

## КОМАНДНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЯМИ ГИПЕРЗВУКОВОГО САМОЛЁТА В УСЛОВИЯХ АТМОСФЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2020

**М. М. Крикунов** кандидат технических наук, старший научный сотрудник;  
Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королёва;  
[krikunov.mm@ssau.ru](mailto:krikunov.mm@ssau.ru)

Рассмотрено возмущённое движение гиперзвукового самолёта на этапе набора высоты с разгоном. Возмущениями являются отклонения плотности атмосферы от значений стандартной модели. В работе используются следующие термины и определения. Номинальная оптимальная программа – программа управления углом атаки, полученная при решении задачи минимизации расхода топлива для модели стандартной атмосферы (в дальнейшем – номинальная программа). Номинальная «возмущённая» оптимальная программа – программа управления углом атаки, полученная при решении задачи минимизации расхода топлива для модели возмущённой атмосферы при условии, что возмущения известны (в дальнейшем – «возмущённая» программа). Командная оптимальная программа – программа управления углом атаки, полученная при решении задачи минимизации расхода топлива для модели возмущённой атмосферы при условии, что возмущения неизвестны (в дальнейшем – командная программа, командное управление). Принят многошаговый процесс управления. На каждом шаге управления методом принципа максимума Понтрягина определяется командная программа угла атаки. На первом шаге используется номинальная программа управления. Представлены результаты моделирования возмущённого движения с командным управлением углом атаки для предельно «разреженной» и предельно «плотной» атмосферы. Для «разреженной» атмосферы в конце рассматриваемого участка движения при решении краевой задачи нарушается ограничение по углу атаки, но заданные конечные условия по скорости, высоте и углу наклона траектории выполняются. Для «плотной» атмосферы выполнены конечные условия по высоте и углу наклона траектории, но не выполнено конечное условие по скорости. Поскольку для «возмущённой» программы нет вышеотмеченных нарушений ограничений на управление и фазовые координаты, то дальнейшее направление исследований командного оптимального управления связано с совершенствованием алгоритма решения краевой задачи.

*Гиперзвуковой самолёт; набор высоты; разгон; атмосферные возмущения; оптимальная программа угла атаки; шаг управления; минимум массы топлива; принцип максимума Понтрягина.*

---

*Цитирование:* Крикунов М.М. Командное оптимальное управление траекториями гиперзвукового самолёта в условиях атмосферных возмущений // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2020. Т. 19, № 1. С. 41-50. DOI: 10.18287/2541-7533-2020-19-1-41-50

### Введение

Вопросы движения гиперзвуковых летательных аппаратов рассматривались в [1–5]. Монография [1] посвящена оптимизации траекторий движения аэрокосмических летательных аппаратов. В работах [2;3] изучались вопросы использования силовых установок гиперзвуковых и воздушно-космических летательных аппаратов. В [4] для гиперзвукового самолёта (ГС) была получена номинальная оптимальная программа управления углом атаки и соответствующая ей траектория набора высоты с разгоном с минимальным расходом топлива для стандартной атмосферы и номинальных аэродинамических характеристик. При дальнейшем изучении траекторий и программ управления ГС было рассмотрено движение с возмущениями. В [5] получена номинальная «возмущённая» оптимальная программа при отклонениях плотности атмосферы от стандартных и аэродинамических характеристик от номинальных значений. Показано,

что номинальная оптимальная и номинальная «возмущённая» оптимальная программы угла атаки имеют один и тот же характер.

В работе используются следующие термины и определения:

– номинальная оптимальная программа – программа управления углом атаки, полученная при решении задачи минимизации расхода топлива для модели стандартной атмосферы (в дальнейшем – номинальная программа);

– номинальная «возмущённая» оптимальная программа – программа управления углом атаки, полученная при решении задачи минимизации расхода топлива для модели возмущённой атмосферы при условии, что возмущения известны (в дальнейшем – «возмущённая» программа);

– командная оптимальная программа – программа управления углом атаки, полученная при решении задачи минимизации расхода топлива для модели возмущённой атмосферы при условии, что возмущения неизвестны (в дальнейшем – командная программа, командное управление).

Целью работы является получение командного оптимального управления на основе использования принципа максимума Понтрягина [6].

### **Модель возмущённого движения**

Модель возмущённого движения включает в себя уравнения движения, учитывающие атмосферные возмущения; граничные условия движения; управление и характеристики ГС.

Для расчётов атмосферных возмущений использована универсальная модель отклонений плотности атмосферы [7]:

$$\rho(h) = \rho_{cm}(h) + \xi \cdot \sigma_\rho(h). \quad (1)$$

Здесь плотность атмосферы  $\rho(h)$  представляется как нормальная случайная функция высоты  $h$ , математическое ожидание  $\rho_{cm}(h)$  вычисляется в соответствии со стандартной атмосферой, величина  $\xi$  – нормально распределённая случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной единице.

Под атмосферными возмущениями будем понимать отклонения величины  $\xi$  от значения равного нулю, соответствующего модели стандартной атмосферы.

Среднее квадратическое отклонение  $\sigma_\rho(h)$  в выражении (1) определяется соотношением:

$$\sigma_\rho(h) = \sigma_{\rho 0} \cdot \exp(-0,15 \cdot 10^{-3} \cdot h),$$

где  $\sigma_{\rho 0} = 0,05 \text{ кг/м}^3$  – средняя величина, соответствующая условиям на нулевой высоте [7].

Если в выражении (1)  $\xi < 0$ , то такую атмосферу будем называть «разреженной». Если в выражении (1)  $\xi > 0$ , то такую атмосферу будем называть «плотной».

Уравнения движения ГС в вертикальной плоскости записываются в траекторной системе координат [5].

Начальные и конечные граничные условия движения записываются в виде

$$t = t_H : V = V_H = M_H a(h_H), \theta = \theta_H, h = h_H, m = m_H; \quad (2)$$

$$t = t_K : V = V_K = M_K a(h_K), \theta = \theta_K, h = h_K. \quad (3)$$

Здесь  $V$  – скорость,  $\theta$  – угол наклона траектории,  $h$  – высота,  $m$  – масса;  $M_H, M_K, \theta_H, \theta_K, h_H, h_K, m_H$  – заданные числа;  $a$  – скорость звука.

На рассматриваемом участке набора высоты фиксированы начальная высота, скорость (число Маха  $M$ ) и угол наклона траектории. Конечные значения скорости и высоты определяются возможностями двигательной установки (ДУ) самолёта. Конечный угол наклона траектории равен нулю, что соответствует дальнейшему крейсерскому горизонтальному полёту ГС.

В качестве функции управления принята программа угла атаки при ограничениях

$$\alpha_{\min} \leq \alpha(t) \leq \alpha_{\max}, \quad (4)$$

где  $\alpha_{\min}$  и  $\alpha_{\max}$  – соответственно минимальный и максимальный угол атаки.

Источники информации о массовых, геометрических, аэродинамических характеристиках ГС и высотно-скоростных характеристиках и секундном расходе топлива ДУ указаны в [4].

Отметим имеющееся ограничение на скоростной напор  $q$ , которое можно записать в виде

$$q \leq q_{\max},$$

где  $q_{\max}$  – максимальное значение скоростного напора.

### Определение командного оптимального управления

Весь процесс возмущённого движения разделяется на постоянные временные интервалы – шаги управления. На первом шаге управления используется номинальная программа, полученная для невозмущённой атмосферы.

В дальнейшем для построения командной оптимальной программы управления на каждом шаге управления решается задача нахождения оптимального управления углом атаки методом принципа максимума Понтрягина [6] по критерию минимума расхода топлива. Решение данной задачи оптимального управления сводится к решению соответствующей краевой задачи. В качестве начальных значений фазовых переменных  $(V, \theta, h, m)$  используются значения, полученные при моделировании возмущённого движения. За начальные значения сопряжённых переменных  $(\psi_V, \psi_\theta, \psi_h, \psi_m)$  принимаются соответствующие значения в конце предыдущего временного интервала. Конечные значения фазовых переменных определяются согласно (3). Для того чтобы система уравнений для фазовых и сопряжённых переменных была замкнута, к ним добавляется условие равенства нулю функции Гамильтона  $H$  в правом конце.

Решение поставленной краевой задачи осуществляется методом редукции к задачам Коши [8]. Сходимость метода обусловлена сходимостью метода Ньютона.

Основные трудности, возникающие при исследовании задач оптимального управления, связаны с проблемой поиска начальных приближений сопряжённых переменных при решении краевой задачи и выходом на ограничение по управлению (4).

Если решение краевой задачи найдено и не нарушено ограничение на управление (4), то полученная программа управления используется на следующем временном интервале. В случае, если на текущем шаге управления решить краевую задачу не удалось, то используется программа управления для предыдущего шага.

Процесс построения командной оптимальной программы на всех шагах управления ведётся до тех пор, пока не выполнится одно из двух условий: либо достигается необходимая высота  $h_K$ , либо достигается необходимая скорость  $V_K$ .

### Моделирование движения с командным управлением

При моделировании возмущённого движения ГС использовались следующие значения входящей в (4) нормально распределённой случайной величины  $\xi = -5,5$  и  $\xi = 5,5$ , которые соответствуют предельно «разреженной» и предельно «плотной» атмосфере.

«Возмущённые» оптимальные программы управления углом атаки для указанных случаев приведены в работе [5]. Этим программам соответствуют следующие конечные условия движения:  $h_K = 30\,000$  м,  $M_K = 6$ ,  $\theta_K = 0$ .

На рис. 1 представлена номинальная оптимальная программа угла атаки для стандартной атмосферы [4], которая при определении командного управления на первом шаге взята в качестве номинальной программы.

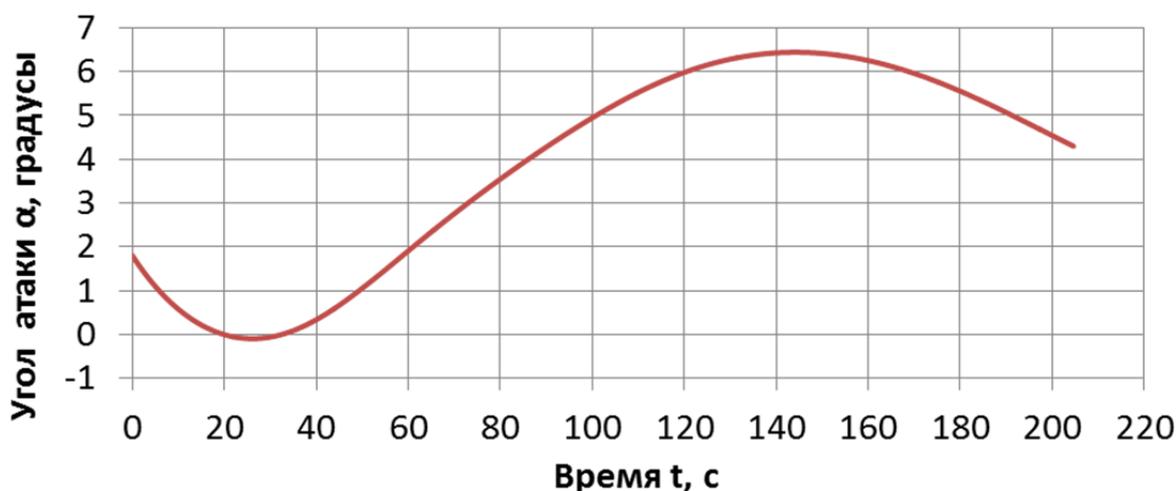


Рис. 1. Номинальная оптимальная программа угла атаки

Проведено моделирование при шагах управления длительностью 20, 10, 7, 5 с.

Была выбрана точность решения  $\varepsilon = 1\%$  для  $V_K, h_K$ , а для  $\theta_K$  и  $H_K$  точность  $\varepsilon = 0,01$ . Следовательно, решение считается найденным, если отклонения фазовых координат в правом конце составляют не более:

$$\Delta V \approx 181 \text{ м/с} (\Delta M \approx 0,06), \quad \Delta \theta = 0,01 \text{ рад} \approx 0,57 \text{ град}, \quad \Delta h = 300 \text{ м}, \quad \Delta H = 0,01.$$

### Командное управление при предельно «разреженной» атмосфере

В табл. 1 представлены конечные значения параметров движения при предельно «разреженной» атмосфере.

Таблица 1. Конечные значения параметров движения при предельно «разреженной» атмосфере

Параметр	«Возмущённая» программа	Командная программа			
		Шаг управления, с			
		20	10	7	5
$t_K, c$	203,21	200,84	203,18	203,81	204,07
$\theta_K, \text{градусы}$	0,00	-0,01	-0,01	0,00	0,00
$h_K, m$	29 923	29 005	29 753	29 918	29 972
$M_K$	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00
$m_K, кг$	278 497	278 591	278 508	278 485	278 478

Из табл. 1 видно, что при уменьшении шага управления до 10 с можно добиться решения задачи при «разреженной» атмосфере. При дальнейшем уменьшении шага управления (до 7 и 5 с) значение конечной высоты всё больше приближается к 30 000 м. При этом увеличивается время полёта и уменьшается конечная масса.

На рис. 2 представлены «возмущённая» и командная программы угла атаки для предельно «разреженной» ( $\xi = -5,5$ ) атмосферы при шаге управления 5 с.

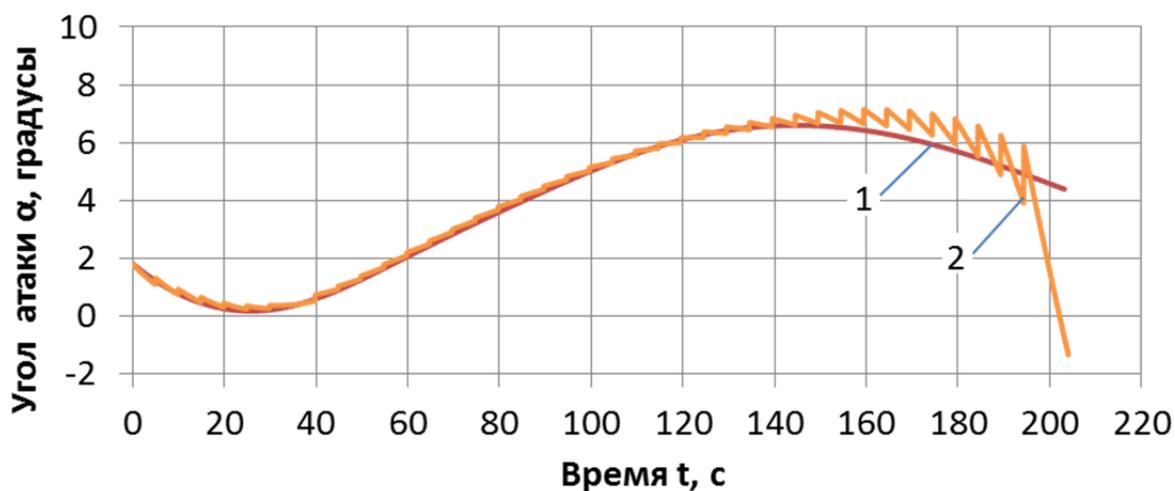


Рис. 2. Программы угла атаки для предельно «разреженной» атмосферы:  
1 – «возмущённая» программа; 2 – командная программа

Из рис. 2 следует, что почти на всех шагах управления «возмущённая» и командная программы близки друг к другу. До 40-го шага управления краевые задачи были решены не более чем за три итерации. На 40-м шаге управления, который начинается с  $t = 200$  с, решение краевой задачи найти не удалось в силу нарушения ограничения (4), так как на одной из итераций решения краевой задачи угол атаки превысил максимальное значение  $\alpha_{\max} = 10$  градусов.

На рис. 3 представлены траектории набора высоты с разгоном для предельно «разреженной» атмосферы при шаге управления 5 с.

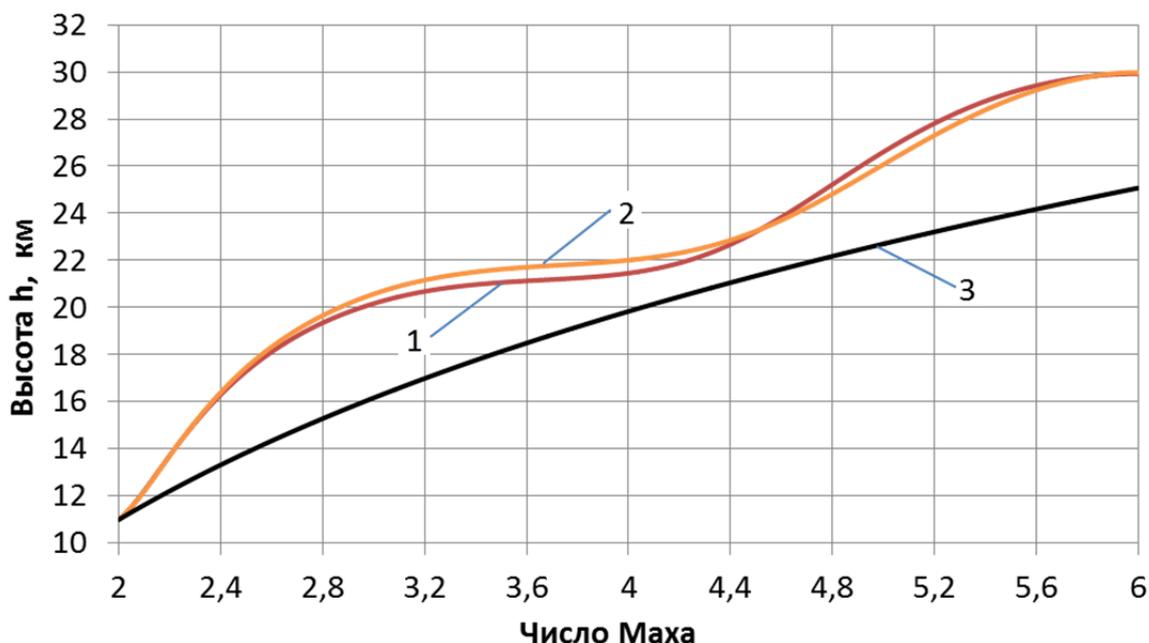


Рис. 3. Траектории набора высоты с разгоном при предельно «разреженной» атмосфере:  
 1 – «возмущённая» программа; 2 – командная программа;  
 3 – максимальный скоростной напор

Из рис. 3 следует, что траектории набора высоты при «возмущённой» и командной программах близки друг к другу. Ограничение по скоростному напору не нарушается.

### Командное управление при предельно «плотной» атмосфере

В табл. 2 представлены конечные значения параметров движения при предельно «плотной» атмосфере.

Таблица 2. Конечные значения параметров движения при предельно «плотной» атмосфере

Параметр	«Возмущённая» программа	Командная программа			
		Шаг управления, с			
		20	10	7	5
$t_K, с$	205,95	189,78	194,17	195,79	197,08
$\theta_K, градусы$	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01
$h_K, м$	29 890	29 999	30 000	30 000	30 000
$M_K$	6,00	5,55	5,69	5,74	5,78
$m_K, кг$	278 259	279 392	279 052	278 928	278 830

Результаты, приведённые в табл. 2, показывают, что уменьшение шага управления при «плотной» атмосфере приближает конечное значение скорости к заданному. Конечные условия движения для высоты и угла наклона выполняются.

На рис. 4 представлены «возмущённая» и командная программы угла атаки для предельно «плотной» ( $\xi = 5,5$ ) атмосферы при шаге управления 5 с.

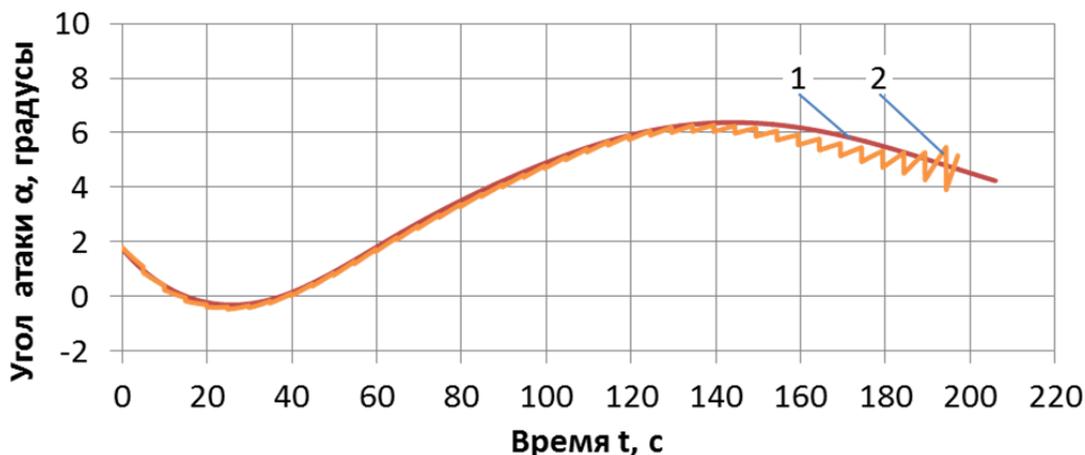


Рис. 4. Программы угла атаки для предельно «плотной» атмосферы:  
1 – «возмущённая» программа; 2 – командная программа

Из рис. 4 следует, что почти на всех шагах управления «возмущённая» и командная программы близки друг к другу. До 39-го шага управления краевые задачи были решены не более чем за три итерации. Однако к моменту времени  $t=197,08$  с ГС набрал предельную для работы ДУ высоту 30 000 м и поэтому процесс нахождения оптимального управления был закончен.

На рис. 5 представлены траектории набора высоты с разгоном для предельно «плотной» атмосферы при шаге управления 5 с.

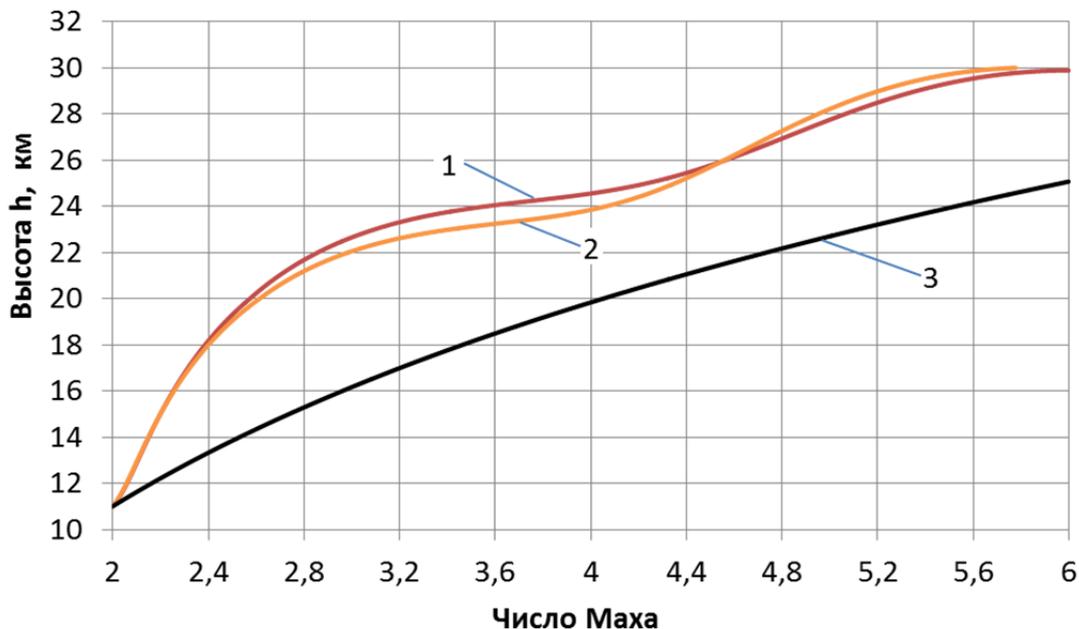


Рис. 5. Траектории набора высоты с разгоном при предельно «плотной» атмосфере:  
1 – «возмущённая» программа; 2 – командная программа;  
3 – максимальный скоростной напор

Из рис. 5 следует, что траектории набора высоты при «возмущённой» и командной программах близки друг к другу. Ограничение по скоростному напору не нарушается.

### **Заключение**

Задача получения командного оптимального управления траекториями гиперзвукового самолёта в условиях атмосферных возмущений может быть решена с использованием принципа максимума Понтрягина. Наилучшие результаты получены для шага управления с наименьшей продолжительностью 5 с.

Отметим следующие особенности, возникшие при решении задачи.

Для «разреженной» атмосферы в конце рассматриваемого участка набора высоты с разгоном при решении краевой задачи нарушается ограничение по углу атаки, но заданные конечные условия по скорости, высоте и углу наклона траектории выполняются.

Для «плотной» атмосферы выполнены конечные условия по высоте и углу наклона траектории, но не выполнено конечное условие по скорости.

Поскольку для «возмущённой» программы имеющиеся ограничения на управление и фазовые координаты не нарушены, то дальнейшее улучшение решения задачи получения командного оптимального управления связано с совершенствованием алгоритма решения краевой задачи.

### **Библиографический список**

1. Бузулук В.И. Оптимизация траекторий движения аэрокосмических летательных аппаратов. М.: ЦАГИ, 2008. 476 с.
2. Нечаев Ю.Н. Силовые установки гиперзвуковых и воздушно-космических летательных аппаратов. М.: Российская академия космонавтики, 1996. 214 с.
3. Нечаев Ю.Н., Полев А.С., Никулин А.В. Моделирование условий работы пароводородного РТД в составе силовой установки гиперзвукового летательного аппарата // Вестник Академии космонавтики. Научно-технические проблемы космонавтики. Выпуск 2. Материалы научных докладов на заседаниях направления в 1996-1997 гг. М.: Российская академия космонавтики, 1998. С. 159-191.
4. Балакин В.Л., Крикунов М.М. Анализ программ управления и траекторий движения гиперзвукового самолёта при наборе высоты // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2018. Т. 17, № 4. С. 18-26. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-4-18-26
5. Балакин В.Л., Крикунов М.М. Возмущённое движение гиперзвукового самолёта при наборе высоты // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. Т. 18, № 2. С. 7-20. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-2-7-20
6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.
7. Школьный Е.П., Майборода А. Атмосфера и управление движением летательных аппаратов. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 308 с.
8. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т. II. М.: Наука, 1977. 400 с.

## OPTIMAL COMMAND CONTROL OF HYPERSONIC AIRCRAFT FLIGHT PATH IN CONDITIONS OF ATMOSPHERIC DISTURBANCES

© 2020

**M. M. Krikunov** Candidate of Science (Engineering), Senior Research Associate;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[krikunov.mm@ssau.ru](mailto:krikunov.mm@ssau.ru)

Disturbed flight of a hypersonic vehicle in accelerated climb is analyzed. Disturbances are deviations of atmospheric density from the values of a standard model. The following concepts and definitions are used in the paper. The nominal optimal angle-of-attack control program is the angle-of-attack control program obtained in solving the task of minimizing fuel consumption for a model of standard atmosphere (hereafter – nominal program). The “disturbed” nominal optimal program is the angle-of-attack control program obtained in solving the task of minimizing fuel consumption for a model of disturbed atmosphere on the condition that the disturbances are known (hereafter “disturbed” program). The command optimal program is the angle-of-attack control program obtained in solving the task of minimizing fuel consumption for a model of disturbed atmosphere on the condition that the disturbances are unknown (hereafter command program, command control). A multi-step control process is accepted. At each step of control the angle-of-attack control program is defined using the method of Pontryagin’s maximum principle. The nominal control program is used at the first step. The results of modeling disturbed motion with angle-of-attack command control are presented for maximum “rarefied” and maximum “dense” atmosphere. In the case of “rarefied” atmosphere the angle-of-attack restriction is violated at the end of the flight segment under consideration in solving the boundary value problem, while the prescribed terminal velocity, altitude and flight path inclination conditions are satisfied. In the case of dense atmosphere the terminal altitude and flight path inclination conditions are satisfied, but the terminal velocity condition is not. Since there is no violation of the above-mentioned control and phase coordinate restrictions in the case of the “disturbed” program, further line of research in the area of optimal command control is related to the improvement of the algorithm of solving the boundary value problem.

*Hypersonic aircraft; climb; acceleration; atmospheric disturbances; optimal angle-of-attack control program; fuel mass minimum; Pontryagin’s maximum principle.*

---

*Citation:* Krikunov M. M. Optimal command control of hypersonic aircraft flight path in conditions of atmospheric disturbances. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2020. V. 19, no. 1. P. 41-50.  
DOI: 10.18287/2541-7533-2020-19-1-41-50

### References

1. Buzuluk V.I. *Optimizatsiya traektoriy dvizheniya aerokosmicheskikh letatel'nykh apparatov* [Optimization of aerospace vehicle flight paths]. Moscow: Central Aerohydrodynamic Institute Publ., 2008. 476 p.
2. Nechaev Yu.N. *Silovye ustanovki giperzvukovykh i vozdushno-kosmicheskikh letatel'nykh apparatov* [Power units of hypersonic and space-air vehicles]. Moscow: Rossiyskaya Akademiya Kosmonavtiki Publ., 1996. 214 p.
3. Nechaev Yu.N., Polev A.S., Nikulin A.V. Modelirovanie usloviy raboty parovodorodnogo RTD v sostave silovoy ustanovki giperzvukovogo letatel'nogo apparata. *Vestnik Akademii kosmonavtiki. Nauchno-tehnicheskie problemy kosmonavtiki*. Vypusk 2. Materialy nauchnykh dokladov na zasedaniyakh napravleniya v 1996-1997 gg. Moscow: Rossiyskaya Akademiya Kosmonavtiki Publ., 1998. P. 159-191. (In Russ.)
4. Balakin V.L., Krikunov M.M. Analysis of control programs and flight paths of a hypersonic vehicle in climb. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2018. V. 17, no. 4. P. 18-26. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-4-18-26

5. Balakin V.L., Krikunov M.M. Disturbed motion of a hypersonic vehicle in climb. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2019. V. 18, no. 2. P. 7-20. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-2-7-20

6. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka Publ., 1983. 393 p.

7. Shkol'nyy E.P., Mayboroda A. *Atmosfera i upravlenie dvizheniem letatel'nykh apparatov* [Atmosphere and aircraft motion control]. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ., 1973. 308 p.

8. Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyrnyy P.I. *Vychislitel'nye metody. T. II* [Computational methods]. Moscow: Nauka Publ., 1977. 400 p.