

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БУБНОВА-ГАЛЁРКИНА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ВИБРАЦИОННЫХ НАГРУЗОК ОТСЕКОВ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ

© 2017

- П. А. Попов** соискатель кафедры автоматических систем энергетических установок; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; banduir@rambler.ru
- А. А. Синдюков** соискатель кафедры автоматических систем энергетических установок; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; sindyukovart@mail.ru
- О. И. Малыхина** аспирант кафедры теоретической механики; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; maloliya@ya.ru

Одним из важнейших этапов проектирования изделий ракетно-космической техники (РКТ) является этап зачётных вибродинамических испытаний конструкции, для проведения которых необходимо получить уровни вибрационного нагружения уже на стадии эскизного проекта. При определении режимов вибрационного и акустического нагружения на элементы конструкции перспективных ракет-носителей (РН) и сборочно-защитных блоков (СЗБ) необходимо использовать эффективные методы, апробированные на прежних изделиях. Эффективность методов определяется тем, что результаты проводимых с их помощью расчётов в большинстве случаев с достаточной точностью согласовывались с результатами натурных измерений. Предложен методический комплекс, который может быть использован с целью формирования уровней вибродинамических воздействий (ВДВ) на конструкцию изделий РКТ. Приведены уравнения вибродинамики оболочки и способ их решения, основанный на методе Бубнова-Галёркина; метод формирования правых частей данных уравнений, представляющих собой синусоидальное силовое воздействие, являющееся эквивалентом реальных спектров внешнего акустического нагружения, полученным на этапе лётно-конструкторских испытаний (ЛКИ); описан способ формирования частотно-зависимых демпфирующих характеристик конструкции. Представлены спектральные характеристики ВДВ на конструкцию отсеков РН типа «Союз», полученные по результатам обработки телеметрической информации. На основе указанных характеристик проведены проверочные расчёты ВДВ на конструкцию отсеков РН. Представлены результаты вероятностного анализа полученных вибрационных нагрузок.

Ракета-носитель; приборный отсек; акустическое давление; вибродинамика; стационарная нагрузка; коэффициент механических потерь; пробные функции; комплексный модуль Юнга.

Цитирование: Попов П.А., Синдюков А.А., Малыхина О.И. Применение метода Бубнова-Галёркина при определении стационарных вибрационных нагрузок отсеков ракеты-носителя // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2017. Т. 16, № 2. С. 101-110. DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-2-101-110

Расчётно-экспериментальный анализ динамики цилиндрического отсека

Конструкция отсеков РН в условиях старта и полёта подвергается интенсивным ВДВ, основная причина которых – акустические воздействия, возникающие при работе двигательных установок при старте и пульсационные псевдоакустические воздействия на этапе полёта. ВДВ нагружают изделие в разных направлениях, в то же время наиболее интенсивные колебания цилиндрических конструкций наблюдаются в радиальном направлении.

Для исследования динамики цилиндрического отсека при стационарном акустическом нагружении будем использовать систему уравнений, описывающих движение оболочки (рис. 1) в продольном, радиальном и касательном направлениях [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\sigma}{2R^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\sigma}{2R} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \rho \frac{1-\sigma^2}{E} \omega^2 u_x = P \frac{1-\sigma^2}{Eh}, \\ \frac{1+\sigma}{2R} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_y}{\partial \varphi} + \rho \frac{1-\sigma^2}{E} \omega^2 u_z = P \frac{1-\sigma^2}{Eh}, \\ -\frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{h^2}{12} \Delta \Delta u_y + \frac{u_y}{R^2} - \rho \frac{1-\sigma^2}{E} \omega^2 u_y = P \frac{1-\sigma^2}{Eh}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь u_x, u_y, u_z – соответственно продольная, радиальная и касательная составляющие перемещений обечайки, м; x, φ – соответственно продольная и окружная координаты; R, σ, ρ, E, h – соответственно радиус, м; коэффициент Пуассона; плотность, кг/м³; модуль Юнга, Па; толщина оболочки, м; ω – круговая частота, рад/с; P – акустическая нагрузка, Па (её представление будет описано далее). Величины ρ, E, h гладкой оболочки являются эквивалентными по жёсткости аналогичным параметрам стрингерных панелей с установленными внутри отсека приборами. Данные параметры были получены по формулам:

$$h = \sqrt{12J_1 / F_1}, \quad E = E_1 F_1 (1 - \sigma^2) / (b_1 h), \quad \rho = M_1 / (S_1 h),$$

где $J_1, F_1, E_1, b_1, M_1, S_1$ – момент инерции сечения ребра жёсткости относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, площадь поперечного сечения, модуль упругости рёбер жёсткости, расстояние между рёбрами жёсткости, масса отсека с приборами и площадь цилиндрической поверхности отсека соответственно.

Примечание: указанные формулы получены из условия равенства изгибной и мембранной жёсткостей оболочки соответственно жёсткостным константам при изгибе и растяжении стрингеров:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} = \frac{E_1 J_1}{b_1}, \quad \frac{Eh}{1-\sigma^2} = \frac{E_1 F_1}{b_1}.$$

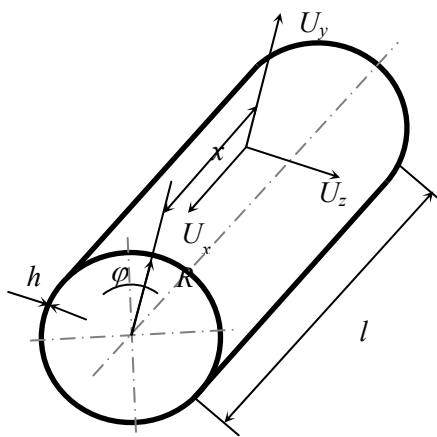


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка с основными переменными

Дополним систему уравнений (1) граничными условиями, которые соответствуют жёсткому креплению оболочки при x , равном 0 и l :

$$\begin{aligned} u_x(x, \varphi) &= u_x(x, \varphi + 2\pi), \\ u_y(x, \varphi) &= u_y(x, \varphi + 2\pi), \\ u_z(x, \varphi) &= u_z(x, \varphi + 2\pi); \\ \\ u_z(x=l, \varphi) &= 0, & u_z(x=0, \varphi) &= 0, \\ u_y(x=l, \varphi) &= 0, & u_y(x=0, \varphi) &= 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x}(x=l, \varphi) &= 0, & \frac{\partial u_x}{\partial x}(x=0, \varphi) &= 0, \\ \frac{\partial u_y}{\partial x}(x=l, \varphi) &= 0, & \frac{\partial u_y}{\partial x}(x=0, \varphi) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Для получения решения уравнения (1) с граничными условиями (2) и правой частью в данной работе предлагается использовать метод Бубнова-Галёркина [2]. В качестве пробных функций приняты следующие линейно независимые члены, удовлетворяющие граничным условиям (2):

$$\begin{aligned} \{u_{xi}\}_{i=2}^N &= \left\{ 1 - \sin^i(\varphi) x^i (x-l)^2 \right\}_{i=2}^N, \\ \{u_{yi}\}_{i=2}^N &= \left\{ \sin^i(\varphi) x^i (x-l)^2 \right\}_{i=2}^N, \\ \{u_{zi}\}_{i=2}^N &= \left\{ \sin^{i-1}(\varphi) x^{i-1} (x-l) \right\}_{i=2}^N. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда решение (1) с учётом (2) представится в виде:

$$\begin{aligned} u_x(x, \varphi) &= \sum_{i=2}^N A_i \left(1 - \sin^i(\varphi) x^i (x-l)^2 \right), \\ u_y(x, \varphi) &= \sum_{i=2}^N B_i \sin^i(\varphi) x^i (x-l)^2, \\ u_z(x, \varphi) &= \sum_{i=2}^N C_i \sin^{i-1}(\varphi) x^{i-1} (x-l). \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя соотношения (4) в уравнение (1), получим невязки $R(x, \varphi)$, $S(x, \varphi)$, $T(x, \varphi)$.

Величины A_i, B_i, C_i находим из условия ортогональности семейства (3) и невязок:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^l \int_{\varphi=0}^{2\pi} R(x, \varphi) u_{xi} dx d\varphi &= 0, \\ \int_{x=0}^l \int_{\varphi=0}^{2\pi} S(x, \varphi) u_{yi} dx d\varphi &= 0, \\ \int_{x=0}^l \int_{\varphi=0}^{2\pi} T(x, \varphi) u_{zi} dx d\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Формирование акустических нагрузок

Акустические нагрузки были сформированы на основе метода наименьших квадратов (МНК) [3].

Пусть функция $P = P(f)$ задана таблицей значений $f_i, P_i, (i = \overline{1, n})$, где аргумент f_i – частота, Гц; P_i – функция внешнего акустического давления, Па. Функция внешнего акустического давления, воздействующего на РН, может быть найдена расчётным путём или получена при лётно-конструкторских испытаниях (ЛКИ). В работе рассматривается второй вариант.

Кроме того, пусть задано некоторое семейство функций $\{\varphi_j\}, j = \overline{1, m}$. Требуется так приблизить функцию $P(f)$ к функции вида:

$$g(f) = \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(f),$$

где $m < n$, чтобы сумма:

$$S = \sum_{i=1}^n \left[P_i - \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(f)_i \right]^2 \quad (6)$$

была наименьшей.

Для этого вычисляются производные по параметрам a_j от выражения (6) и затем решается система m линейных уравнений относительно m неизвестных a_j :

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=1}^n \left[\left(P_i - \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(f_i) \right) \varphi_j(f_i) \right] = 0. \quad (7)$$

Выражение (7) является необходимым условием существования экстремума (минимума) функции S . Для достаточности необходимо, чтобы вторая производная была больше нуля, что будет выполняться:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_j^2} = 2 \sum_{i=1}^n \varphi_j^2(f)_i > 0.$$

Для построения эмпирических формул и нахождения коэффициентов a_j необходимо:

- выбрать форму представления функций φ_j . В качестве φ_j был использован полином вида

$$P = \sum_{j=-N}^M a_j f_i^j; \quad (8)$$

- воспользоваться расчётными или полученными при ЛКИ значениями $P_i = P(f_i)$.

Коэффициенты a_j , полученные на основе МНК по формулам (7), (8) для каждой рассматриваемой конструктивной зоны РН, а именно межбакового отсека (МБО) блока III ступени, приборного отсека (ПО) и хвостового отсека (ХО) блока «А» РН типа «Союз», представлены в табл. 1.

Таблица 1. Коэффициенты a_j , полученные на основе метода наименьших квадратов для каждой рассматриваемой конструктивной зоны

Степень членов в выражении (8)	МБО блока III ступени, старт	МБО блока III ступени, полёт	ПО блока А, старт	ПО блока А, полёт	ХО блока А, старт	ХО блока А, полёт
-7	-	-	-	-	$-1,99 \cdot 10^{15}$	$-5,19 \cdot 10^{14}$
-6	-	-	-	-	$-3,38 \cdot 10^{14}$	$8,46 \cdot 10^{13}$
-5	-	$9,66 \cdot 10^9$	$-6,43 \cdot 10^{10}$	$-0,35 \cdot 10^{10}$	$2,32 \cdot 10^{13}$	$-5,74 \cdot 10^{12}$
-4	-	$-3,43 \cdot 10^9$	$7,16 \cdot 10^9$	$2,25 \cdot 10^9$	$-8,17 \cdot 10^{11}$	$2,09 \cdot 10^{11}$
-3	955989,45	$2,60 \cdot 10^8$	$-3,04 \cdot 10^8$	$-6,60 \cdot 10^7$	$1,57 \cdot 10^{10}$	$-4,38 \cdot 10^9$
-2	76559,95	$-7,44 \cdot 10^6$	$6,31 \cdot 10^6$	463304,50	$-1,58 \cdot 10^8$	$5,12 \cdot 10^7$
-1	-8023,34	77384,79	-70489,17	-1541,6	724037,40	-308247,00
0	189,59	229,69	448,75	425,29	-751,26	1112,42
1	-0,09	-0,14	-0,37	-0,20	1,25	-0,62

На рис. 2 представлены 1/3-октавные уровни акустического давления, полученные при ЛКИ и суммированные в 1/3-октавные полосы результаты моделирования по МНК (формулы (7), (8)) для МБО блока III ступени.

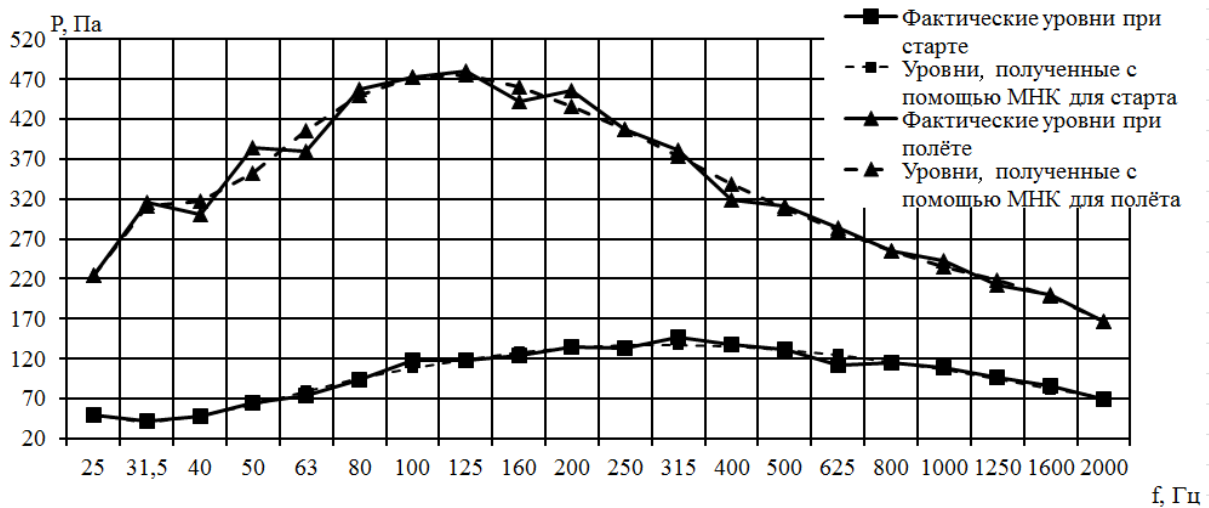


Рис. 2. 1/3-октавные уровни акустического давления при старте и полёте, полученные при ЛКИ и результаты моделирования по МНК для МБО блока III ступени

Задание демпфирования

Показателем свойств конструкции изделия является механический импеданс по виброускорению Z_w , вычисленный по формуле

$$Z_w = \frac{Z_v}{j\omega}, \tag{9}$$

где $Z_v = \frac{P_1(x, r, \varphi)_{r=R} - P_2(x, r, \varphi)_{r=R}}{v_r}$;

v_r – радиальная составляющая колебательной скорости, м/с; индексы 1 и 2 соответствуют акустическому давлению с внешней и внутренней стороны обечайки соответственно, $j = \sqrt{-1}$.

Как видно из рис. 3, импеданс для случаев старта и полёта в полосах частот до 200 Гц имеет значительные отличия, а на частотах свыше 200 Гц его значения совпадают. Данная величина является функцией инерционно-жесткостных и демпфирующих характеристик, которые для случаев старта и полёта являются близкими. Однако немаловажным фактом является направленность акустического поля (реализуется наклонное падение акустических волн) и его влияние на механический импеданс [4]. При моделировании динамического отклика конструкции отсеков РН при их акустическом нагружении демпфирование было задано через комплексные модули упругости E (Па), которые определялись следующим образом:

$$E = E^* (1 + j\eta(\omega)),$$

где $\eta(\omega)$ – коэффициент механических потерь (КМП); E^* – модуль упругости конструкции отсека, Па.

Модуль упругости E^* является известной величиной, а величина КМП требует определения. Механический импеданс Z_w был получен экспериментально (рис. 3).

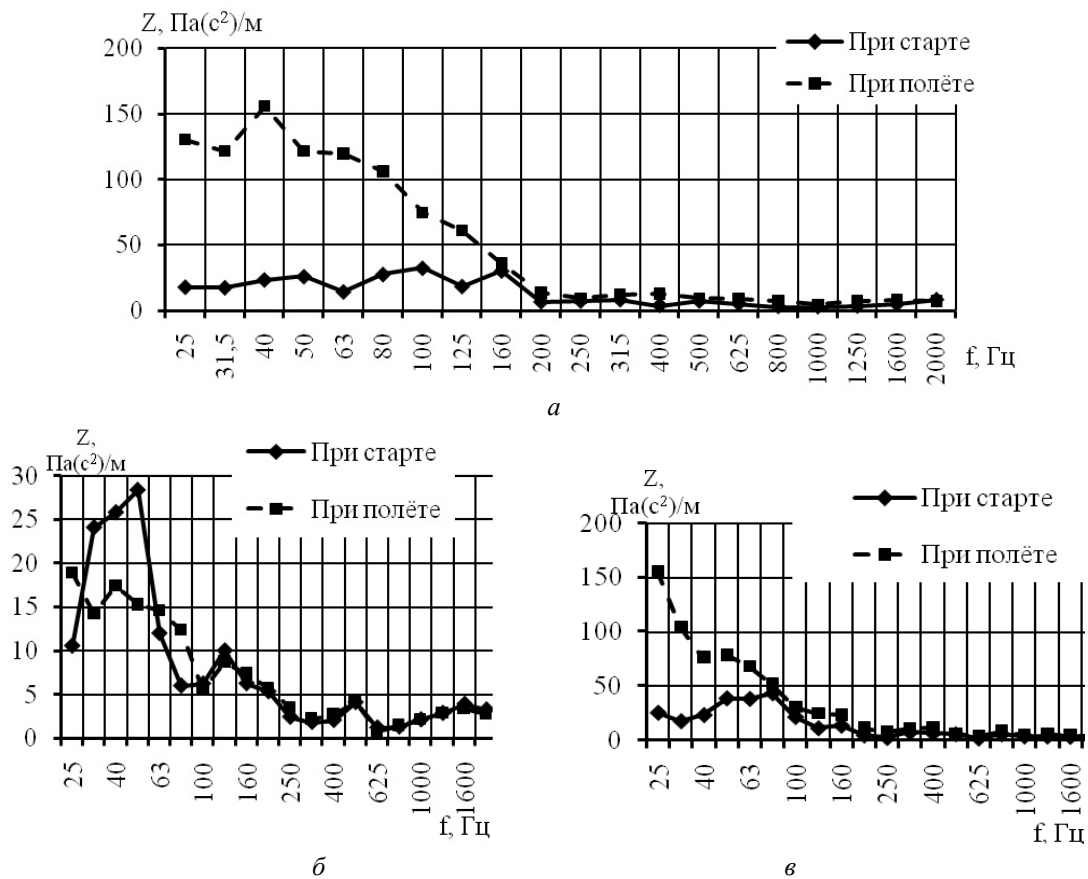


Рис.3. Механический импеданс (по ускорению) конструкции ПО (а), ХО (б) центрального блока, МБО блока III ступени (в)

Значение E^* может быть определено также в соответствии с формулой [5]:

$$Z_w = \frac{jG}{\omega R} \frac{\alpha n - \gamma (n^2 - \mu_{np}^2)}{\beta n - \delta (n^2 - \mu_{np}^2)}. \quad (10)$$

Здесь

$$\gamma = 1 - \mu_{np}^2 + \frac{h^2}{24R^2(1-\sigma)}(2n^4(1-\sigma) + (4-\sigma)n^2 + 2 + \sigma),$$

$$\mu_{np} = \frac{\omega}{c_{np}\sqrt{1+j\eta}}, \quad \delta = \frac{R}{h} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)},$$

где G, ω, R, h, σ – величина сдвигового комплексного модуля упругости, Па; циклическая частота, рад×Гц; радиус, м; толщина обечайки, м; коэффициент Пуассона соответственно, c_{np} – скорость распространения продольных волн в обечайке, м/с – являются известными величинами, а КМП $\eta(\omega)$ вычисляется из уравнений (10) для каждого частотного диапазона. Полученные значения КМП для каждого из отсеков представлены в табл. 2.

Таблица 2. Значения КМП для каждого из отсеков

Отсек	$f_{ц}$, Гц	200	400	625	1000	1600
МБО	старт	0,018	0,02	0,04	0,03	0,032
	полёт	0,0068	0,03	0,04	0,02	0,015
ПО	старт	0,02	0,02	0,05	0,05	0,023
	полёт	0,02	0,03	0,05	0,04	0,03
ХО	старт	0,017	0,02	0,03	0,03	0,033
	полёт	0,015	0,03	0,03	0,03	0,025

Примечание: $f_{ц}$ – центральная частота 1/3-октавного поддиапазона частот, в которые попадают резонансные частоты до 2000 Гц

Результаты моделирования динамического нагружения конструкции отсеков

Для системы алгебраических уравнений (1) – (5) получены уровни ВДВ для различных зон РН типа «Союз» (рис. 4): конструкции ПО блока А ($a, б$), конструкции МБО блока III ступени ($в$) и кронштейна ХО блока А ($г$). Расчётные значения ВДВ сравнивались с результатами измерений. Измерения проводились на элементах конструкции ПО блока А, МБО блока III ступени и на кронштейне прибора в ХО блока А в радиальном направлении. Как видно из рис. 4, получены близкие уровни ВДВ при расчётах и при натурных измерениях на элементах конструкции МБО блока III ступени. Имеющиеся отличия в полосах частот 1/3-октавного спектра с центральными частотами 160 Гц – 400 Гц для ХО блока А вызваны наличием дополнительной динамики, соответствующей вибрации кронштейна прибора, установленного в ХО блока А. На рис.4, б представлены минимальное и максимальное возможные значения виброускорений каркаса ПО блока А, полученные с помощью вероятностного анализа на основании данных четырёх пусков РН. Вероятность попадания в доверительный интервал равна 95% при коэффициенте Стьюдента, равном 2,776.

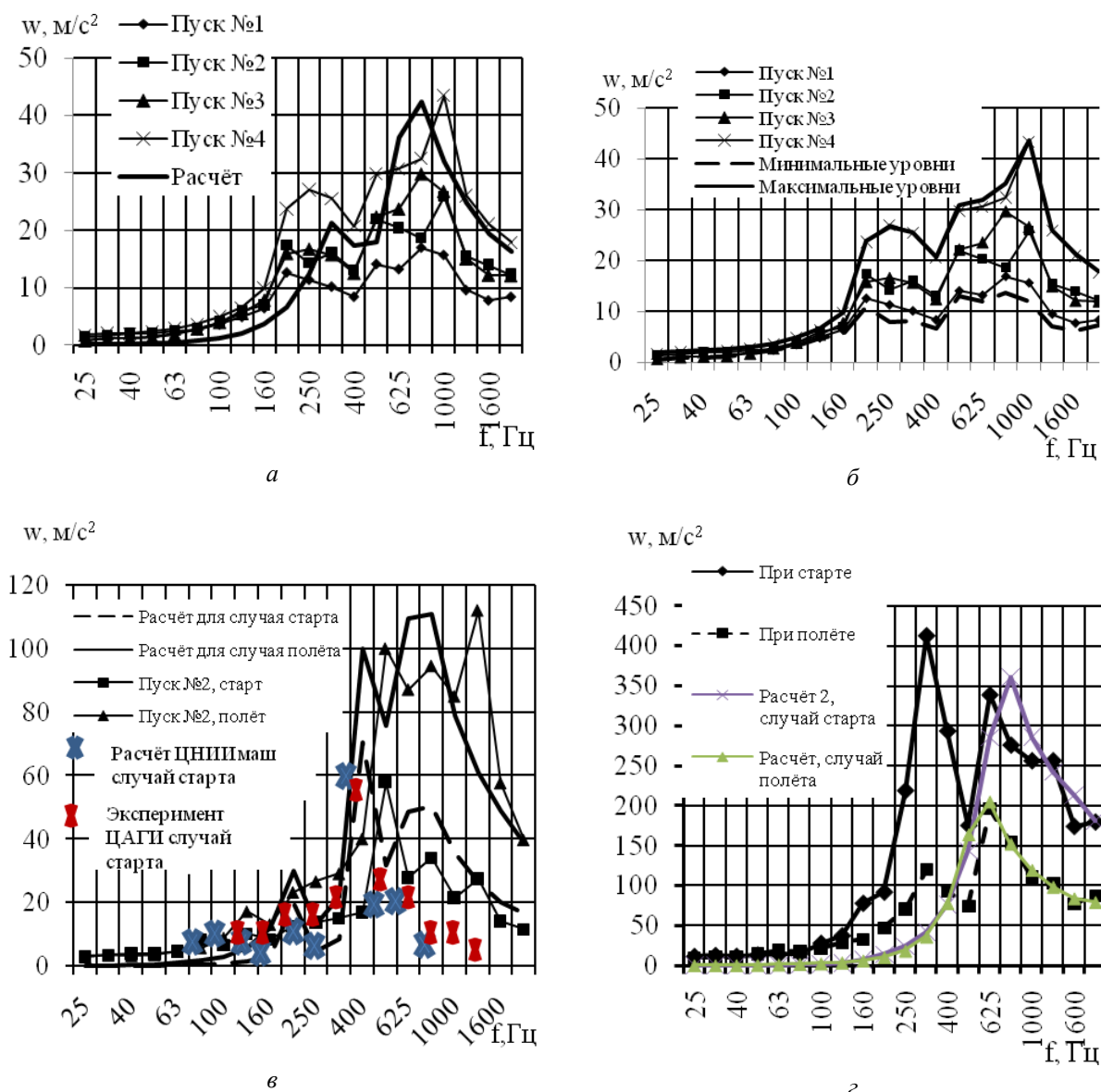


Рис. 4. Результаты расчётов, натурных и экспериментальных измерений вибрации в радиальном направлении и вероятностного анализа ВДВ отсеков РН: конструкции ПО блока А (а, б), конструкции МБО блока III ступени (в) и кронштейна ХО блока А (г)

Полученные результаты показали возможность применения разработанного методического комплекса для цилиндрических конструкций в широкой полосе частот от 200 до 2000 Гц, что не всегда реализуемо средствами конечно-элементного анализа. Выявлено соответствие увеличения виброн нагружения увеличению акустического нагружения (рис. 4, в, г).

Получено уточнённое распределение КМП по частотам, а также его некоторое изменение при старте и в случае полёта. Предложенный подход может быть использован для конструкций с другими массовыми и жёсткостными характеристиками.

Библиографический список

1. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин. Л.: Судостроение, 1987. 317 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967. 368 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
4. Иголкин А.А., Попов П.А., Крючков А.Н. Проблемы звукоизоляции панелей отсеков РН и головных обтекателей в условиях старта и полёта // Тезисы докладов региональной научно-практической конференции, посвящённой 50-летию первого полёта человека в космос. Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2011. С. 139-140.
5. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

APPLICATION OF BUBNOV-GALERKIN METHOD TO DETERMINE FIXED VIBRATIONAL LOADS OF LAUNCH VEHICLE COMPARTMENTS

© 2017

- P. A. Popov** post-graduate student, the Department of Power Plant Automatic Systems; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; banduir@rambler.ru
- A. A. Sindjukov** post-graduate student, the Department of Power Plant Automatic Systems; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; sindyukovart@mail.ru
- O. I. Malykhina** post-graduate student, the Department of Theoretical Mechanics; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; maloliya@ya.ru

The stage of qualification vibration tests of space rocketry products is one of the most important stages of their design. To carry out the tests it is necessary to know the levels of vibration loads as early as the system definition stage. It is necessary to use methods that were previously tried and found efficient when defining the modes of vibration and acoustic loading on the structural elements of advanced launch vehicles and the assembly and protective blocks. The results of calculations made according to efficient methods in most cases agree with the results of full-scale measurements. We propose a methodological complex that will help engineers to create necessary vibration dynamic impact on the structures of space-rocketry products. Equations of shell vibration dynamics and a way of solving them on the basis of Bubnov-Galerkin method is presented in the paper. A method of forming the right-hand sides of the equations is also presented. The equations under consideration are equivalent to the actual spectra of external acoustic loads determined at the stage of flight development tests. A way of forming frequency-dependent damping characteristics of the structure is described. Spectral characteristics of vibration dynamic impact on a launch vehicle of the "Soyuz" type obtained by the results of processing of telemetric information are given. The vibration dynamic impact on the structure of the launch vehicle compartments is calculated on the basis of the characteristics specified. The results of the probability analysis of the vibration loads obtained are presented.

Launch vehicle; instrument module; acoustic pressure; vibration dynamics; fixed load; factor of mechanical losses; trial functions; complex Young module.

Citation: Popov P.A., Sindjukov A.A., Malykhina O.I. Application of Bubnov-Galerkin method to determine fixed vibrational loads of launch vehicle compartments. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2017. V. 16, no. 2. P. 101-110. DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-2-101-110

References

1. Pertsev A.K., Platonov E.G. *Dinamika obolochek i plastin* [Dynamics of shells and plates]. Leningrad: Sudostroenie Publ., 1987. 317 p.
2. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z. *Chislennye metody analiza* [Numerical analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1967. 368 p.
3. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Reference book on mathematics for science officers and engineers]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 720 p.
4. Igolkin A.A., Popov P.A., Kryuchkov A.N. Problemy zvukoizolyatsii paneley otsekov RN i golovnykh obtekateley v usloviyakh starta i poleta. *Tezisy dokladov regional'noy nauchno-prakticheskoy konferentsii, posvyashchennoy 50-letiyu pervogo poleta cheloveka v kosmos*. Samara: Samara State Aerospace University Publ., 2011. P. 139-140. (In Russ.)
5. Shenderov E.L. *Volnovie zadachi gidroakustiki* [Wave problems of hydroacoustics]. Leningrad: Sudostroenie Publ., 1972. 352 p.