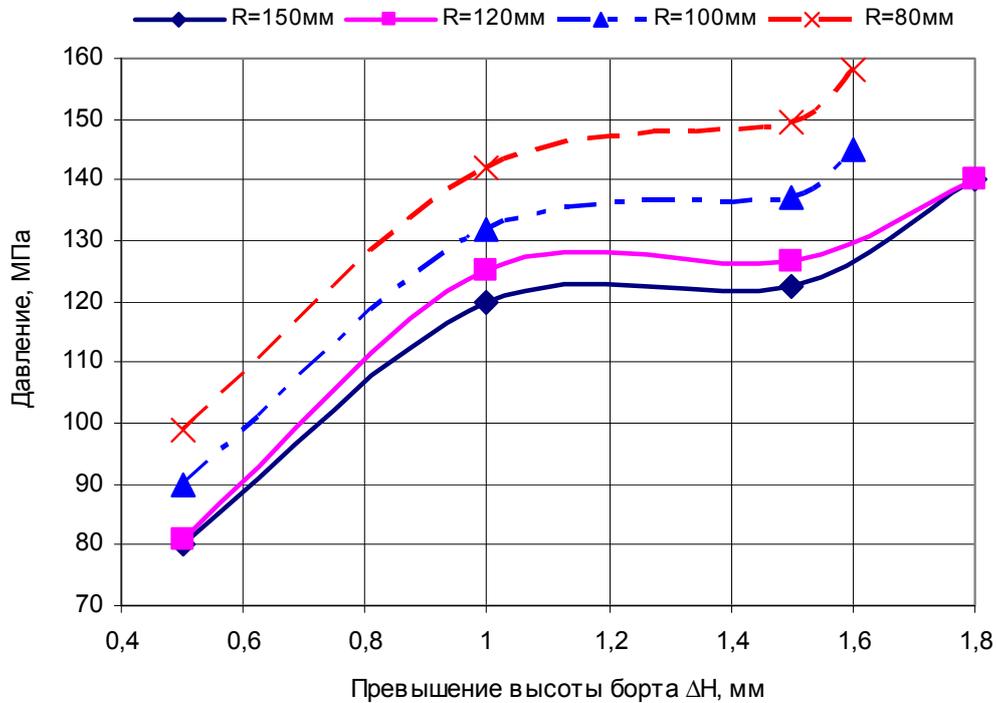


Рис. 11. Зависимость изменения давления эластичной среды от превышения высоты борта при  $r = 4$  мм,  $S = 1,5$  мм для материала Д16АМ

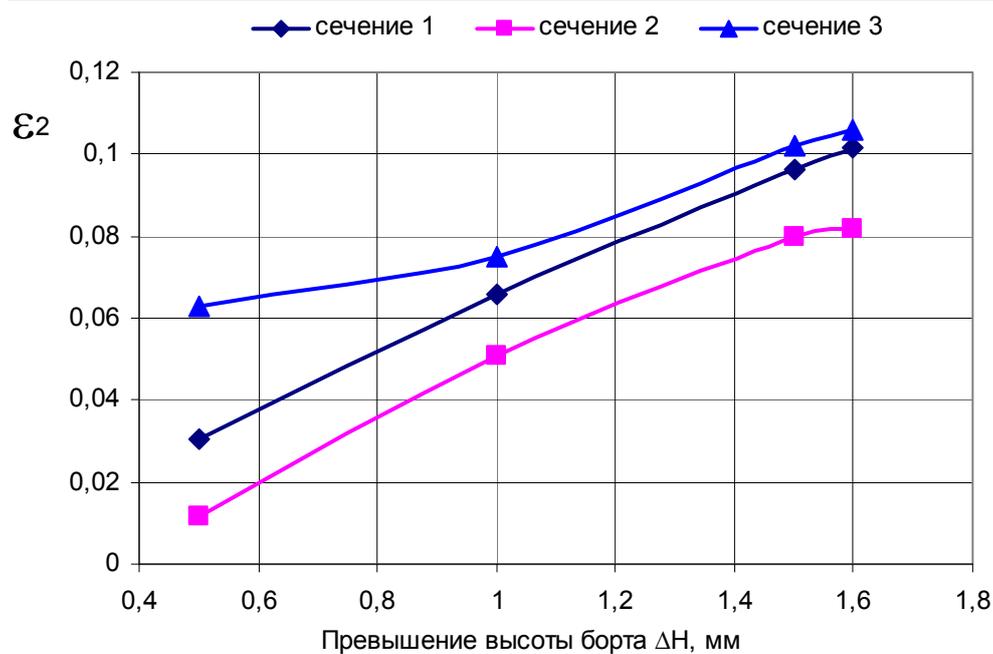
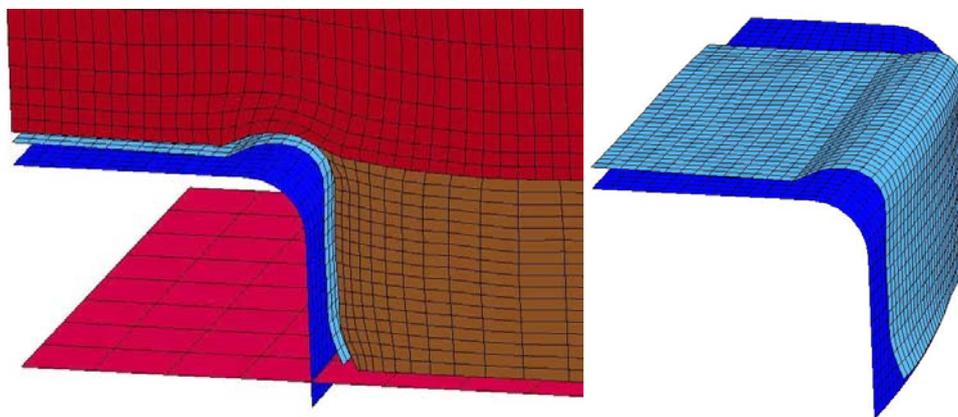


Рис. 12. Зависимость осреднённого по точкам 3, 4, 5 утолщения стенки от превышения высоты борта при  $r = 4$  мм,  $S = 1,5$  мм,  $R = 80$  мм для материала Д16АМ

Выявлено также, что при превышении высоты борта, равном 2 мм, для радиусов кривизны 120 мм и 150 мм борт детали теряет устойчивость и в радиусной зоне начинает появляться складка (рис. 13).

Для радиусов кривизны борта 100 мм и 80 мм такая складка образуется при превышении высоты борта, равном 1,8 мм, то есть вероятность появления складок растёт с увеличением кривизны борта в плане и превышения высоты борта.



*Рис. 13. Дефекты при гибке*

### **Заключение**

При проведении численных исследований стеснённого изгиба криволинейных бортов листовых деталей эластомером получены следующие результаты:

1. Получены диаграммы изменения толщины детали для различных этапов деформирования.

2. Установлено, что с увеличением превышения борта наблюдается рост утолщения в зонегиба, приемлемая величина превышения борта  $\Delta H$  составляет не более одной толщины стенки  $S$ .

3. Наибольшее утолщение стенки на этапе стеснённогогиба происходит в точках 3 и 5 сечений 1 и 2 (рис. 5). Набор толщины в зоне точки 4 (радиусной зоне) сечения 3 наблюдается в большей степени на этапе свободнойгибки. При уменьшении радиуса кривизны борта набор толщины на первом переходегиба происходит интенсивнее.

4. Увеличенное превышение борта приводит к потере устойчивости стенки и складкообразованию в радиусной зоне, вероятность чего увеличивается с ростом кривизны борта в плане.

5. Установлено, что с увеличением радиуса кривизны борта в плане наблюдается увеличение утолщения стенки в зоне сечения 2.

6. Стеснённый изгиб при превышении борта, равном толщине стенки, приводит к осреднённому утолщению радиусной зоны детали на величину до 10% относительно начальной толщины.

7. Выявлено, что давление, необходимое для реализации процесса стеснённого изгиба, монотонно возрастает с уменьшением радиуса кривизны борта и немонотонно увеличивается с ростом превышения борта.

### Библиографический список

1. Моисеев В.К., Мантусов М.Н., Плотников А.Н., Ломовской О.В., Шаров А.А. Совершенствование технологии гибки криволинейных бортов деталей самолётов // Известия Самарского научного центра РАН. 2018. Т. 20, № 4 (3). С. 441-444.
2. Мантусов М.Н., Моисеев В.К., Шаров А.А., Громова Е.Г., Рыжаков С.Г. Штамповка листовых деталей с криволинейными бортами эластичным материалом // Известия Самарского научного центра РАН. 2018. Т. 20, № 4 (3). С. 332-336.
3. Гречников Ф.В., Моисеев В.К., Ломовской О.В., Шаров А.А., Мантусов М.Н. Штамповка с тангенциальным сжатием высокоточных листовых деталей // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2019. № 7. С. 3-9.
4. Moiseyev V.K., Sharov A.A., Gromova E.G., Mantusov M.N. Results of the sheet parts curved edges constrained bending with elastomer // Key Engineering Materials. 2017. V. 746. P. 285-289. DOI: 10.4028/www.scientific.net/kem.746.285
5. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Электронная библиотека механики и физики. Лекции по ANSYS/LS-DYNA и основам LS-PREPOST. Ч. 3. Основные элементы графического интерфейса LS-PREPOST. Решение задач с помощью LS-DYNA Solver. М.: БГУ, 2013. 74 с.

### RESEARCH OF RESTRAINED BENDING OF AIRCRAFT PARTS WITH CURVED SIDES

© 2021

- E. G. Gromova** Candidate of Science (Engineering), Associate Professor, Department of Aircraft Production and Quality Control in Mechanical Engineering; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [pla.gromova@ya.ru](mailto:pla.gromova@ya.ru)
- V. K. Moiseev** Doctor of Science (Engineering), Professor, Department of Aircraft Production and Quality Control in Mechanical Engineering; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [moiseevvk@mail.ru](mailto:moiseevvk@mail.ru)
- A. A. Sharov** Candidate of Science (Engineering), Associate Professor, Department of Aircraft Production and Quality Control in Mechanical Engineering; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [aa.sharov@ya.ru](mailto:aa.sharov@ya.ru)
- O. V. Lomovskoi** Candidate of Science (Engineering), Associate Professor, Department of Aircraft Production and Quality Control in Mechanical Engineering; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [oleg.lomovskoi@ya.ru](mailto:oleg.lomovskoi@ya.ru)
- M. N. Mantusov** Leading Engineer; Ulyanovsk branch of Tupolev Design Bureau, Ulyanovsk, Russian Federation; [mishaufkb@ya.ru](mailto:mishaufkb@ya.ru)
- A. N. Plotnikov** Candidate of Science (Engineering), Associate Professor, Department of Aircraft Production and Quality Control in Mechanical Engineering; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [anplotnikov@ya.ru](mailto:anplotnikov@ya.ru)

In the article the authors present a method of restrained elastomer bending of aircraft sheet parts with curved sides. Manufacturing of a part is carried out in two transitions; as a result of the first transition a part with thinning in the radial part is obtained, the second transition is carried out on the mold block of reduced height, as a result of which the resulting wave of excess material deforms along the radius of the bending mandrel. In the finished part, we can observe an increase in the thickness of the workpiece in the zone of the bend radius. Numerical studies of the process were conducted using the

ANSYS/LS-DYNA software complex. As part of the study, the process flow model was worked out, the distribution of thickness of the material of the part over the entire surface under consideration was obtained, and graphs were plotted showing the elastomer pressure distributions and the deformation of the material of the part at characteristic points.

*Aircraft manufacturing technology; elastomer stamping; restrained bending; allowance; numerical simulation*

---

*Citation:* Gromova E.G., Moiseev V.K., Sharov A.A., Lomovskoi O.V., Mantusov M.N., Plotnikov A.N. Research of restrained bending of aircraft parts with curved sides. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2021. V. 20, no. 1. P. 65-74. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-65-74

## References

1. Moiseev V.K., Mantusov M.N., Plotnikov A.N., Lomovskoi O.V., Sharov A.A. Improving the technology of bending curved sides of aircraft parts. *Izvestiya Samarskogo Nauchnogo Tsentra RAN*. 2018. V. 20, no. 4 (3). P. 441-444. (In Russ.)
2. Mantusov M.N., Moiseev V.K., Sharov A.A., Gromova E.G., Ryzhakov S.G. Stamping of sheet details with curvilinear sides by elastic material. *Izvestiya Samarskogo Nauchnogo Tsentra RAN*. 2018. V. 20, no. 4 (3). P. 332-336. (In Russ.)
3. Grechnikov F.V., Moiseev V.K., Lomovskoy O.V., Sharov A.A., Mantusov M.N. Stamping with tangential compression of high-precision sheet metal parts. *Forging and Stamping Production. Material Working by Pressure*. 2019. No. 7. P. 3-9. (In Russ.)
4. Moiseyev V.K., Sharov A.A., Gromova E.G., Mantusov M.N. Results of the sheet parts curved edges constrained bending with elastomer. *Key Engineering Materials*. 2017. V. 746. P. 285-289. DOI: 10.4028/www.scientific.net/kem.746.285
5. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I. *Elektronnaya biblioteka mekhaniki i fiziki. Lektsii po ANSYS/LS-DYNA i osnovam LS-PREPOST. Ch. 3. Osnovnye elementy graficheskogo interfeysa LS-PREPOST. Reshenie zadach s pomoshch'yu LS-DYNA Solver* [Electronic library of Mechanics and Physics. Lectures on ANSYS/LS-DYNA and the basics of LS-PREPOST. The basic elements of the graphical interface of LS-PREPOST. Solving problems with LS-DYNA Solver]. Minsk: Belarusian State University Publ., 2013. 74 p.

## ЦИФРОВОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТЕРМОРАЗМЕРОСТАБИЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СЛОИСТОГО УГЛЕПЛАСТИКА

© 2021

- В. А. Комаров** доктор технических наук, профессор кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов, директор научно-образовательного центра авиационных конструкций; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [vkomarov@ssau.ru](mailto:vkomarov@ssau.ru)
- Е. А. Кишов** кандидат технических наук, доцент кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [kishov.ea@ssau.ru](mailto:kishov.ea@ssau.ru)
- О. Г. Лайкова** заместитель генерального конструктора по научной работе; Специальное конструкторско-технологическое бюро «Пластик», г. Сызрань; [opriokr-prg@sktb-plastik.ru](mailto:opriokr-prg@sktb-plastik.ru)
- А. А. Павлов** инженер научно-образовательного центра авиационных конструкций; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [alex-alex.pavlov@yandex.ru](mailto:alex-alex.pavlov@yandex.ru)

Рассматриваются особенности проектирования терморазмеростабильных конструкций. Предлагается новая методика проектирования, в которой конечные элементы используются как язык для описания силовой схемы конструкции и распределения материала в ней с возможностью задания желаемой структуры слоистого композита. Проектная задача формулируется в терминах нелинейного математического программирования. Для её приближенного решения в интерактивном режиме используется последовательность цифровых моделей. Обсуждаются особенности конечноэлементного моделирования тонкостенных конструкций из слоистого композиционного материала. Методика демонстрируется на примере разработки крупноразмерного корпуса космического телескопа.

*Конструкция; телескоп; корпус; размеростабильность; углепластик; проектирование; цифровая модель*

---

**Цитирование:** Комаров В.А., Кишов Е.А., Лайкова О.Г., Павлов А.А. Цифровое проектирование терморазмеростабильных конструкций из слоистого углепластика // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 1. С. 75-86. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-75-86

### Введение

В статье «Точное проектирование» [1] описаны основные идеи новой проектной парадигмы, получившей название «concurrent design». Использовать этот термин предложил профессор Weisshaag Т.А. во время стажировки одного из авторов статьи в Purdue University, USA, в 1997 году при обсуждении путей модернизации процесса разработки авиационных конструкций [2]. Слово «concurrent» в данном контексте употреблено в смысле поймать «на мушку» или «попасть точно в цель» с учётом особенностей американского научного сленга, который часто использует термины из спортивного лексикона.

Идея нового порядка проектирования авиационных конструкций возникла в 1980-е в ходе совместных работ над проектами ряда самолётов сотруди́ков отдела

прочности ОКБ им. С.В. Ильюшина и лаборатории САПР Куйбышевского авиационного института. В этот период в ОКБ был освоен и начал широко применяться в расчётах на прочность метод конечных элементов (МКЭ), который показывал высокую точность и давал понимание силовой работы конструкции в целом. В традиционном порядке проектирования подбор поперечных сечений силовых элементов конструкций выполнялся на основе приближенных, так называемых «проектировочных» расчётов, которые часто называют также инженерными за простоту и скорость. МКЭ с подробным разбиением конструкции на элементы использовался в то время в основном в «поверочных» расчётах. Они выявляли ошибки инженерных расчётов и приводили к корректировкам конструкций, затягиванию и удорожанию процесса проектирования. Трудоёмкость поверочных расчётов по сборочным и детальным чертежам была достаточно большой из-за избыточной информации этих документов на бумажных носителях. Кроме того, технические решения в ряде случаев не находили адекватного описания имеющимся набором конечных элементов или требовали слишком больших вычислительных ресурсов. Для исключения этих двух узких мест в процессе проектирования было предложено создавать конечноэлементную модель всей конструкции будущего самолёта непосредственно после принятия решений о его внешних формах и компоновке внутреннего пространства. При таком подходе конечные элементы – стержни, балки, пластины, оболочки, мембраны и т.п. – использовались как язык для математического описания силовой конструкции подобно сборке моделей в игре LEGO. Впервые данный подход был использован при разработке всей конструкции планера самолета Ил-96 в целом и дал ощутимый выигрыш в сроках и качестве выполнения проектных работ. Ускорение проектирования достигалось в основном за счёт сокращения количества доработок. Улучшение качества проектирования обеспечивалось применением методов оптимизации при детальном конструировании и возможностью анализировать стыки агрегатов и места с концентраторами напряжений. Данные обстоятельства особенно важны для самолётов с большим ресурсом планера. Успеху быстрого внедрения и развития нового порядка проектирования способствовали усилия разработчиков МКЭ системы РИПАК, в которую был включён ряд специальных элементов, отражающих специфику авиационных конструкций. Например, фрагмент трёхслойной конструкции для описания панелей пола; стержни, мембраны и пластины, подкреплённые ребрами, с эксцентриситетами по отношению к узлам сборки в конструкциях панелей крыла и фюзеляжа и т.п. [3]. Зарождение и развитие нового порядка проектирования описано в [4].

Конечноэлементное представление силовой конструкции на ранних стадиях проектирования даёт значительно большую ясность и информативность для её дальнейшей разработки, чем вербальное описание с использованием терминов и понятий типа: монококовая, полумонококовая, балочно-стрингерная, оболочечная конструкция и т.п. Библиотеки конечных элементов мощных CAE-систем, таких как NASTRAN, ANSYS и ряд других, дают возможность задавать механические характеристики каждого элемента, включая анизотропию и нелинейность. Кроме того, данные системы позволяют вычислять эти и подобные характеристики через параметры структуры материала. Широкие возможности расчёта НДС конструкций из новых материалов позволяют ставить и решать задачи точного проектирования конструкций, включая выбор материала и его структуры.

Цель данной работы – показать применение новой проектной парадигмы при разработке конструкции из слоистых углепластиков с широким спектром функциональных ограничений.

## Цифровое проектирование терморазмеростабильных конструкций

Слоистые угле- и стеклопластики имеют высокие удельные характеристики прочности и жёсткости. Кроме того, углеродные волокна обладают уникальным физическим свойством – имеют отрицательную величину коэффициента линейного термического расширения (КЛТР), что позволяет при определённых соотношениях количества полимерного связующего и волокнистого наполнителя получать величину этого коэффициента близкую к нулю в направлении армирующего волокна. При этом пакет с симметричной укладкой относительно срединной поверхности восьми однонаправленных слоёв  $[0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ]_S$  обладает свойством квазиизотропности в плоскости пакета [5]. Теоретический анализ и экспериментальная проверка показывают устойчивую возможность достижения КЛТР порядка  $1 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$  [6]. В связи с этим слоистый углепластик представляется перспективным для создания терморазмеростабильных конструкций аэрокосмического назначения – антенн и корпусов оптико-электронных устройств.

Проектирование композитов обладает рядом особенностей по сравнению с традиционными материалами. Это анизотропия, зависимость термомеханических характеристик от внутренней структуры материала, дискретный характер проектных переменных – геометрических размеров поперечных сечений элементов конструкции, а также необходимость проверки прочности через довольно сложные критерии.

Рассмотрим процесс цифрового проектирования, сохраняя общность рассуждений и подходов, на демонстрационном примере разработки несущей конструкции терморазмеростабильного корпуса космического телескопа, оптическая система которого построена по схеме Ричи-Кретьена (рис. 1) [7].

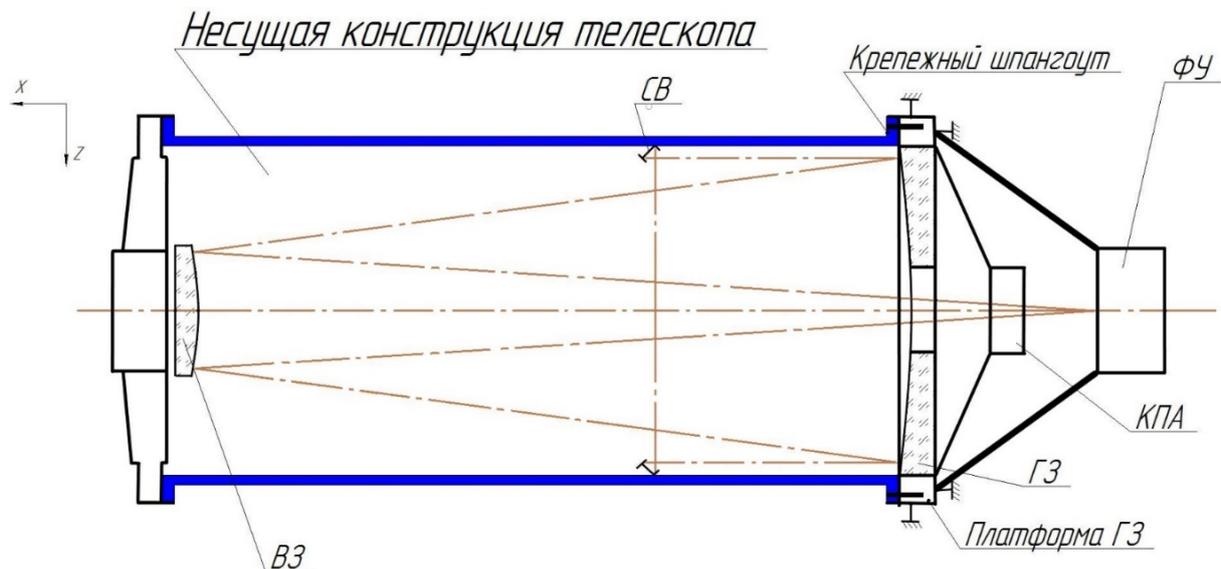


Рис. 1. Оптическая схема (ФУ – фокальный узел, КПА – корректор полевых aberrаций, СВ – световозвращатель, ВЗ – вспомогательное зеркало) и схема закрепления телескопа ОЭК ВР в конструкции КА [8]

Будем рассматривать конструкцию, которая состоит из цилиндрической оболочки с вырезами, подкрепляющими ребрами, расположенными снаружи, и фланцем для стыковки с другой частью корпуса. Выбор данного конструктивного решения – силовой схемы – предложен в [8] с учётом ряда требований по сборке оптикоэлектронной схемы, её функционированию и простоте изготовления с возможно меньшей массой.

### Постановка задачи

После выбора силовой схемы необходимо найти рациональное распределение материала по элементам конструкции, то есть выполнить «образмеривание» (sizing) [9]. В терминах нелинейного математического программирования данная задача может быть сформулирована следующим образом: необходимо найти вектор  $X^*$ , при котором

$$f(X^*) \leq f(X) \forall X \in \Omega, \quad (1)$$

где  $\Omega = \{X : g_j(X) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m\}$  – область допустимых проектов;  $X$  – вектор проектных переменных;  $f(X)$  – целевая функция;  $g_j(X)$  – ограничения;  $j$  – номер ограничения.

Рассматриваемая задача может быть конкретизирована следующим образом.

Целевая функция – масса конструкции:

$$f(X^*) = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i = \sum_{i=1}^n \delta_i S_i \rho_i \rightarrow \min, \quad (2)$$

где  $X = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}^T$  – вектор проектных переменных толщин  $\delta$  конечных элементов из которых предполагается собрать виртуально корпус;  $S_i$  – площадь и номер элемента;  $\Omega$  – область допустимых проектов, которая определяется ограничением на величины переменных:

$$a_i \leq \delta_i \leq b_i \quad (3)$$

и ограничениями по функционированию корпуса на отдельных этапах жизненного цикла. Это:

1. Ограничения на прочность для каждого слоя каждого элемента, выполнение которых проверяется через критерий прочности вида [10]:

$$\varphi = \max \left( \frac{\sigma_x}{[\sigma_x]}, \frac{\sigma_y}{[\sigma_y]}, \frac{\sigma_z}{[\sigma_z]}, \frac{\tau_{xy}}{[\tau_{xy}]}, \frac{\tau_{xz}}{[\tau_{xz}]}, \frac{\tau_{zy}}{[\tau_{zy}]} \right) < 1, \quad (4)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  – действующие нормальные и касательные напряжения;  $[\sigma_x], [\sigma_y], [\sigma_z], [\tau_{xy}], [\tau_{xz}], [\tau_{yz}]$  – предельные характеристики прочности;  $\varphi$  – индекс разрушения.

2. Ограничение по жёсткости на величину минимальной собственной частоты корпуса:

$$\omega_l > 40 \text{ Гц}, \quad (5)$$

где  $\omega_l$  минимальная собственная частота конструкции корпуса с сосредоточенной массой оптического элемента – вспомогательного зеркала (ВЗ) (см. рис. 1).

3. Ограничение по деформациям корпуса при равномерном и неравномерном изменении поля температур в диапазоне  $\pm 5^\circ\text{C}$ :

$$\begin{aligned}\Delta_x &< 0,02 \text{ мм,} \\ \Delta_y, \Delta_z &< 0,03 \text{ мм,}\end{aligned}\tag{6}$$

где  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  – линейные изменения расстояния между стыковочными фланцами.

В связи с большим числом проектных переменных ( $n = 10^3 \dots 10^6$ ) и их дискретным характером (изменение толщины пакета с сохранением квазиизотропности допустимо только ступенчато – кратно толщине восьми однонаправленных слоёв или четырёх перекрёстно-армированных слоёв ткани) в данной задаче трудно рассчитывать на использование известных универсальных методов, алгоритмов и программ оптимизации. Кроме того, при решении подобных задач часто оказывается полезным, особенно с точки зрения технологичности, объединение ряда элементов в группы с одинаковой толщиной, как показано в [11]. Поэтому далее рассматривается создание и использование в интерактивном режиме последовательности цифровых моделей для решения поставленной задачи, от выбора силовой схемы до получения 3D-модели конструкции корпуса, удовлетворяющей всем геометрическим и функциональным ограничениям.

В качестве основного инструмента анализа напряжённо-деформированного состояния (НДС) конструкции предполагается использование метода конечных элементов в системе автоматизации инженерных расчётов (CAE) высокого уровня. В данной работе используется система ANSYS (лицензия ANSYS 16.0 Academic Research Mechanical and CFD, Samara University).

### Цифровое описание силовой схемы

На рис. 2 показано математическое описание принятой силовой схемы корпусной конструкции телескопа. Вначале задаются поверхности, которые описывают границы внутреннего пространства корпуса телескопа, необходимые эксплуатационные вырезы и наружные поверхности для локации и последующей генерации ребер. Эту пространственную модель поверхностей можно рассматривать как своего рода цифровой аналог теоретического чертежа, принятого в машиностроении.

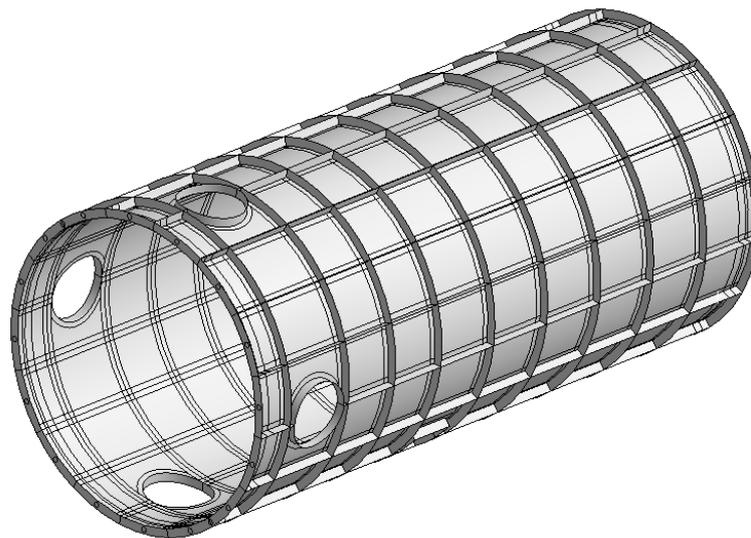


Рис. 2. Поверхностная геометрическая модель описания силовой схемы корпуса телескопа

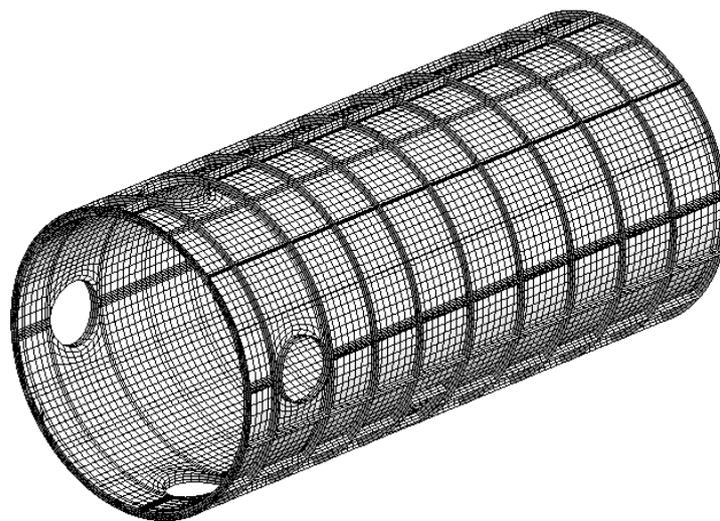
Здесь цилиндрическая поверхность не является срединной поверхностью реальной конструкции. Она представляет собой поверхность внутреннего теоретического контура изделия.

### **Выбор конечных элементов**

Для материализации проекта тонкостенной конструкции из слоистого композита представляется удобным использование четырёхузловых конечных элементов SHELL181 с шестью степенями свободы в узлах. Использование данного сложного элемента по сравнению с простыми мембранными освобождает конструктора от проблемы обеспечения геометрической неизменяемости ансамбля элементов. Данный элемент позволяет достаточно точно моделировать тонкостенные конструкции, при этом экономно расходуя вычислительные ресурсы по сравнению, например, с 8-узловым твердотельным элементом. Причина такой эффективности состоит в описании изгибного поведения конечного элемента на основе теории Миндлина-Рейсснера (гипотеза прямых нормалей, в общем случае не перпендикулярных срединной поверхности). Элемент допускает слоистую формулировку, причём для изменения толщин и количества слоёв не требуется перестроения конечноэлементной сетки. SHELL181 даёт возможность задания широкого спектра механических характеристик материала и выдачи результатов расчётов НДС с учётом особенностей решаемых задач (напряжений, деформаций, критериев прочности и т.д.). Жёсткостные характеристики, а также тензоры напряжений и деформаций определяются в системе координат элемента. Элемент допускает одностороннее смещение материала относительно поверхности теоретического контура, на котором размещаются узлы.

### **Генерация конечноэлементной сетки**

На рис. 3 показана сетка конечных элементов, построенная на основе поверхностной геометрической модели (см. рис. 2) в автоматическом режиме средствами препроцессора ANSYS Mechanical. Сетка содержит преимущественно четырёхузловые элементы.



*Рис. 3. Конечноэлементная сетка*

Узлы элементов располагаются строго на поверхностях. В целях корректного представления жёсткости цилиндрической части конструкции её элементам присвоено смещение материала относительно нейтральной поверхности на величину, равную половине толщины пакета слоёв. Элементы обрешения такого смещения не имеют.

### Задание материала для расчётной модели

Элемент SHELL181 требует для каждого ортотропного слоя 9 упругих констант: три модуля упругости по трём осям ( $E_x, E_y, E_z$ ), три модуля сдвига по трём плоскостям ( $G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}$ ) и три коэффициента Пуассона по трём плоскостям ( $\mu_{xy}, \mu_{yz}, \mu_{xz}$ ). В рассматриваемой задаче в конечноэлементной модели для слоя использована линейная ортотропная модель материала на основе углеродной ленты ЛУ-П/0,1 и связующего ЭНФБ с характеристиками из [6].

Ввиду того, что конструкция подвержена действию инерционных нагрузок, в свойствах материала также необходимо задать плотность:  $\rho = 1,5 \text{ г/см}^3$ . Для оценки прочности использовались значения, приведённые в [6].

### Учёт требований прочности

Расчёт конструкции на прочность проведён более чем для 20 случаев нагружения. Для каждого случая задавались значения ускорений по трём осям, определяемые как произведение ускорения свободного падения на соответствующую расчётную перегрузку. Перегрузки достигают величин порядка 6 единиц. Наиболее критичным является случай транспортирования автомобильным транспортом с опиранием только по торцевому шпангоуту. Тем не менее анализ распределения индексов разрушения в элементах по критерию максимальных напряжений (4) для всех случаев нагружения показывает, что конструкция удовлетворяет требованиям прочности. При этом следует заметить, что во всех расчётах НДС в узловых нагрузках учитывалась масса дополнительных конструктивных элементов (крепёжные металлические элементы). По статистике для конструкций данного класса дополнительная масса составляет 10...15%. В связи с тем, что дополнительные элементы довольно равномерно распределены по всей конструкции, в прочностных и частотных расчётах узловых сил эта дополнительная масса учитывалась искусственным увеличением плотности материала на 15%.

### Учёт требований по величине собственных колебаний

Одним из важнейших требований к корпусным крупногабаритным конструкциям являются частотные характеристики. В частности, рассматриваемая конструкция должна иметь минимальную частоту  $\omega \geq 40 \text{ Гц}$ . Расчёт конструкции с описанным распределением материала при закреплении по 16 крепёжным элементам дал частоту  $\omega_1 = 37,4 \text{ Гц}$ , что не удовлетворяет предъявляемым требованиям. Анализ деформаций конструкции по первой форме колебаний корпуса (рис. 4, а) наглядно показывает, что зоны оболочки, прилегающие к торцевым фланцам, при колебаниях имеют высокую удельную энергию деформаций и поэтому для повышения частоты в эти места целесообразно ввести дополнительный материал (рис. 4, б) [12]. На рис. 4, б показано групповое увеличение толщин в трёх кольцевых секциях оболочки, выбранное с учётом требований технологичности. Модальный анализ конструкции корпуса с показанными усилениями даёт первую собственную частоту  $\omega_1 = 39,9 \text{ Гц}$ .

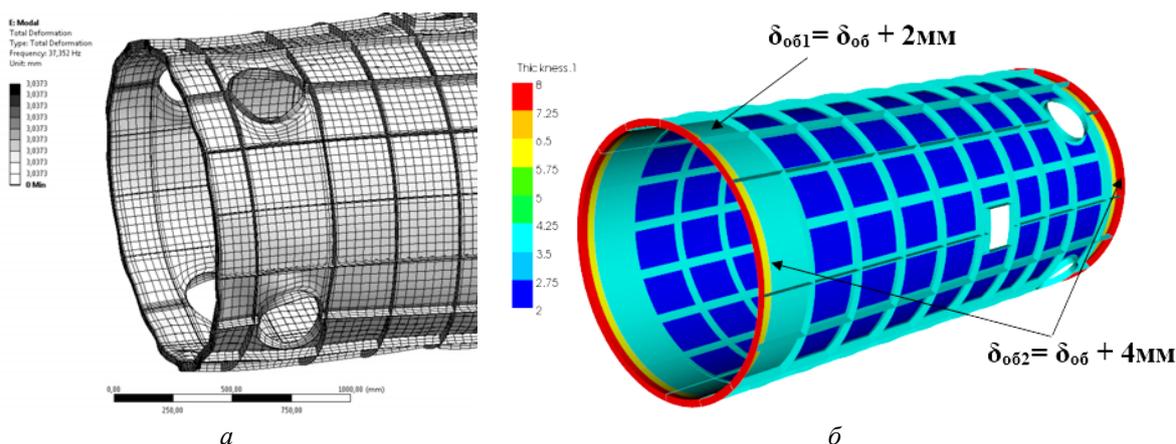


Рис. 4. Результаты расчёта конструкции:  
 а – деформации корпуса телескопа по первой форме колебаний для исходного варианта конструкции при соединении корпуса телескопа с ответной частью по 16 узлам;  
 б – усиления конструкции корпуса телескопа

Частотным анализом конструкции выявлена также повышенная чувствительность частот 1-го и 2-го тона к жесткости закрепления конструкции на платформе главного зеркала. Поэтому для поднятия первой собственной частоты выработана рекомендация – обеспечить сплошное опирание фланца, что технологически может быть реализовано прокладкой и клеевой фиксацией углепластиковых элементов по всему контуру. При данном закреплении первая собственная частота колебаний корпуса телескопа увеличивается до  $\omega_1 = 42,2$  Гц. Общее увеличение массы при этом составляет 7,6 кг. Таким образом, найдено конструктивное решение повышения первой собственной частоты на 12,8% при увеличении массы на 8,7%.

Результаты модального анализа для рассмотренных вариантов распределения материала и соединения корпуса телескопа с ответной частью приведены в таблице.

Таблица. Результаты модального анализа рассмотренных вариантов корпуса телескопа

Форма колебаний	$\omega$ , Гц		
	Закрепление по 16 точкам		Закрепление по фланцу
	Исходная конструкция	Усиленная конструкция	
1	37,4	39,9	42,2
2	38,8	41,5	44,7
3	101,9	102,0	104,7

Проведённый анализ и синтез конструкции корпуса позволил получить рациональное распределение дополнительного материала и разработать рекомендации по закреплению, которые обеспечивают выполнение требований по жесткостным характеристикам.

### Контроль тепловых деформаций

Одним из важнейших критериев функциональной эффективности разработанной конструкции является сохранение ряда критических размеров при полном или частичном нагреве (охлаждении) в условиях космического пространства. С целью количественной оценки стабильности положений главного и вторичного зеркал с использованием экспериментальных данных по свойствам материала выполнялся контрольный расчет перемещений корпуса вдоль осей координат  $X$  и  $Y$  при равномерном нагреве на

$\Delta T = 5^{\circ}\text{C}$ . Для этого расчётного случая смещение вторичного зеркала относительно главного вдоль осей  $X$  и  $Y$  составило 18 и 5 мкм соответственно, что удовлетворяет предъявляемым требованиям по размерной стабильности.

Представляет интерес анализ размерной стабильности корпуса при неравномерном нагреве или охлаждении. Расчёт конструкции при неравномерном воздействии температурной нагрузки выполнен для случая нагрева на  $\Delta T = 5^{\circ}\text{C}$  половины корпуса. Результаты расчёта абсолютных деформаций (полных перемещений) корпуса приведены на рис. 5.

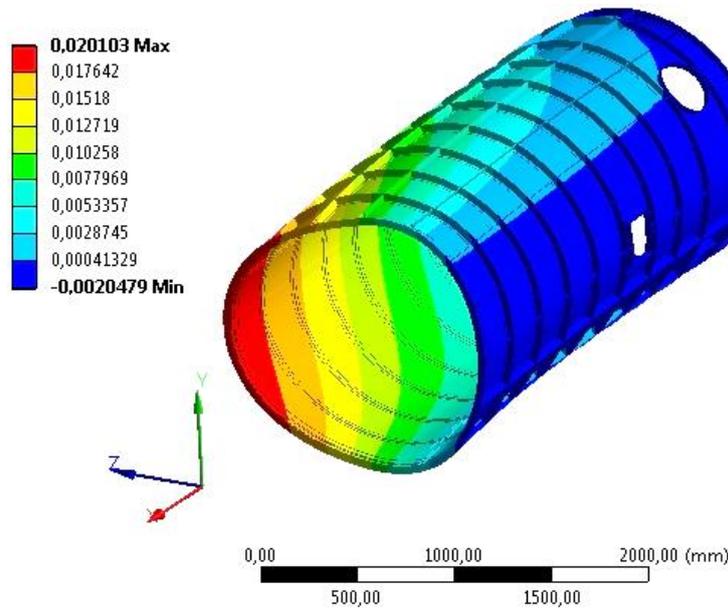


Рис. 5. Картина полных перемещений корпуса телескопа при нагреве половины конструкции относительно плоскости  $XOY$  на  $\Delta T = 5^{\circ}\text{C}$

Цифровые характеристики искажения формы корпусной конструкции телескопа для данного расчётного случая составили: разворот ВЗ вокруг осей  $Y, Z - 3''$ , смещение ВЗ относительно ГЗ вдоль оси  $OX - 20$  мкм, что также удовлетворяет предъявляемым требованиям.

### Формирование 3D-модели

На основе информации о толщинах конечных элементов строится компоновочная 3D-модель корпуса, которая далее передаётся конструкторам и технологам для проработки закладных деталей в местах навески оборудования. На рис. 6 показан корпус телескопа, изготовленный методом вакуумного формования.

Масса изготовленного корпуса больше теоретической, подсчитанной через конечные элементы по (2), на 14% за счёт добавления металлических вкладышей и галтелей в основании рёбер на этапе формования конструкции.

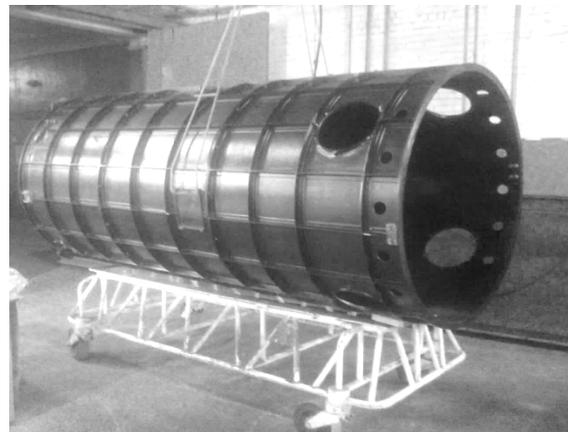


Рис. 6. Корпус телескопа из слоистого углепластика

## **Заключение**

Рассмотренный порядок проектирования даёт адекватный электронный двойник корпуса до его появления в материальном виде. Цифровой двойник имеет распределение материала, которое гарантирует выполнение функциональных требований к конструкции по прочности, жёсткости и тепловым деформациям за счёт высокоточного математического моделирования с использованием специальных конечных элементов и экспериментальных данных по термомеханическим характеристикам используемых материалов. В процессе детального проектирования и разработки технологии производства двойник позволяет оперативно контролировать массу, решать вопросы об изменении напряжённо-деформированного состояния при изменении конструкции и нагрузок, оценивать влияние производственных отклонений на функционирование конструкции, а также оценивать деформации при других возможных изменениях полей температур в эксплуатации.

Реинжиниринг подобных конструкций, спроектированных и построенных по традиционным инженерным методам, показывает, что использование высокоточных цифровых моделей позволяет сократить время разработки изделий примерно в два раза и снизить массу на величину порядка 10...12%.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по проекту FSSS-2020-0016.

## **Библиографический список**

1. Комаров В.А. Точное проектирование // *Онтология проектирования*. 2012. № 3 (5). С. 8-23.
2. New World Vistas. Air and space power for the 21-st century: Aircraft and propulsion volume. University of Michigan, 1995. 108 p.
3. Комаров В.А. Автоматизация проектирования авиационных конструкций на основе МКЭ. САПР РИПАК. Депонирована в ВИНТИ № 3709-84. 1984. 174 с.
4. Абрамов В.И. Организационно технические аспекты применения МКЭ в проектировании самолётов // В кн.: «Методы исследования и разработок конструкций самолётов». М.: МАИ, 1982. С. 21-24.
5. Fukunaga H. On isotropic laminate configurations // *Journal of Composite Materials*. 1990. V. 24, Iss. 5. P. 519-535. DOI: 10.1177/002199839002400504
6. Биткин В.Е., Жидкова О.Г., Комаров В.А. Выбор материалов для изготовления размеростабильных несущих конструкций // *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*. 2018. Т. 17, № 1. С. 100-117. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-1-100-117
7. Мартынов Д.Я. Курс практической астрофизики. М.: Наука, 1977. 544 с.
8. Жидкова О.Г. Применение метода попарных сравнений при проектировании композитных корпусов космических телескопов // *Онтология проектирования*. 2019. Т. 9, № 4 (34). С. 536-548. DOI: 10.18287/2223-9537-2019-9-4-536-548
9. Niu Michael C.Y. Airframe structural design: practical design information and data on aircraft structures. Hong Kong: Conmilit Press LTD, 1999. 612 p.
10. Викарио А., Толанд Р. Критерии прочности и анализ разрушения конструкций из композиционных материалов // В кн.: «Композиционные материалы». Т. 7. Анализ и проектирование конструкций. М.: Машиностроение, 1978. С. 62-107.

11. Комаров В.А., Кишов Е.А., Чарквиани Р.В. Топологическая оптимизация в проектировании высоконагруженных узлов авиационных конструкций // Общероссийский научно-технический журнал «Полёт». 2018. № 8. С. 16-23.

12. Болдырев А.В., Комаров В.А. Оптимизация тонкостенной каркасированной конструкции с ограничениями по прочности и жёсткости // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. 2006. № 1. С. 42-47. DOI: 10.18287/2541-7533-2006-0-1%20(9)-42-47

## DIGITAL DESIGN OF HEAT-RESISTANT DIMENSIONALLY STABLE CARBON LAMINATE (CFRP) STRUCTURES

© 2021

- V. A. Komarov** Doctor of Science (Engineering), Professor of the Department of Aircraft Construction and Design, Chief of the Research and Educational Center for Aircraft Construction (AVICON); Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [vkomarov@ssau.ru](mailto:vkomarov@ssau.ru)
- E. A. Kishov** Candidate of Science (Engineering), Associate Professor of the Department of Aircraft Construction and Design; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [kishov.ea@ssau.ru](mailto:kishov.ea@ssau.ru)
- O. G. Laikova** Deputy General Designer for Research; LLC Special Bureau for Design and Technology “Plastik”, Syzran, Russian Federation; [opriokr-prg@sktb-plastik.ru](mailto:opriokr-prg@sktb-plastik.ru)
- A. A. Pavlov** Engineer of the Research and Educational Center for Aircraft Construction; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [alex-alex.pavlov@yandex.ru](mailto:alex-alex.pavlov@yandex.ru)

Special features of designing heat-resistant dimensionally stable structures are considered. A new design procedure is proposed, in which finite elements are used as a language for describing the load-bearing structure of a construction and the distribution of material in it considering the possibility of setting the desired structure of a composite material. The design task is formulated in terms of nonlinear mathematical programming. A sequence of digital models is used for its approximate solution in the interactive mode. The specific features of finite element modeling of thin-walled structures made of laminated composite material are discussed. The technique is demonstrated using the example of the development of a large-size space telescope body.

*Construction; reflecting telescope; body frame; dimensional stability; carbon-fiber reinforced plastics (CFRP); design; digital model*

---

*Citation:* Komarov V.A., Kishov E.A., Laikova O.G., Pavlov A.A. Digital design of heat-resistant dimensionally stable carbon laminate (CFRP) structures. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2021. V. 20, no. 1. P. 75-86. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-75-86

### References

1. Komarov V.A. Concurrent design. *Ontology of Designing*. 2012. No. 3 (5). P. 8-23. (In Russ.)
2. New World Vistas. Air and space power for the 21-st century: Aircraft and propulsion volume. University of Michigan, 1995. 108 p.
3. Komarov V.A. Computer-aided design of aircraft structures on the basis of the finite element method. Deposited at VINITI no. 3709-84. 1984. 174 p. (In Russ.)

4. Abramov V.I. Organizatsionno tekhnicheskie aspekty primeneniya MKE v proektirovanii samoletov. *V kn: «Metody issledovaniya i razrabotok konstruksiy samoletov»*. Moscow: MAI Publ., 1982. P. 21-24. (In Russ.)
5. Fukunaga H. On isotropic laminate configurations. *Journal of Composite Materials*. 1990. V. 24, Iss. 5. P. 519-535. DOI: 10.1177/002199839002400504
6. Bitkin V.E., Zhidkova O.G., Komarov V.A. Choice of materials for producing dimensionally stable load-carrying structures. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2018. V. 17, no. 1. P. 100-117. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-1-100-117
7. Martynov D.Ya. *Kurs prakticheskoy astrofiziki* [Course of Practical Astrophysics]. Moscow: Nauka Publ., 1977. 544 p.
8. Zhidkova O.G. Application of the pairwise comparison method in the designing of composite framework of space telescopes. *Ontology of Design*. 2019. V. 9, no. 4 (34). P. 536-548. (In Russ.). DOI: 10.18287/2223-9537-2019-9-4-536-548
9. Niu Michael C.Y. Airframe structural design: practical design information and data on aircraft structures. Hong Kong: Conmilit Press LTD, 1999. 612 p.
10. Vicario A.A., Toland R.H. Failure criteria and failure analysis of composite structural components. *In book: «Composite materials»*. V. 7. Structural design and analysis. New York: Academic Press, 1975. P. 52-98.
11. Komarov V.A., Kishov E.A., Charkviani R.V. Structural design of high-loaded airplane parts using topology optimization. *All-Russian Scientific-Technical Journal «Polyot»*. 2018. No. 8. P. 16-23. (In Russ.)
12. Boldyrev A.V., Komarov V.A. Optimization of a thin-walled frame structure considering strength and stiffness constraints. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2006. No. 1. P. 42-47. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2006-0-1%20(9)-42-47

## АНАЛИЗ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛИМЕРНОГО СОТОВОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ С НЕСУЩИМИ СЛОЯМИ В ТРЁХСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

© 2021

**С. А. Павлова** инженер научно-образовательного центра авиационных конструкций;  
Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королёва;  
[pavlova-sva@yandex.ru](mailto:pavlova-sva@yandex.ru)

Рассматривается задача исследования механических характеристик трёхслойных композитных конструкций на границе контакта несущих слоёв и лёгкого заполнителя. Приводятся результаты прочностных испытаний образцов трёхслойных конструкций с обшивками из высокопрочных углепластиков и полимерным сотовым заполнителем при различных случаях нагружения. Отмечается, что при испытаниях на четырёхточечный изгиб и чистый сдвиг имеет место расхождение в определении предельных касательных напряжений. В целях интерпретации экспериментальных данных проводится численный анализ зоны контактного взаимодействия обшивок и заполнителя трёхслойной композитной конструкции. Отмечается, что наличие существенных нормальных напряжений в клеевом слое при сдвиговых испытаниях приводит к отрыву несущих слоёв от заполнителя и занижению значений касательных напряжений на величину порядка 20% по сравнению с результатами испытаний на четырёхточечный изгиб. Предлагаются рекомендации по назначению предельных сдвиговых напряжений для использования в практических расчётах трёхслойных композитных конструкций.

*Трёхслойные конструкции; композиционные материалы; испытания; математическое моделирование; касательные напряжения; предельные характеристики*

---

*Цитирование:* Павлова С.А. Анализ контактного взаимодействия полимерного сотового заполнителя с несущими слоями в трёхслойных конструкциях // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 1. С. 87-96. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-87-96

---

### Введение

Проектирование высоконагруженных трёхслойных панелей пола с использованием современных высокопрочных угле- и стеклопластиков для несущих слоёв и полимерного сотового заполнителя показывает, что активным ограничением оказывается прочность в зоне контакта обшивок и лёгкого заполнителя [1]. При этом стабильность механических характеристик трёхслойных конструкций и композиционных материалов, работающих в её составе, зависит от технологии изготовления панелей. В традиционных технологиях [2; 3] зона контакта формируется с использованием жидких клеев или клеевых плёнок, что зачастую приводит к созданию перетяжелённых конструкций [4]. В ряде новых технологий все более широкое применение находят препреги на основе клеевого связующего [5 – 7]. Они позволяют изготавливать трёхслойные конструкции за один технологический цикл, в ходе которого происходит одновременное формирование несущих слоёв и их склеивание с заполнителем. При этом предусматривается повышенная толщина препрега с внутренней стороны несущего слоя, которая выполняет ту же функцию, что и клеевая плёнка.

Исследование прочностных свойств трёхслойных панелей с обшивками на основе клеевых препрегов показывает, что наиболее существенным силовым фактором для таких конструкций являются касательные напряжения в зоне контакта несущих слоёв и заполнителя, что может являться причиной расслоения. Для оценки прочности зоны стыка с использованием тех или иных критериев прочности необходимо знание и задание предельных механических характеристик несущих слоёв и сотового заполнителя,

которые определяются экспериментально. К числу таких характеристик относятся: предел прочности на растяжение и сжатие сотового заполнителя в направлении сот, предельная прочность заполнителя на сдвиг, изгибная прочность несущих слоёв. В дополнение к прочностным характеристикам для расчётов трёхслойных конструкций необходимо знание упругих характеристик: модулей упругости, коэффициентов Пуассона и модулей сдвига монослоя обшивок и сотового заполнителя. Нормальные напряжения сотового заполнителя на растяжение  $[\sigma_z]_{com}^+$  и сжатие  $[\sigma_z]_{com}^-$  определяются простыми испытаниями [8; 9]. Для определения прочности сотового заполнителя на сдвиг  $[\tau_{xz}]$  предлагается два стандартных принципиально разных метода испытаний [10; 11], которые позволяют также оценить прочность контактного взаимодействия несущих слоёв и сотового заполнителя. Целью данной работы является анализ особенностей этих методик и разработка практических рекомендаций по использованию экспериментальных данных при проектировании трёхслойных конструкций.

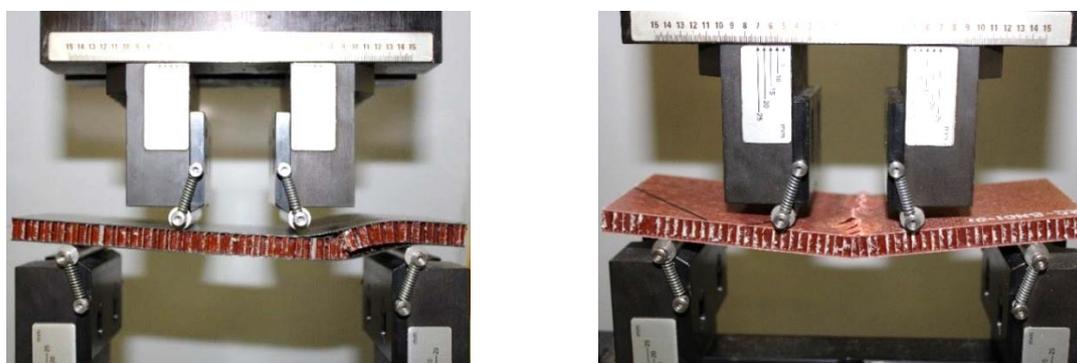
### Экспериментальные исследования

Для определения предельных касательных напряжений в зоне стыка используются методы испытаний, в которых фрагменты трёхслойных панелей испытываются как элементы конструкций. Основными видами испытаний трёхслойных панелей являются: испытания на четырёхточечный изгиб так называемой длинной балки и испытания на сдвиг. По результатам испытаний образцов трёхслойных сотовых панелей пола на четырёхточечный изгиб с постоянной скоростью нагружения до разрушения определяются следующие механические характеристики: предел сдвиговой прочности сотового заполнителя при изгибе  $[\tau_{xz}]$  и предел изгибной прочности несущих слоёв  $[\sigma_{fk}]$ . Для расчёта предела сдвиговой прочности сотового заполнителя при изгибе в международном стандарте испытаний ASTM C 393 [10] используется следующая зависимость:

$$\tau_{xz} = \frac{P_{max}}{(d+c)b}, \quad (1)$$

где  $P_{max}$  – разрушающее усилие, Н;  $d$  – толщина трёхслойной сотовой панели, мм;  $c$  – толщина сотового заполнителя, мм;  $b$  – ширина образца, мм.

Особенностью данного вида испытаний, показанного на рис. 1, является нагружение образца на двух крайних участках постоянной перерезывающей силой и постоянным изгибающим моментом в центральной зоне.



а  
б  
Рис. 1. Испытания на четырёхточечный изгиб образцов трёхслойных сотовых панелей с несущими слоями из: а – клевого углепластика; б – клевого стеклопластика

При этом испытания осложняются определённой концентрацией напряжений на опорах и под нагружающими элементами (рис. 1, *a*), а также значительными деформациями несущих слоёв, близкими к предельным, при изгибе образцов (рис. 1, *б*).

Стандарт испытаний ASTM C 273 [11] подразумевает испытания фрагментов трёхслойных панелей на так называемый чистый сдвиг. Схема нагружения образцов трёхслойных конструкций показана на рис. 2, *a*. Для передачи нагружающего усилия в рабочую зону образца используются специальные стальные накладки. Перед проведением испытаний внешние поверхности обшивок трёхслойных панелей обрабатываются абразивом, не допуская повреждения угле- и стеклопластика, после чего производится склеивание образцов с накладками с использованием эпоксидного клея. После полимеризации клея образцы устанавливаются в специальную испытательную оснастку, которая обеспечивает имитацию работы конструкции на чистый сдвиг за счёт шарнирного крепления накладок (рис. 2, *б*). Однако стоит отметить, что в испытаниях на сдвиг имеет место концентрация напряжений в краевой зоне образцов, которая приводит к отслаиванию несущих слоёв от сотового заполнителя (рис. 2, *в*).



Рис. 2. Испытания на сдвиг образцов трёхслойных сотовых панелей:  
*a* – схема нагружения; *б* – общий вид установки образцов в испытательной оснастке;  
*в* – характер разрушения образцов с обшивками из клевого углепластика

По результатам испытаний образцов трёхслойных сотовых панелей пола на сдвиг определяются следующие механические характеристики: предел сдвиговой прочности сотового заполнителя  $[\tau_{xz}]$  и модуль сдвига сотового заполнителя  $G_{xz}$ .

Для расчёта предела сдвиговой прочности сотового заполнителя при сдвиге в соответствии с [11] используется следующая зависимость:

$$\tau_{xz} = \frac{P_{\max}}{L b}, \quad (2)$$

где  $P_{\max}$  – разрушающее усилие, Н;  $L$  – длина образца, мм;  $b$  – ширина образца, мм.

Модуль сдвига сотового заполнителя  $G_{xz}$  определяется в соответствии с выражением:

$$G_{xz} = \frac{\alpha c}{L b}, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – отношение приращения усилия к приращению перемещений гидравлического штока испытательной машины;  $c$  – толщина сотового заполнителя, мм;  $L$  – длина образца, мм;  $b$  – ширина образца, мм.

Для оценки стабильности результатов испытаний серии из 10 образцов для каждой из определяемых механических характеристик рассчитывался коэффициент вариации CV (табл. 1).

Таблица 1. Механические характеристики трёхслойных панелей с обшивками из клееного углепластика и полимерным сотовым заполнителем с плотностью сот 96 кг/м<sup>3</sup>

Характеристики	+20°C	CV, %
Предел прочности сотового заполнителя на сжатие $[\sigma_z]_{com}^-$ , МПа	6,2	13,1
Модуль упругости сотового заполнителя $E_z$ , МПа	182,0	7,6
Предел сдвиговой прочности сотового заполнителя при испытании на изгиб $[\tau_{xz}]_c$ , МПа	2,1	11,9
Предел сдвиговой прочности сотового заполнителя при испытании на сдвиг $[\tau_{xz}]_c$ , МПа	1,7	6,1
Модуль сдвига сотового заполнителя $G_{xz}$ , МПа	14,1	6,9
Предел прочности сотового заполнителя на растяжение $[\sigma_z]_{com}^+$ , МПа	2,7	5,2

Результаты испытаний образцов показывают, что разрушение происходило вследствие исчерпания несущей способности трёхслойной конструкции на границе взаимодействия несущих слоёв и сотового заполнителя. Кроме того, следует отметить, что для одного и того же вида трёхслойных панелей предельные сдвиговые напряжения  $[\tau_{xz}]$  для двух видов испытаний показывают устойчивую разницу в значениях касательных напряжений на величину порядка 20%. В связи с этим в данной работе предпринята попытка анализа напряжённо-деформированного состояния зоны контактного взаимодействия обшивок и заполнителя в образцах трёхслойных конструкций в двух видах испытаний – на четырёхточечный изгиб и сдвиг.

### Математическое моделирование

В целях интерпретации результатов испытаний образцов трёхслойных панелей пола на четырёхточечный изгиб и сдвиг и их дальнейшего использования в процессе проектирования высоконагруженных трёхслойных конструкций проводилась идентификация математических моделей.

В качестве исходных данных использовались графики «сила-перемещение» и экспериментальные данные о механических характеристиках компонентов трёхслойных конструкций. Испытательные образцы и соответствующие модели включали в себя два типа материалов – клееной углепластик для несущих слоёв и полимерный сотовый заполнитель. Механические свойства материалов обшивок и сотового заполнителя, используемые в модели, показаны на рис. 3.

	A	B	
1	Property	Value	
2	Density	96	kg m <sup>-3</sup>
3	Orthotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion		
8	Orthotropic Elasticity		
9	Young's Modulus X direction	1	MPa
10	Young's Modulus Y direction	1	MPa
11	Young's Modulus Z direction	182	MPa
12	Poisson's Ratio XY	0,49	
13	Poisson's Ratio YZ	0,001	
14	Poisson's Ratio XZ	0,001	
15	Shear Modulus XY	1E-06	MPa
16	Shear Modulus YZ	7	MPa
17	Shear Modulus XZ	15	MPa
18	Orthotropic Stress Limits		

**Заполнитель**

*a*

1	Property	Value	
2	Density	1630	kg m <sup>-3</sup>
3	Orthotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion		
8	Orthotropic Elasticity		
9	Young's Modulus X direction	1,32E+05	MPa
10	Young's Modulus Y direction	7700	MPa
11	Young's Modulus Z direction	7700	MPa
12	Poisson's Ratio XY	0,258	
13	Poisson's Ratio YZ	0,4	
14	Poisson's Ratio XZ	0,258	
15	Shear Modulus XY	4700	MPa
16	Shear Modulus YZ	3100	MPa
17	Shear Modulus XZ	4700	MPa
18	Orthotropic Stress Limits		
28	Orthotropic Strain Limits		
38	Tsai-Wu Constants		
42	Puck Constants		

**Несущие слои**

*б*

Рис. 3. Механические характеристики материалов обшивок и сотового заполнителя (МПа)

Несущие слои, сотовый заполнитель, зона контактного взаимодействия обшивок и заполнителя, а также стальные накладки в случае испытания на сдвиг моделировались с использованием твердотельных элементов типа SOLID 186. Данный тип конечных элементов поддерживает свойства анизотропного материала. При этом направления упругих и прочностных свойств используемых материалов задаются в локальной системе координат элемента, которая, в свою очередь, соответствует направлениям координат слоя. Характерный размер конечных элементов в несущих слоях, сотовом заполнителе и стальных накладках в случае испытания на сдвиг задавался равным 0,3×0,3×0,3 мм. Зона контактного взаимодействия обшивок и заполнителя описывалась конечными элементами с размерами в плане 0,3×0,3 мм, толщиной 0,05 мм и механическими характеристиками клеяющего связующего.

Геометрическая модель образца для испытаний на четырёхточечный изгиб представлена на рис. 4, *a*. Схема нагружения и граничные условия в конечноэлементной модели (КЭМ) соответствовали балке на двух опорах, нагруженной двумя сосредоточенными силами (рис. 4, *б*).

Статический расчёт на прочность КЭМ образца для испытаний на четырёхточечный изгиб выполнялся на разрушающую нагрузку величиной 3500 Н. Результаты расчёта напряжённо-деформированного состояния модели представлены на рис. 5.

Геометрическая модель образца для испытания на сдвиг, граничные условия и схема нагружения, а также результаты расчёта напряжённо-деформированного КЭМ образца показаны на рис. 6. Расчёт выполнен на разрушающую нагрузку величиной 20 000 Н.

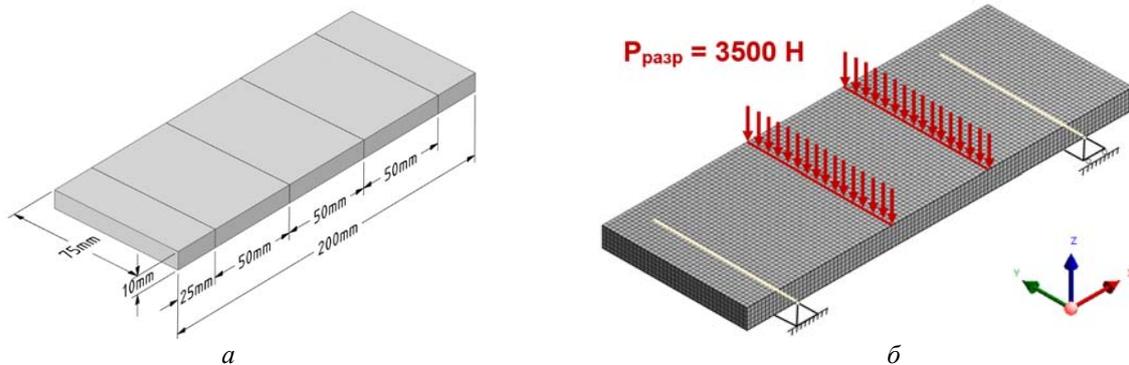


Рис. 4. Математическое моделирование образца трёхслойной панели для испытания на четырёхточечный изгиб:

*a* – геометрическая модель; *б* – граничные условия в КЭМ

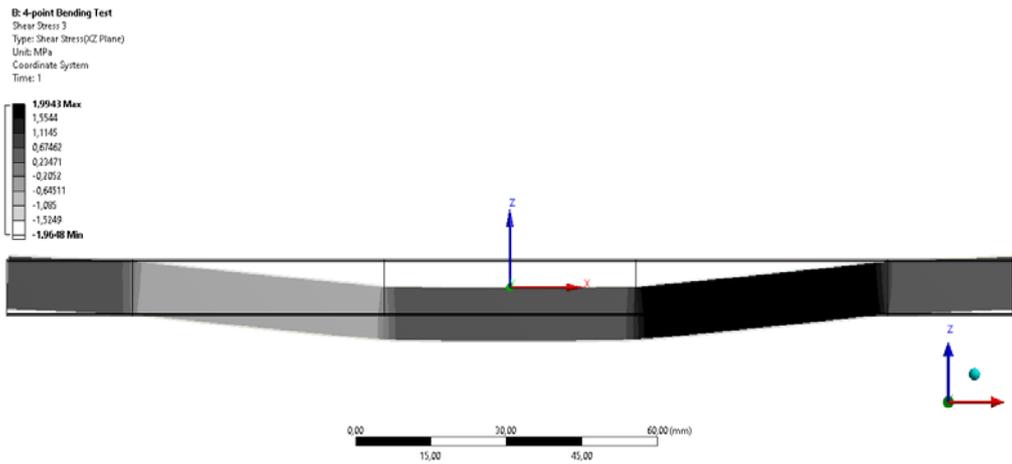


Рис. 5. Результаты расчёта образца трёхслойной конструкции для испытания на изгиб: касательные напряжения  $\tau_{xz}$  в заполнителе, МПа (масштабный коэффициент – 3,5)

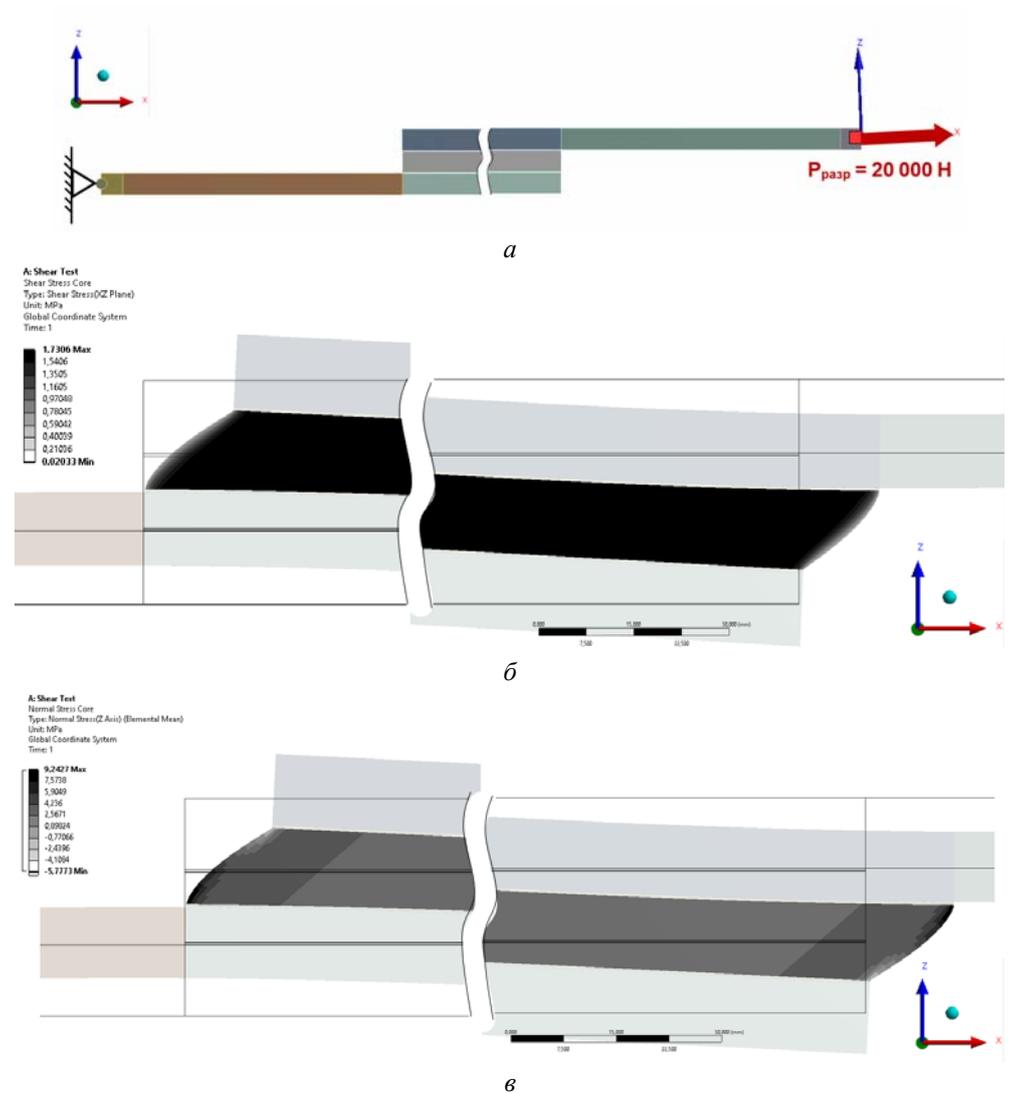


Рис. 6. Результаты расчёта образца трёхслойной конструкции для испытания на сдвиг:  
 а – схема нагружения;  
 б – касательные напряжения  $\tau_{xz}$  в заполнителе, МПа (масштабный коэффициент – 10);  
 в – нормальные напряжения в заполнителе, МПа (масштабный коэффициент – 10)

На рис. 7, а и б показаны картины распределения касательных напряжений в зоне контактного взаимодействия несущих слоёв и полимерного сотового заполнителя – клеевом слое – в моделях образцов для испытаний на четырёхточечный изгиб и сдвиг соответственно.



а



б

Рис. 7. Картина распределения касательных напряжений в клеевом слое: а – в модели образца для испытания на изгиб; б – в модели образца для испытания на сдвиг

Полученные результаты математического моделирования образцов для испытаний показали хорошее согласование с экспериментальными данными.

### **Заключение**

Из сопоставления результатов испытаний и математического моделирования следует, что наиболее достоверные данные о величине касательных напряжений дают испытания на сдвиг. При этом полученная величина предельных касательных напряжений в этом случае на 20% ниже, чем при испытаниях на изгиб. Эту разницу можно объяснить тем, что в испытаниях на изгиб длинной балки под нагружающим элементом присутствуют сжимающие напряжения в зоне контакта несущих слоёв и сотового заполнителя. В испытаниях на сдвиг в зоне контактного взаимодействия помимо касательных напряжений действуют растягивающие напряжения в трансверсальном направлении, из-за чего создаются предпосылки к отслаиванию обшивок.

Испытания на сдвиг по стандарту С297 при кажущейся простоте осложнены тем обстоятельством, что концентрация напряжений имеет место и в клеевом слое между внешней поверхностью несущих слоёв образцов трёхслойных панелей и массивными металлическими накладками, что требует тщательной механической обработок поверхностей и подбора высокопрочных клеев. Следует также отметить, что при испытаниях на сдвиг при повышенной и пониженной температурах концентрация напряжений усиливается из-за проявления существенной разности коэффициентов линейного теплового расширения (КЛТР) металла и полимеров, что может существенно осложнить испытания.

Поэтому для практических целей можно рекомендовать использовать простой и информативный, приближенный к реальным условиям эксплуатации панелей пола, способ испытаний на изгиб длинной балки. С учётом проведённого исследования в проектировочных расчётах целесообразно умножать полученные экспериментальные значения предельной сдвиговой прочности сотового заполнителя  $[\tau_{xz}]$  на коэффициент 0,8.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по проекту FSSS-2020-0016.

### **Библиографический список**

1. Комаров В.А., Куцевич К.Е., Павлова С.А., Тюменева Т.Ю. Оптимизация трёхслойных сотовых панелей пола из полимерных композиционных материалов пониженной горючести на основе высокопрочных углеродных и стеклянных волокон и клеевого связующего // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2020. Т. 19, № 3. С. 51-72. DOI: 10.18287/2541-7533-2020-19-3-51-72
2. Шершак В.П., Шокин Г.И., Егоров В.Н. Технологические особенности производства трёхслойных сотовых панелей пола воздушных судов // Авиационная промышленность. 2014. № 3. С. 34-42.
3. Баранников А.А., Вешкин Е.А., Постнов В.И., Стрельников С.В. К вопросу производства панелей пола из ПКМ для летательных аппаратов (обзорная статья) // Известия Самарского научного центра РАН. 2017. Т. 19, № 4 (2). С. 198-213.
4. Малышева Г.В., Гращенков Д.В., Гузева Т.А. Оценка технологичности использования клеев и клеевых препрегов при изготовлении трёхслойных панелей //

Авиационные материалы и технологии. 2018. № 4 (53). С. 26-30. DOI: 10.18577/2071-9140-2018-0-4-26-30

5. Куцевич К.Е., Деменьева Л.А., Лукина Н.Ф. Свойства и назначение полимерных композиционных материалов на основе клеевых препрегов // Труды ВИАМ. 2016. № 8 (44). С. 52-59. DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-8-7-7

6. Шокин Г.И., Шершак П.В., Андриянова М.А. Опыт разработки и освоения производства сотовых панелей пола ЛА из отечественных материалов // Авиационная промышленность. 2017. № 1. С. 32-39.

7. Лукина Н.Ф., Петрова А.П., Мухаметов Р.Р., Когтёнков А.С. Новые разработки в области клеящих материалов авиационного назначения // Авиационные материалы и технологии. 2017. № S. С. 452-459. DOI: 10.18577/2071-9140-2017-0-S-452-459

8. ASTM C297 / C297M-16. Standard test method for flatwise tensile strength of sandwich constructions. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2016. DOI: 10.1520/C0297\_C0297M-16

9. ASTM C365 / C365M-16. Standard test method for flatwise compressive properties of sandwich cores. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2016. DOI: 10.1520/C0365\_C0365M-16

10. ASTM C393 / C393M-20. Standard test method for core shear properties of sandwich constructions by beam flexure. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2020. DOI: 10.1520/C0393\_C0393M-20

11. ASTM C273 / C273M-20. Standard test method for shear properties of sandwich core materials. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2020. DOI: 10.1520/C0273\_C0273M-20

## ANALYSIS OF CONTACT INTERACTION OF POLYMER HONEYCOMB CORE AND CFRP BASE LAYERS IN SANDWICH-CORE CONSTRUCTIONS

© 2021

**S. A. Pavlova** Engineer of the Research and Educational Center for Aircraft Construction; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [pavlova-sva@yandex.ru](mailto:pavlova-sva@yandex.ru)

The article considers the challenge of studying the mechanical properties of composite sandwich constructions at the interface between the base layers and the lightweight core. The results of strength tests are presented for specimens of sandwich-core panels with coats made of high-strength carbon fiber-reinforced plastics (CFRP) and polymer honeycomb core considering various loading conditions. It is noted that a discrepancy in the values of shear stresses occurs in four-point bending and shear tests due to the complex stress-strain state of the specimens during bending. In order to interpret the experimental data, numerical analysis of the area of contact interaction between the coats and the filler of the sandwich-core composite structures is carried out. It is noted that in the presence of significant normal stresses in the adhesive coat the base layers separate from the core during shear tests and there is underestimation of the values of shear stresses by about 20%. Recommendations for the assignment of ultimate shear stresses for the use in practical design of sandwich-core composite constructions are put forward.

*Sandwich-core constructions; composite materials; tests; mathematical modeling; shear stresses; limiting characteristics*

---

**Citation:** Pavlova S.A. Analysis of contact interaction of polymer honeycomb core and CFRP base layers in sandwich-core constructions. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2021. V. 20, no. 1. P. 87-96. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-87-96

## References

1. Komarov V.A., Kutsevich K.E., Pavlova S.A., Tyumeneva T.Yu. Optimization of honeycomb sandwich floor panels made of polymer-matrix low-combustible composite materials based on high-strength carbon and glass fibers and adhesive binder. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2020. V. 19, no. 3. P. 51-72. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2020-19-3-51-72
2. Shershak V.P., Shokin G.I., Egorov V.N. Technological characteristics of the fabrication of the aircraft floor sandwich honeycomb panels. *Aviation Industry*. 2014. No. 3. P. 34-42. (In Russ.)
3. Barannikov A.A., Veshkin E.A., Postnov V.I., Strelnikov S.V. On the issue of production of the floor panels made of PCM for aircraft (review article). *Izvestiya Samarskogo Nauchnogo Tsentra RAN*. 2017. V. 19, no. 4 (2). P. 198-213. (In Russ.)
4. Malysheva G.V., Grashchenkov D.V., Guzeva T.A. Evaluation of technological use efficiency of adhesives and glue prepregs in the manufacture of three-layer panels. *Aviation Materials and Technologies*. 2018. No. 4 (53). P. 26-30. (In Russ.). DOI: 10.18577/2071-9140-2018-0-4-26-30
5. Kutsevich K.E., Dementeva L.A., Lukina N.F. Properties and application of polymer composite materials based on glue prepregs. *Trudy VIAM*. 2016. No. 8 (44). P. 52-59. (In Russ.). DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-8-7-7
6. Shokin G.I., Shershak P.V., Andriunina M.A. Experience in development and manufacture of honeycomb floor panels made of domestic materials. *Aviation Industry*. 2017. No. 1. P. 32-39. (In Russ.)
7. Lukina N.F., Petrova A.P., Muhametov R.R., Kogtyonkov A.S. New developments in the field of adhesive aviation materials. *Aviation Materials and Technologies*. 2017. No. S. P. 452-459. (In Russ.). DOI: 10.18577/2071-9140-2017-0-S-452-459
8. ASTM C297 / C297M-16. Standard test method for flatwise tensile strength of sandwich constructions. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2016. DOI: 10.1520/C0297\_C0297M-16
9. ASTM C365 / C365M-16. Standard test method for flatwise compressive properties of sandwich cores. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2016. DOI: 10.1520/C0365\_C0365M-16
10. ASTM C393 / C393M-20. Standard test method for core shear properties of sandwich constructions by beam flexure. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2020. DOI: 10.1520/C0393\_C0393M-20
11. ASTM C273 / C273M-20. Standard test method for shear properties of sandwich core materials. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2020. DOI: 10.1520/C0273\_C0273M-20

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ УГЛЕВОЛОКНА ПО ТИПУ РАССЛОЕНИЯ

© 2021

**С. А. Чернякин** старший преподаватель кафедры космического машиностроения имени Генерального конструктора Д.И. Козлова; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [chernyakin-sa@mail.ru](mailto:chernyakin-sa@mail.ru)

В работе изложены результаты исследования трещиностойкости композиционных материалов по типу расслоения. Целью работы является изучение закономерностей роста расслоений и параметров механики разрушения в современных полимерных композиционных материалах на основе углеволокна. Данный тип композиционных материалов активно применяется в высоконагруженных конструкциях изделий аэрокосмической отрасли. Объектом исследования являются современные полимерные композиционные материалы. В работе описана методика изготовления образцов для испытаний по технологии вакуумной инфузии. Экспериментальные исследования процесса роста расслоений по модам I и II проводились на современном испытательном оборудовании с применением специальных образцов в виде двойной консольной балки. Данный тип образцов часто применяется исследователями для отработки численных моделей. В рамках исследования были получены критические значения вязкости разрушения, а также зависимости «нагрузка-перемещение» для двух типов материала – однонаправленного и тканого. Исследования шлифов испытанных образцов на оптическом микроскопе позволили выявить характерные механизмы разрушения структуры материала.

*Композиционные материалы; трещиностойкость; расслоение; испытательное оборудование; шлифы; интенсивность освобождения энергии; разрушение*

*Цитирование:* Чернякин С.А. Экспериментальное исследование трещиностойкости полимерных композиционных материалов на основе углеволокна по типу расслоения // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 1. С. 97-108. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-97-108

### Введение

В современных конструкциях из полимерных волокнистых композиционных материалов в силу нарушения технологии производства, под влиянием внешних воздействий, а также в силу отсутствия надёжной системы мониторинга избежать наличия такого опасного дефекта как расслоение не получается. Поэтому возникает необходимость оценки влияния подобного рода дефектов на прочность и надёжность композитных конструкций. Экспериментальные исследования, направленные на выяснение истинных процессов деформирования и разрушения полимерных композиционных материалов, являются одним из наиболее достоверных методов оценки прочности и долговечности реальных конструкций и их элементов.

Испытание по определению вязкости разрушения по моде I (нормальный отрыв) традиционно считается наиболее важной характеристикой расслоения в композиционных материалах. Для этого наиболее часто используется образец в форме двойной консольной балки (ДСВ-образец), нагруженной двумя противоположно направленными силами на её концах через специального вида блоки или специальные роульные петли. Процесс подготовки и проведения испытаний в настоящее время стандартизован американским сообществом по испытаниям и материалам ASTM D5528 [1]. Простота проведения данного испытания и однозначно определённый вид нагружения по моде I поз-

воляют применять данный стандарт для исследования вязкости разрушения в любых современных композиционных материалах.

Интенсивность освобождения энергии  $G_I$  есть функция нагрузки, перемещений и длины расслоения. К упомянутым параметрам нередко добавляются и другие конструктивные параметры или параметры материала, оказывающие своё воздействие на значения  $G_I$  в процессе проведения испытания. К одним из таких эффектов можно отнести появление связей в окрестности фронта расслоения ввиду вытягивания отдельных волокон из монослоя. Наиболее часто используемыми методами оценки интенсивности освобождения энергии является метод податливости, введённый в работе [2], и модифицированный метод податливости, предложенный в работе [3]. Отмечается, что использование последнего метода является более предпочтительным, поскольку он даёт консервативные результаты. Следует также подчеркнуть, что большинство исследователей используют образец в форме двойной консольной балки для верификации предлагаемых математических моделей, направленных на исследование процессов роста расслоений в композиционных материалах с помощью аналитических или численных методов. В работах [4; 5] детально рассмотрены преимущества и недостатки предложенных различными авторами подходов к определению вязкости межслойного разрушения по моде I.

При испытаниях по моде II (сдвиг) в процесс разрушения многослойного композиционного материала вовлечены две скользящие друг относительно друга поверхности, взаимодействие между которыми приводит к распространению расслоения (ENF-образец). В настоящее время данный тип испытаний также стандартизован и описан в соответствующем стандарте ASTM D 7905 [6]. Схема нагружения представляет собой трёхточечный изгиб балки с расслоением на конце, что, в свою очередь, позволяет реализовать условия разрушения по моде II.

Впервые данный вид испытаний был описан в работе [7], в которой авторы предложили такую же форму образца, как и в случае двухконсольной балки, что позволяет использовать балочную теорию для оценки значений интенсивности освобождения энергии. Достаточно большая жёсткость в этом случае также даёт возможность использовать метод податливости. В работе [7] авторами на основании классической балочной теории было предложено простое выражение для определения интенсивности освобождения энергии.

Следует отметить, что для описанного типа испытания, в особенности для композиционных материалов с хрупкой матрицей, рост расслоения происходит внезапно и неустойчиво, что, в свою очередь, сопровождается значительным падением нагрузки в процессе испытания. В работе [8] отмечается, что значение интенсивности освобождения энергии при распространении расслоения было эквивалентно значению интенсивности освобождения энергии при стагнации расслоения. Первое из указанных значений обычно характеризует динамическое поведение материала при неустойчивом росте расслоения. С другой стороны, авторами работы [9] была предложена методика испытания, в которой наблюдался устойчивый рост расслоения. Испытания проводились с использованием специальных датчиков перемещений при постоянной скорости приложения сдвиговых перемещений, т.е. относительных сдвиговых перемещений между верхней и нижней частями образца на конце области с расслоением.

### **Методика изготовления образцов из композиционных материалов**

Наиболее распространёнными методами изготовления образцов являются метод ручной выкладки и метод вакуумной инфузии. Для экспериментальных исследований был выбран метод вакуумной инфузии.

Основу однонаправленного материала составляет однонаправленная углеткань 12К-300-200 с поверхностной плотностью  $230 \text{ г/м}^2$  полотняного плетения (вплетена стеклянная уточная нить), с количеством филаментов в одном пучке нити – 12К.

Основу тканого материала составляет двунаправленная ткань 1К-1000-132 с поверхностной плотностью  $132 \text{ г/м}^2$  полотняного плетения с количеством филаментов в одном пучке нити – 1К.

Для формования заготовок и последующего получения образцов заданной толщины и формы сначала производится раскрой цельного полотна выбранного материала, которое разрезается на заготовки для изготовления пластин размером  $180 \times 350 \text{ мм}$ .

При формировании так называемого «пакета», представляющего собой уложенные под определёнными углами относительного исходного отсчётного направления, слои ткани укладываются на предварительно обработанную специальным веществом (антиадгезивом) поверхность, что предотвращает склеивание материала с формообразующей оснасткой. Число и ориентация слоёв в каждом конкретном случае выбираются исходя из исследуемых экспериментальным путём физико-механических характеристик материала. Следует отметить, что для создания искусственного расслоения использовалась специальная тонкая плёнка, пропитанная антиадгезионным веществом для предотвращения смыкания берегов расслоения в процессе пропитки.

Сверху выложенный таким образом набор слоёв покрывается так называемой «жертвенной» тканью для обеспечения отделения верхней поверхности изготавливаемой заготовки от проводящего слоя после полимеризации.

Рядом со слоями ткани располагаются трубка подвода смолы и трубка, ведущая к вакуумной станции. Уплотнение краёв оснастки проводится герметизирующим жгутом, препятствующим проникновению воздуха в процессе создания вакуума. Для равномерного распределения смолы по всей поверхности заготовки, а также равномерной её пропитки пакет накрывается проводящей тканью. Сверху всё накрывается вакуумной плёнкой с толщиной, обеспечивающей достаточную жёсткость с целью предотвращения её повреждения и, как следствие, нарушения технологии и процессе изготовления заготовки.

Для пропитки ткани использовалось связующее, составленное из 100 частей смолы SICOMIN SR8100 и 22 частей отвердителя SD8823. При определении количества компонентов смеси использовались аналитические весы. Время жизни жидкого связующего составляло 4 часа. После полимеризации связующего следовал этап разборки вакуумного пакета и освобождения сформированного ламината из оснастки с отделением жертвенных слоёв. Далее проводилась механическая обработка полученной заготовки с целью получения образцов необходимого размера.

### **Методика проведения испытаний**

Для оценки несущей способности композитных конструкций с расслоением, а также оценки склонности расслоения к росту автором работы проводилось экспериментальное исследование интенсивности освобождения энергии в полимерных композиционных материалах на примере тканого и однонаправленного углепластика.

Испытания на определение интенсивности освобождения энергии по моде I проводились в соответствии с требованиями, изложенными в ASTM D 5528 [1]. Для создания нагрузок, соответствующих первой моде разрушения, к образцу приклеиваются специальные блоки, которые призваны передавать нагрузку с траверс испытательной машины на образец. Их крепление к траверсе осуществляется шарнирно через втулки посредством специального переходника, а к образцу – посредством клеевого соединения.

Значение вязкости разрушения вычисляют на основании диаграммы «нагрузка-перемещение» при возрастании нагрузки от нулевого значения до значения, соответствующего прорастанию искусственно созданного расслоения на величину от 3 до 5 мм.

Перед испытанием одна из боковых кромок образца была покрашена белой краской на водной основе. На неё после отверждения были нанесены маркеры (метки), начиная от номинальной длины трещины (конца искусственного расслоения) по следующей схеме: первые 5 мм метки ставились каждый 1 мм, далее метки ставились через 5 мм. Во всех случаях длина первоначального расслоения составляла 50 мм. В ходе испытания по данным маркерам отслеживался процесс роста расслоения с помощью видеокамеры. В момент достижения трещиной заданного маркера оператором фиксировались значения силы и соответствующего ему значения перемещений точек приложения. По полученным данным оценивались значения  $G_{Ic}$  (вязкость разрушения). Общий вид образца с нанесёнными маркерами представлен на рис. 1.

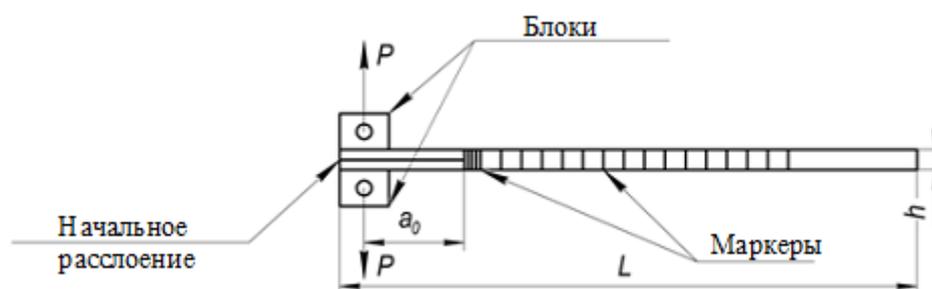


Рис. 1. Схема образца

Для оценки трещиностойкости по моде II автором проводились испытания образцов (ENF-образцы) в виде балок с расслоением при трёхточечном изгибе (End notched Flexure). Процедура проведения испытания базировалась на стандарте ASTM D 7905 [6]. В соответствии с ним изготавливались похожие по сравнению с предыдущим испытанием образцы.

В рамках данного испытания определению подлежало критическое значение интенсивности освобождения энергии для моды II ( $G_{Ic}$ ) с помощью метода калибровки податливости. При реализации данного метода и вычислении отмеченных значений каждый из образцов подвергался двум нагружениям на заранее рассчитанные уровни нагрузок. Данные нагрузки выбирались таким образом, чтобы их величина соответствовала 50% от значений предельной нагрузки, характеризующей момент страгивания расслоения для двух заданных длин расслоения ( $a_1 = 20$  мм,  $a_2 = 40$  мм). Третье нагружение проводилось при длине расслоения  $a_0 = 30$  мм вплоть до момента, когда визуально наблюдалось страгивание расслоения. Значение нагрузки  $P_{max}$ , соответствующее данному явлению, регистрировалось и в дальнейшем использовалось для расчёта значений  $G_{Ic}$ .

Схема испытания, а также изображение испытываемого образца с нанесёнными маркерами приведены на рис. 2, 3.

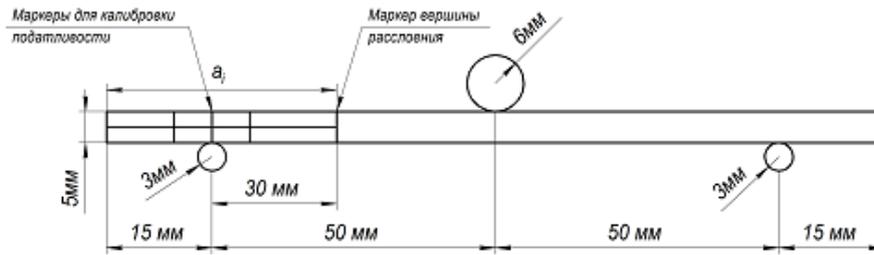


Рис. 2. Схема нагружения и характерные размеры ENF-образца

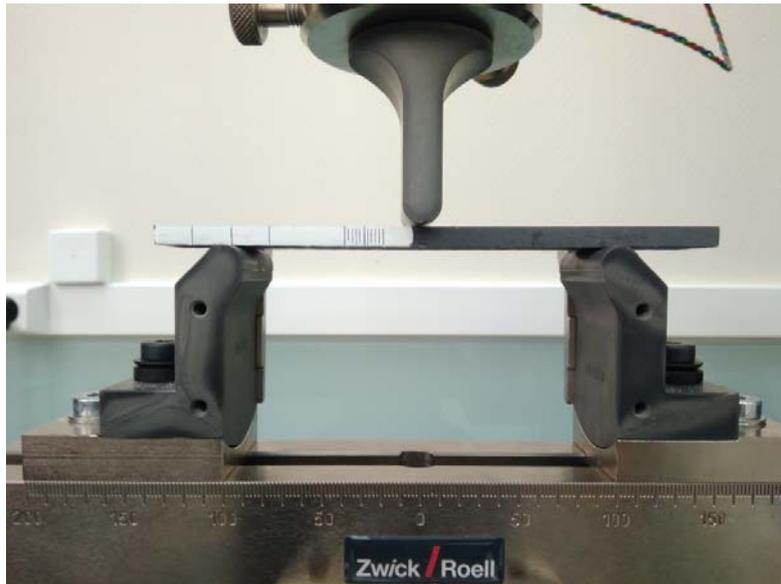


Рис. 3. Образец в испытательной оснастке

### Результаты испытаний и их анализ

На рис. 4, 5 приведены полученные диаграммы «нагрузка-перемещение» соответственно для однонаправленного и тканого композиционного материала. В табл. 1 представлены полученные значения математического ожидания, среднеквадратического отклонения и коэффициента вариации вязкости разрушения по моде I для однонаправленного и тканого материала.

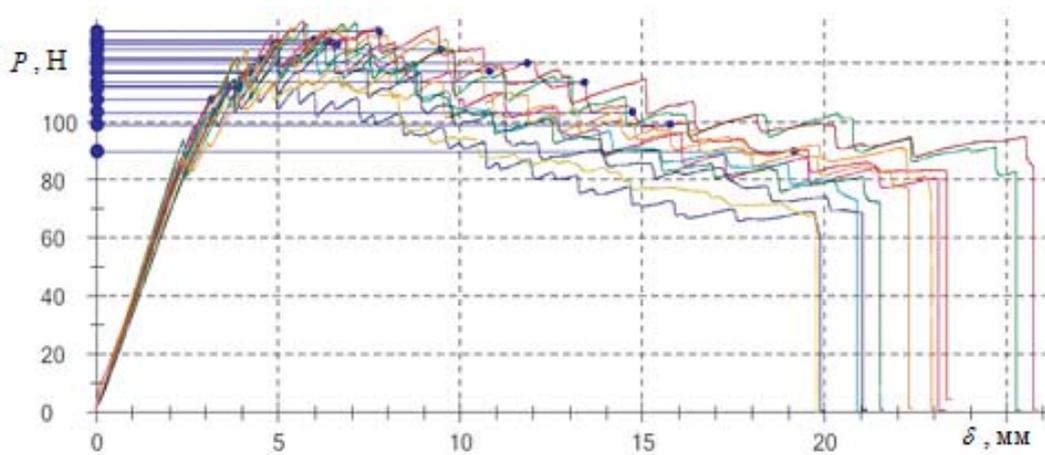


Рис. 4. Диаграммы нагрузка-перемещение для однонаправленного материала

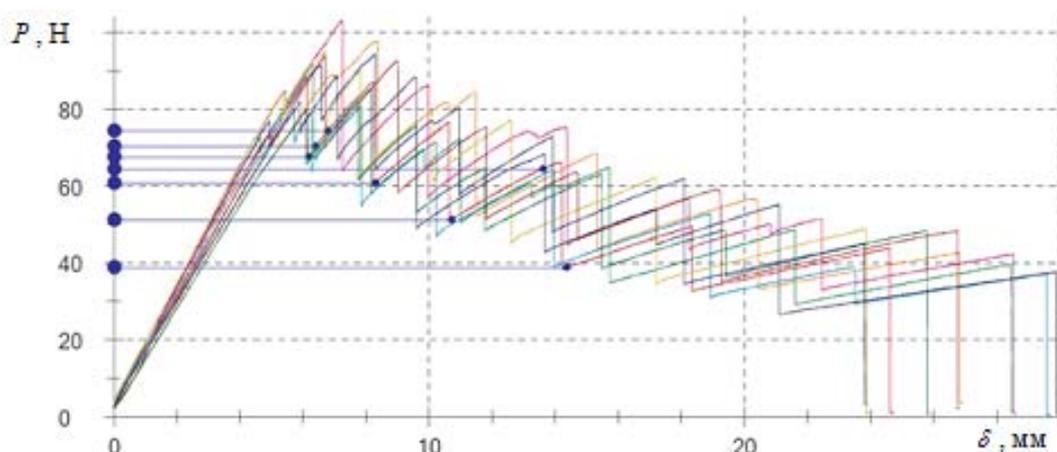


Рис. 5. Диаграммы нагрузка-перемещение для тканого материала

Таблица 1. Значения вязкости разрушения по моде I

Тип материала	Математическое ожидание, Н/мм	Среднеквадратическое отклонение, Н/мм	Коэффициент вариации, %
Однонаправленный	0,37	0,13	34,99
Тканый	0,49	0,06	11,67

При проведении испытаний образцов из однонаправленного материала происходил устойчивый рост расслоения, а именно постепенное увеличение его длины от инициатора по мере увеличения нагрузки. Данный вывод также можно сделать, анализируя полученные диаграммы «нагрузка-перемещение», на которых отсутствуют резкие (сильные) изменения по силе. Анализируя полученные R-кривые, можно заметить, что вязкость разрушения по мере увеличения длины расслоения также увеличивается, что, в свою очередь, является характерной особенностью однонаправленных материалов. Кроме того, в процессе испытания и по мере роста расслоения наблюдался эффект «fiber bridging» (рис. 6), заключающийся в образовании остаточных связей между берегами трещины расслоения. Механизм образования таких связей заключается в вытягивании отдельных волокон или пучков волокон из соседних слоёв. Происходит это из-за отсутствия чёткой границы раздела между соседними слоями в однонаправленных материалах. Для более подробного исследования поверхности разрушения и механизма роста расслоения после испытаний были выполнены шлифы боковой и торцевой поверхности образца (рис. 7, 8).

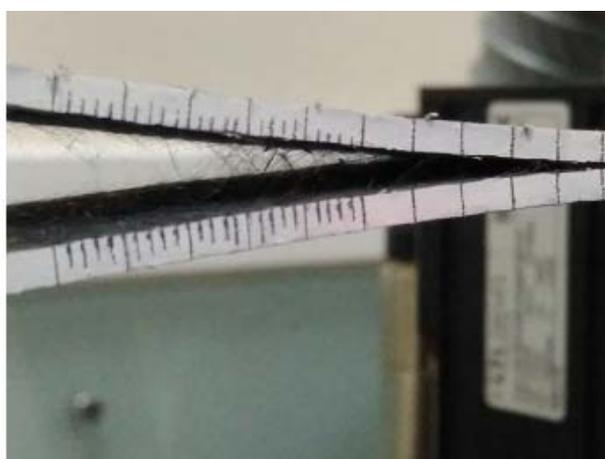


Рис. 6. Вытягивание волокон



Рис. 7. Изображение боковой поверхности образца из однонаправленного материала

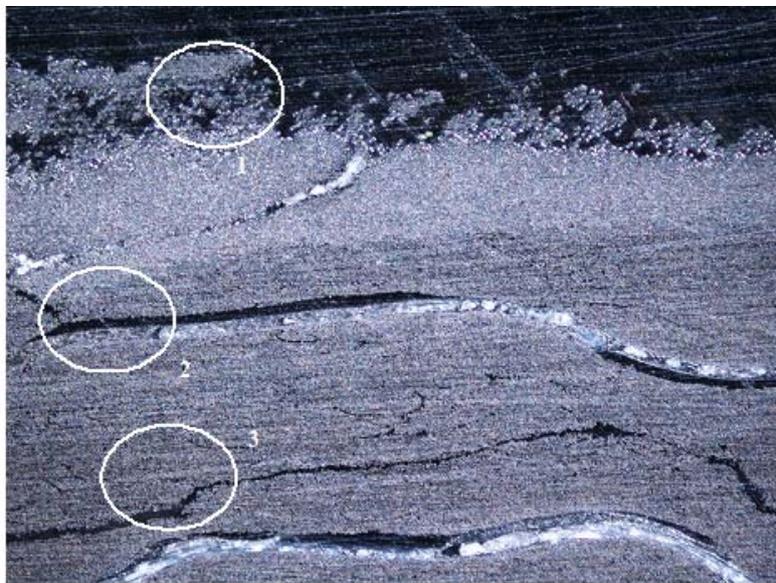


Рис. 8. Изображение торцевой поверхности образца из однонаправленного материала:  
1 – разрушение поверхности слоя, 2 – расслоение по нити утка, 3 – расслоение в слое

В результате испытаний установлено, что в приповерхностных к расслоению слоях присутствуют 3 вида разрушения:

- 1) разрушение поверхности слоя, заключающееся в растрескивании матрицы по границам волокон и отмеченного вытягивания волокон из соседних слоёв;
- 2) образование по границе нити утка расслоения, мигрирующее в соседние слои материала;
- 3) образование трещины расслоения непосредственно в слое материала, развивающейся по границам волокон и также приводящей к растрескиванию матрицы в прилегающих слоях.

Из вышесказанного следует несколько важных выводов:

- нити утка (если они есть) в однонаправленных материалах являются инициаторами расслоений в условиях нормального отрыва;
- кроме непосредственного повреждения материала трещиной расслоения, которое существенно снижает эффективные жесткостные и прочностные свойства, происходит также повреждение прилегающих слоёв, заключающееся в образовании дефек-

тов, которые могут в дальнейшем привести к полному исчерпанию несущей способности.

При испытаниях тканого материала эффектов, характерных для однонаправленных материалов, не наблюдалось. Анализируя полученные зависимости (рис. 4, 5), можно отметить, что для тканого материала характерен нестабильный рост расслоения. Это проявляется в скачкообразном подрастании трещины на значительную длину (порядка 15...20 мм) от предыдущего устойчивого равновесного состояния. Кроме того, для тканого материала значения интенсивности освобождения энергии, соответствующие этапу роста, были меньше, чем те же значения в момент страгивания трещины. В данном случае можно говорить о том, что данное обстоятельство является характерной особенностью тканого материала.

Для более детального исследования процесса роста расслоения в структуре материала были изготовлены шлифы. Изображения, полученные на электронном микроскопе, представлены на рис. 9.



*a*



*б*

*Рис. 9. Боковая поверхность образца из тканого материала*

Изучение шлифов показало:

- расслоение растёт преимущественно по границе слоёв материала в матрице;
- в некоторых случаях наблюдается рост расслоения в прилегающих слоях волокон, расположенных поперёк плоскости рисунка по границе отдельных волокон;
- в тканом материале расслоение прорастает в матрице в слоях с поперечным армированием;
- эффекта вытягивания волокон не наблюдалось.

Во всех испытаниях наблюдался описанный характер распространения расслоений, что позволяет сделать вывод о характерности этой формы разрушения для данного типа материала. Сравнивая значения коэффициентов вариации интенсивности освобождения энергии в первом и втором случае, установлено, что для тканого материала наблюдается меньший разброс. Это опять же говорит о характерности формы разрушения.

Полученные в результате испытаний ENF-образцов зависимости «нагрузка-прогиб» для однонаправленного и тканого материала представлены на рис. 10, 11.

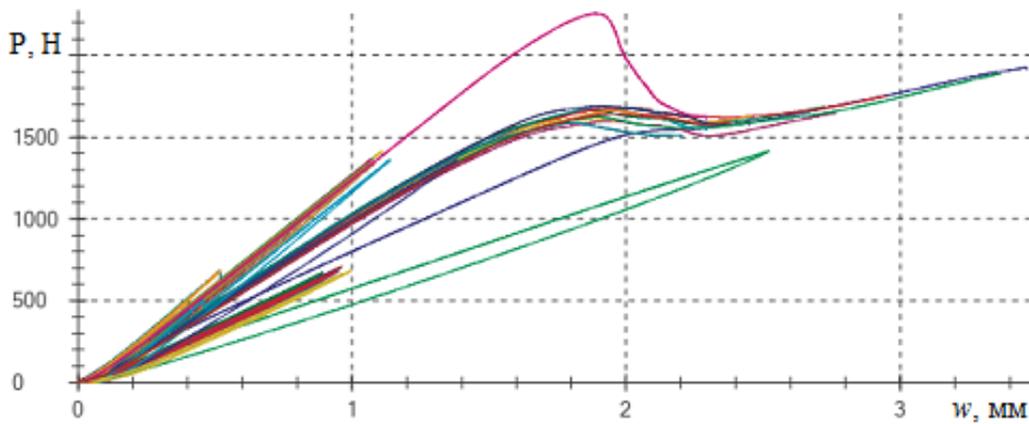


Рис. 10. Зависимость «нагрузка-прогиб» для однонаправленного материала

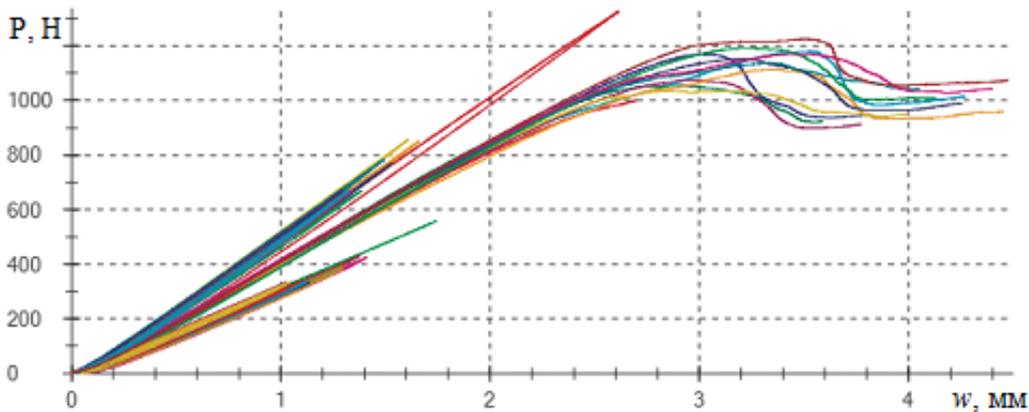


Рис. 11. Зависимость «нагрузка-прогиб» для тканого материала

В табл. 2 приведены полученные значения математического ожидания, среднеквадратического отклонения и коэффициента вариации вязкости разрушения по моде II для однонаправленного и тканого материала.

Таблица 2. Значения вязкости разрушения по моде II

Тип материала	Математическое ожидание, Н/мм	Среднеквадратическое отклонение, Н/мм	Коэффициент вариации, %
Однонаправленный	1,44	0,065	4,54
Тканый	1,265	0,171	13,52

В процессе проведения испытания отмечался устойчивый рост расслоения. Однако стоит заметить, что наблюдение процесса роста расслоения является достаточно трудоёмким, поскольку в данном случае как такового раскрытия берегов не происходит. Поэтому рост расслоения отслеживался лишь по взаимному смещению маркеров на боковой поверхности.

### Заключение

В работе проведено подробное исследование трещиностойкости двух типов композиционных материалов и процессов роста расслоений в них по модам I и II. При исследовании роста расслоения по моде I для однонаправленного материала отмечены характерные особенности распространения – наличие зон вытягивания волокон, приповерхностное разрушение материала, миграция трещины между слоями материала. Для тканого материала при исследовании структуры материала образцов после испытаний установлены два основных типа разрушения – распространение расслоения по границе слоёв и разрушение отдельных пучков волокон на берегах расслоения. При проведении испытаний материалов по моде II рост расслоения оценивался по смещению берегов расслоения друг относительно друга от сдвиговых напряжений. Для всех проведённых испытаний представлены полученные зависимости «нагрузка-перемещение» и значения вязкостей разрушения.

### Библиографический список

1. ASTM D5528-13. Method for mode I interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2013. DOI: 10.1520/D5528-13
2. Berry J.P. Determination of fracture surface energies by the cleavage technique // Journal of Applied Physics. 1963. V. 34, Iss. 1. P. 62-68. DOI: 10.1063/1.1729091
3. Hashemi S., Kinloch A.J., Williams J.G. Corrections needed in double-cantilever beam tests for assessing the interlaminar failure of fibre-composites // Journal of Materials Science Letters. 1989. V. 8, Iss. 2. P. 125-129. DOI: 10.1007/BF00730701
4. Nasuha N., Azmi A.I., Tan C.L. A review on mode-I interlaminar fracture toughness of fibre reinforced composites // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 908, Iss. 1. DOI: 10.1088/1742-6596/908/1/012024
5. Zhu X.K., Joyce J.A. Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization // Engineering Fracture Mechanics. 2012. V. 85. P. 1-46. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2012.02.001
6. ASTM D7905 / D7905M-19e1. Standard test method for determination of the mode II interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2019. DOI: 10.1520/D7905\_D7905M-19E01
7. Russell A.J., Street K.N. Factors affecting the interlaminar fracture energy of graphite/epoxy laminates // Proceedings of the 4th International Conference on Composite

Materials «Progress in Science and Engineering of Composites» (Oct. 25-28, 1982, Tokyo, Japan). P. 279-286.

8. Vu-Khanh T. Crack-arrest study in mode II delamination in composites // *Polymer Composites*. 1987. V. 8, Iss. 5. P. 331-341. DOI: 10.1002/pc.750080508

9. Kageyama K., Kikuchi M., Yanagisawa N. Stabilized end notched flexure test: characterization of mode II interlaminar crack growth // *Third Symposium on Composite Materials: Fatigue and Fracture* (November, 6-7, 1989, Lake Buena Vista, FL, USA). P. 210-225. DOI: 10.1520/STP17720S

## EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF CFRP FRACTURE TOUGHNESS BY DELAMINATION TYPE

© 2021

**S. A. Chernyakin** Senior Lecturer of the Department of Space Engineering named after Chief Designer D.I. Kozlov; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [chernyakin-sa@mail.ru](mailto:chernyakin-sa@mail.ru)

The results of analyzing fracture toughness in carbon fiber-reinforced plastics by the type of delamination are presented in the article. The goal of this paper is investigation of delamination propagation process and fracture mechanics parameters in modern CFRPs. This type of composite materials is extensively used in high load aerospace structures. Modern polymer composite materials are the subject of our research. A technique of manufacturing specimens for testing by the vacuum infusion process is presented in the paper. Experimental investigation of delamination propagation process by mode I and II was performed with the aid of up-to-date testing equipment using a special type of specimens such as a double cantilever beam. Researchers usually use this type of specimen for the validation of their numerical models. Critical values of energy release rate and load-displacement curves were obtained for two types of material – unidirectional and woven. Examination of microscopic sections of the tested specimens using an optical microscope allowed us to identify the specific fracture mechanisms of material structure.

*Composite materials; fracture toughness; delamination; testing equipment; microscopic sections; energy release rate; fracture*

---

*Citation:* Chernyakin S.A. Experimental investigation of CFRP fracture toughness by delamination type. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2021. V. 20, no. 1. P. 97-108. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-97-108

### References

1. ASTM D5528-13. Method for mode I interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2013. DOI: 10.1520/D5528-13

2. Berry J.P. Determination of fracture surface energies by the cleavage technique. *Journal of Applied Physics*. 1963. V. 34, Iss. 1. P. 62-68. DOI: 10.1063/1.1729091

3. Hashemi S., Kinloch A.J., Williams J.G. Corrections needed in double-cantilever beam tests for assessing the interlaminar failure of fibre-composites. *Journal of Materials Science Letters*. 1989. V. 8, Iss. 2. P. 125-129. DOI: 10.1007/BF00730701

4. Nasuha N., Azmi A.I., Tan C.L. A review on mode-I interlaminar fracture toughness of fibre reinforced composites. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. V. 908, Iss. 1. DOI: 10.1088/1742-6596/908/1/012024

5. Zhu X.K., Joyce J.A. Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization. *Engineering Fracture Mechanics*. 2012. V. 85. P. 1-46. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2012.02.001

6. ASTM D7905 / D7905M-19e1. Standard test method for determination of the mode II interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2019. DOI: 10.1520/D7905\_D7905M-19E01

7. Russell A.J., Street K.N. Factors affecting the interlaminar fracture energy of graphite/epoxy laminates. *Proceedings of the 4th International Conference on Composite Materials «Progress in Science and Engineering of Composites» (Oct. 25-28, 1982, Tokyo, Japan)*. P. 279-286.

8. Vu-Khanh T. Crack-arrest study in mode II delamination in composites. *Polymer Composites*. 1987. V. 8, Iss. 5. P. 331-341. DOI: 10.1002/pc.750080508

9. Kageyama K., Kikuchi M., Yanagisawa N. Stabilized end notched flexure test: characterization of mode II interlaminar crack growth. *Third Symposium on Composite Materials: Fatigue and Fracture (November, 6-7, 1989, Lake Buena Vista, FL, USA)*. P. 210-225. DOI: 10.1520/STP17720S