УДК 532.5 DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-2-23-35

О ДВИЖЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТОПЛИВНЫХ БАКАХ С ЗАБОРНЫМИ УСТРОЙСТВАМИ

М. И. Дьяченко аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители»;
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана;
s_masyanya@mail.ru

Нгуен Зуй Хунг аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители»;
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана;
freedom_dh@yahoo.com.vn

А. Н. Темнов кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители»;
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана;
antt45@mail.ru

Представлены решения задач о собственных колебаниях жидкости в цилиндрических, конических и сферических ёмкостях с граничными условиями на свободной поверхности и поверхности с сопротивлением – поверхности слива. Особое внимание уделено нахождению собственных значений и частот уравнений колебаний возмущённого движения жидкости с наличием диссипации на граничных поверхностях. Показано, что малые скорости опускания свободной поверхности и условия сопротивления на поверхности слива могут влиять как на колебательную, так и на апериодическую часть решения задачи о колебаниях жидкости.

Ракета-носитель; топливный бак; несжимаемая жидкость; собственные числа; собственные формы колебания.

Цитирование: Дьяченко М.И., Нгуен Зуй Хунг, Темнов А.Н. О движении несжимаемой жидкости в топливных баках с заборными устройствами // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2017. Т. 16, № 2. С. 23-35. DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-2-23-35

Введение

Исследованию задачи о колебаниях жидкости в баках ракет-носителей посвящено много работ, например [1-4]. В работах авторов [5;6] приведена постановка модельной задачи о малых движениях несжимаемой жидкости, вытекающей из топливного бака с заборными устройствами (ЗУ). Исследование рассматриваемой задачи показало, что спектр нормальных движений несжимаемой жидкости (движений, подчиняющихся закону $e^{-\lambda t}$), заполняющей частично полость произвольной формы, обладает двумя ветвями собственных значений: дискретным множеством вещественных чисел, расположенных на положительной части вещественной оси, и дискретным множеством комплексно сопряжённых чисел, расположенных вблизи мнимой оси.

Приведены примеры задач о движении несжимаемой жидкости, наиболее распространённых на практике топливных баков в форме цилиндра, конуса и сферы.

Постановка задачи

Пусть несжимаемая жидкость, частично заполняющая неподвижный бак произвольной формы, вытекает через ЗУ и может совершать малые движения. Рассматриваемая проблема малых движений жидкости может быть описана уравнениями гидродинамики, линеаризованными вблизи невозмущённого состояния. Подробная постановка задачи приведена в работах [5-7].

Предполагая возмущённое движение жидкости потенциальным, сформулируем краевую задачу:

$\Delta\Phi = 0$ в области Q, заполненной жидкостью;

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ на смачиваемой поверхности S;

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} - \dfrac{\partial\mathit{\Phi}}{\partial x_3}V_0\left(H\right) + g\, w_\mathit{\Gamma} = f_1$ на свободной поверхности Γ_0;

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} - \dfrac{\partial\mathit{\Phi}}{\partial x_3}V_0\left(0\right) - \gamma\dot{w}_\Sigma = f_2$ на поверхности слива $\sum$;

$\Phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = \Phi^{(0)}$ при $t = 0$.

Здесь $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к поверхности S;

$w_\mathit{\Gamma} = \displaystyle\int \frac{\partial\mathit{\Phi}}{\partial x_3}dt,\ \dot{w}_\Sigma = \frac{\partial\mathit{\Phi}}{\partial x_3}$ – малые смещения и скорость частиц жидкости на поверхностях Γ_0 и $\sum$ соответственно; $\gamma = \xi V_\Sigma = \xi V_0(0)$ – обобщённый коэффициент сопротивления поверхности слива; ξ – коэффициент гидравлического сопротивления поверхности слива; g – величина интенсивности внешнего однородного поля массовых сил; $f_1,\ f_2$ – заданные поля внешних воздействий соответственно на поверхностях Γ_0 и $\sum$.

Проинтегрировав уравнение неразрывности по объёму, занимаемому жидкостью, для любого момента времени *t*, получим дополнительное интегральное условие $\displaystyle\int_\mathit{\Gamma} \vec{V}\,\vec{n}_\mathit{\Gamma}\, d\mathit{\Gamma} = \int_\Sigma \vec{V}\,\vec{n}_\Sigma dS$, которому должны подчиняться поле скоростей и поле смещений в рассматриваемой задаче.

Впервые исследование колебаний жидкости с учётом вытекания было предложено Кирилловым В.В. в работе [8] и продолжено в работах [3; 4; 9]. В упомянутых работах рассматривались задачи для жидкости, занимающей часть цилиндрического бака, на дне которого ставилось кинематическое условие вытекания.

Колебания жидкости в цилиндрической ёмкости

Рассмотрим задачу о собственных движениях жидкости, вытекающей через заборное устройство из цилиндрической ёмкости при наличии свободной поверхности. Используя цилиндрические координаты $r,\ \eta,\ x$ с началом на поверхности слива, получим задачу для определения потенциала смещений $\mathit{\Phi}\left(x, r, \eta, t\right)$

$$\frac{\partial^2\mathit{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathit{\Phi}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\mathit{\Phi} + \frac{\partial^2\mathit{\Phi}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{в } Q,\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\mathit{\Phi}}{\partial x}V_0(H) + g\int\frac{\partial\mathit{\Phi}}{\partial x}dt = 0 \quad \text{на } \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\mathit{\Phi}}{\partial x}V_0(0) - \gamma\frac{\partial\mathit{\Phi}}{\partial x} = 0 \quad \text{на } \Sigma,$$

$$\frac{\partial\mathit{\Phi}}{\partial r} = 0 \quad \text{на S},$$

$$\mathit{\Phi}(x, r, \eta, t) = \Phi^{(0)} \quad \text{при } t = 0.$$

Функцию $\Phi(x,r,\eta,t)$ представим в виде суммы двух функций:

$$\Phi(x,r,\eta,t)=\Phi_1(x,r,\eta,t)+\Phi_2(x,r,\eta,t)$$

и будем искать каждый потенциал $\Phi_1(x,r,\eta,t)$ и $\Phi_2(x,r,\eta,t)$ в виде произведения четырёх функций:

$$\Phi_1(x,r,\eta,t)=Z^{(1)}(x)R\ (r)H(\eta)\dot{S}\ (t),\ \Phi_2(x,r,\eta,t)=Z^{(2)}(x)R\ (r)H(\eta)\dot{\text{p}}\ (t).$$

Здесь $H(\eta)$ функция периода 2π и функция $R(r)$ удовлетворяют уравнению Бесселя, а функции $Z^{(1)}(x)$, $Z^{(2)}(x)$ – есть решения задач

$$\frac{d^2Z^{(1)}}{d\,x^2}-k^2Z^{(1)}=0,\ (0\le x\le H),$$
$$\frac{d}{dx}Z^{(1)}=0,\, x=0,\qquad \frac{d}{dx}Z^{(1)}=1,\, x=H,$$
$$\frac{d^2Z^{(2)}}{d\,x^2}-k^2Z^{(2)}=0,\ (0\le x\le H),$$
$$\frac{d}{dx}Z^{(2)}=1,\, x=0,\qquad \frac{d}{dx}Z^{(2)}=0,\, x=H\ .$$

Используя метод разделения переменных, находим выражения для потенциалов скоростей:

$$\Phi_1(x,r,\eta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(k_{mn}r)e^{im\eta}\frac{ch(k_{mn}x)}{sh(k_{mn}H)}\dot{S}_{mn}(t),$$

$$\Phi_2(x,r,\eta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(k_{mn}r)e^{im\eta}\frac{ch\big(k_{mn}(x-H(t))\big)}{sh(k_{mn}H)}\dot{p}_{mn}(t).$$

Здесь $J_m(k_{mn}r)$ – функция Бесселя первого рода m-го порядка; $k_{mn}r_0=\xi_{mn}$ – корни уравнения $dJ_m(\xi)/d\xi=0$, функции $S_{mn}(t)$, $p_{mn}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}&\ddot{S}_{mn}+\alpha_{mn}\ddot{p}_{mn}+V_0\varepsilon_{mn}\dot{p}_{mn}+V_0\delta_{mn}\dot{S}_{mn}+\omega^2{}_{mn}S_{mn}=0,\\&\ddot{p}_{mn}+\alpha_{mn}\ddot{S}_{mn}+V_0\varepsilon_{mn}\dot{S}_{mn}+(V_0\varepsilon'_{mn}+\gamma_{mn})\dot{p}_{mn}=0,\\&m=0,1,2...,\quad n=1,2,3...,\end{aligned}\tag{1}$$

где α_{mn}, ε_{mn} – коэффициенты инерционных и диссипативных связей;
$\omega^2{}_{mn}, \gamma_{mn}, \delta_{mn}, \varepsilon'_{mn}$ – динамические характеристики парциальных подсистем

$$\alpha_{mn}=\frac{1}{ch(k_{mn}H)},\ \varepsilon_{mn}=k_{mn}sh^{-1}(k_{mn}H),\ \gamma_{mn}=\gamma k_{mn}th(k_{mn}H),$$
$$\varepsilon'_{mn}=k_{mn}th^{-1}(k_{mn}H),\delta_{mn}=2k_{mn}/sh(2k_{mn}H),\omega^2{}_{mn}=gk_{mn}th(k_{mn}H).$$

Для определения собственных частот рассматриваемой механической системы положим $S_{mn} = A_{1mn}e^{\Omega t}$, $p_{mn} = A_{2mn}e^{\Omega t}$. Из уравнений (1) получаем характеристическое уравнение

$$\Omega^3 th\left(k_{mn}H\right) + \Omega^2 k_{mn}\left(V_0 + \gamma\right) + \Omega k_{mn}\left(V_0\delta_{mn}\gamma + g\right) + gk_{mn}\left(V_0\varepsilon'_{mn} + \gamma_{mn}\right) = 0, \qquad (2)$$

где Ω – комплексный коэффициент затухания волновых движений жидкости, $m = 0,1,2...,\quad n = 1,2,3...$.

Уравнение (2) имеет две ветви решений: действительные корни и ветвь комплексно-сопряжённых корней.

Для исследования уравнения введём безразмерные параметры

$$\bar{\Omega} = \Omega\ /\sqrt{g/r_0},\ \bar{\gamma} = \gamma/\sqrt{g\,r_0},\ \xi_{mn} = /k_{mn}r_0,\ \bar{H} = H/r_0,\ V_0^* = V_0/\sqrt{g\,r_0}$$

и перепишем уравнение (2) в безразмерном виде:

$$\begin{gathered}\bar{\Omega}^3 th\left(\xi_{mn}\bar{H}\right) + \bar{\Omega}^2\xi_{mn}\left(V_0^* + \bar{\gamma}\right) + \bar{\Omega}\xi_{mn}\left(\frac{2V_0^*\xi_{mn}}{sh2\xi_{mn}\bar{H}}\bar{\gamma} + 1\right) + \\ +\xi_{mn}^2\left(V_0^* cth\left(\xi_{mn}\bar{H}\right) + \bar{\gamma}\,th\left(\xi_{mn}\bar{H}\right)\right) = 0.\end{gathered} \qquad (3)$$

Результаты вычислений корней кубического уравнения (3) приведены в табл. 1.

Таблица 1. Собственные частоты колебаний жидкости в цилиндрической ёмкости при перераспределении жидкости из бака

V_0^*	$\bar{\beta} = \bar{\gamma}^{-1}$	$\bar{\Omega}_1$	$\bar{\Omega}_{2,3}$	$\chi^{(1)}$	$\frac{1}{\chi^{(2,3)}}$
00	0,05	-12,348	-0,00742±1,324i	-0,306	-0,00408±0,036i
00	0,15	-4,080	-0,021±1,330i	-0,280	-0,0338±0,0990i
0,04	0,01	-61,834	-0,00268±1,32318i	-0,309	-0,0003±0,0073i
0,04	0,05	-12,37	-0,00857±1,32413i	-0,305	-0,0047±0,0360i
0,04	0,1	-6,175	-0,01544±1,3266i	-0,295	-0,0170±0,0690i
0,04	0,15	-4,103	-0,02143±1,330i	-0,279	-0,0340±0,0980i
0,07	0,01	-61,85	-0,00357±1,32322i	-0,309	-0,0004±0,0073i
0,07	0,05	-12,387	-0,00942±1,32432i	-0,305	-0,0052±0,0360i
0,07	0,1	-6,192	-0,0162±1,326946i	-0,294	-0,0178±0,0690i
0,07	0,15	-4,12	-0,022±1,3307167i	-0,278	-0,036±0,097i
0,1	0	-6,181e-9	-0,003±1,323i	-0,309	-3,26e(-12) ±7,33e(-11)i
0,1	0,01	-61,867	-0,00445±1,3232i	-0,309	-0,0005±0,0073i
0,1	0,05	-12,404	-0,0103±1,3245i	-0,305	-0,0056±0,036i
0,1	0,1	-6,209	-0,0169±1,3272i	-0,293	-0,019±0,069i
0,1	0,15	-4,137	-0,0227±1,3311i	-0,276	-0,037±0,096i

В случае глубокой жидкости $\left(H > 1, th\left(\xi_{mn}\bar{H}\right) \to 1, sh\left(2\xi_{mn}\bar{H}\right) \to \infty\right)$ уравнение (3) принимает вид

$$\bar{\Omega}^3 + \bar{\Omega}^2\xi_{mn}\left(V_0^* + \bar{\gamma}\right) + \bar{\Omega}\xi_{mn} + \xi_{mn}^2\left(V_0^* + \bar{\gamma}\right) = 0$$

и имеет корни

$$\bar{\Omega}_0^{(1,2)} = \pm i\sqrt{\xi_{mn}},\quad \bar{\Omega}_0^{(3)} = -\left(V_0^* + \bar{\gamma}\right)\xi_{mn}.$$

В табл. 1 представлены результаты вычислений безразмерных собственных частот и коэффициентов распределения $\chi^{(k)} = A_1 / A_2$ при $\overline{H} = 1$, $m = 1$, $n = 1$, $\overline{\omega}_{11} = 1{,}323$ для различных значений V_0^*, $\overline{\beta} = \overline{\gamma}^{-1}$, а на рис. 1 показаны формы колебаний.

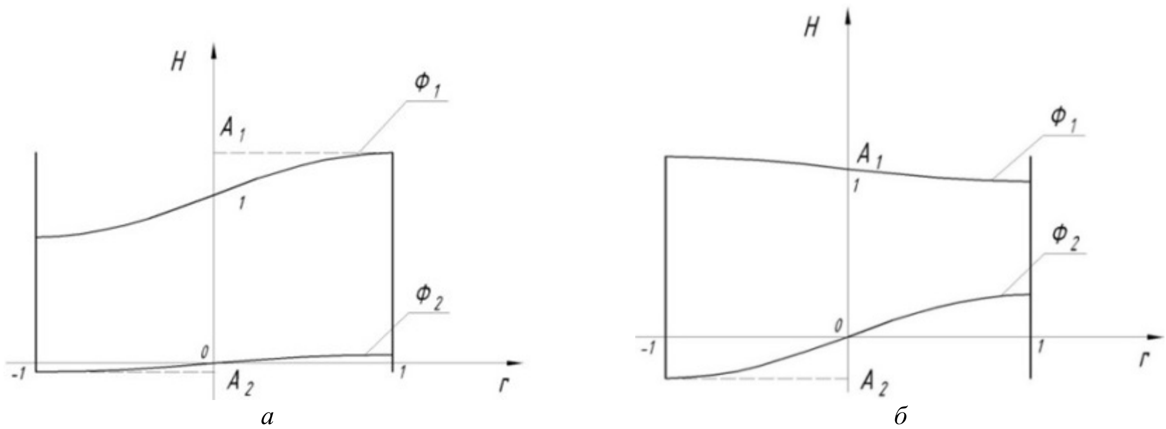

Рис. 1. Формы колебаний жидкости в цилиндрическом сосуде:
H=1; Ω=-0.0027+1.32i, m=1, n=1,* ξ_{11}*=1.841, A2/A1=0.007 (а)*
и Ω=-122.45, m=1, n=1,* ξ_{11}*=1.841, A1/A2=-0.043 (б)*

Колебания жидкости в конической ёмкости

Рассмотрим круговой конус, частично заполненный жидкостью. Введём сферическую систему координат R, ϑ, η с центром в вершине конуса (рис. 2). Угол ϑ отсчитывается от положительного направления оси *OZ,* угол η измеряется в плоскости *OXY* от оси *OX,* в сторону оси *OY*. Из рис. 2 следует, что $Z = R\cos\vartheta$, $y = R\sin\vartheta\sin\eta$, $x = R\sin\vartheta\cdot\cos\eta$. Если ограничиться малым углом конусности, то оказывается правомерным граничное условие для плоской невозмущённой свободной поверхности рассматривать на части сферической поверхности $R = R_1$. Очевидно, что уравнение для конической полости $R = R_2$, для боковой поверхности – $\vartheta = \vartheta_0$. Условием применимости полученных формул для плоской свободной поверхности является ограничение, накладываемое на угол конусности: $\sin\vartheta_0 >> 1 - \cos\vartheta_0$.

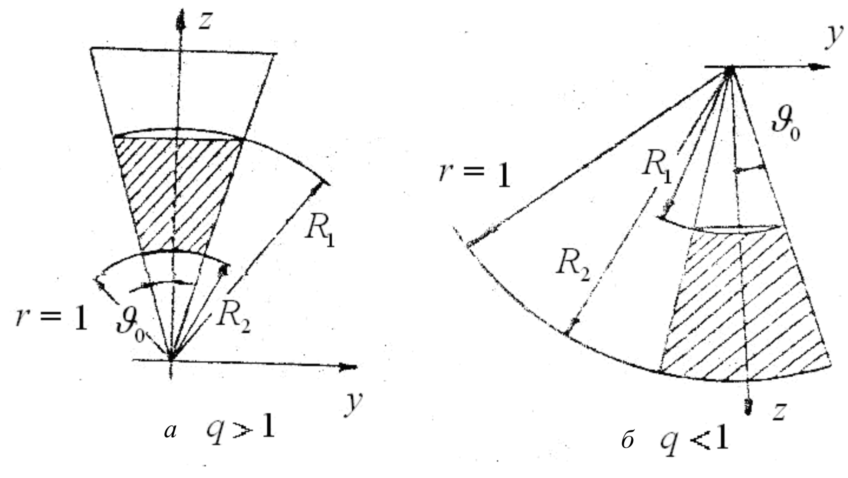

Рис. 2. Геометрические характеристики обратного и прямого конусов

Примем за характерный размер радиус дна конической полости $R = R_2$ и введём безразмерный радиус $r = R / R_2$. Обозначим $q = R_1 / R_2$. Допустим далее, что жидкость либо достигает вершины конуса, либо конус усечённый и имеет дно $R = R_2$ (рис. 2). Для сокращения будем называть полость на рис. 2, *а* – обратным усечённым (неусечённым) конусом $(q > 1)$.

Краевая задача о свободных колебаниях жидкости в конической полости имеет вид

$$\Delta\Phi = 0\,,\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0\,,\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{R_2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}V_0(q) + \frac{g}{R_2}\int\frac{\partial\Phi}{\partial r}dt = 0 \ \text{ на } \Gamma_0\,,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{R_2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}V_0(1) - \frac{\gamma}{R_2}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0 \ \text{ на } \Sigma\,, \tag{4}$$

где Δ – лапласиан, записываемый в сферических координатах.

Потенциал скоростей $\Phi(r,\vartheta,\eta,t)$ для конической полости представим в виде суммы потенциалов:

$$\Phi(r,\vartheta,\eta,t) = \Phi_1(r,\vartheta,\eta,t) + \Phi_2(r,\vartheta,\eta,t).$$

Используя метод разделения переменных, находим

$$\Phi_1(r,\vartheta,\eta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(\vartheta)e^{im\eta}R^s_{mn}(r)\,\dot{S}_{mn}(t)\,,$$

$$\Phi_2(r,\vartheta,\eta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(\vartheta)e^{im\eta}R^p_{mn}(r)\,\dot{p}_{mn}(t)\,,$$

где $Y_{mn}(\vartheta) = \dfrac{P^m_{\nu_{mn}}(\cos\vartheta)}{P^m_{\nu_{mn}}(\cos\vartheta_0)}$ – присоединённые функции Лежандра первого рода, ν-го порядка; ν_{mn} – *n*-ый корень уравнения $\dfrac{d}{d\vartheta}\left(P^m_{\nu_{mn}}(\cos\vartheta_0)\right) = 0$.

Функции $R^s_{mn}(r)$, $R^p_{mn}(r)$ соответственно равны:

$$R^S_{mn}(r) = \frac{q^{\nu_{mn}+2}}{q^{2\nu_{mn}+1}-1}\,\frac{(\nu_{mn}+1)r^{\nu_{mn}} + \nu_{mn}\,r^{-(\nu_{mn}+1)}}{\nu_{mn}(\nu_{mn}+1)}\,, \tag{5}$$

$$R^p_{mn}(r) = \frac{q^2}{q^{(2\nu_{mn}+1)}-1}\,\frac{(\nu_{mn}+1)r^{\nu_{mn}} + \nu_{mn}q^{(2\nu_{mn}+1)}r^{-(\nu_{mn}+1)}}{\nu_{mn}(\nu_{mn}+1)}.$$

Подставив полученные решения (5) в граничные условия задачи (4) и предполагая, что $S_{mn} = S_0e^{\Omega t}$, $p_{mn} = p_0e^{\Omega t}$, получим уравнение для определения собственных частот в безразмерном виде:

$$\bar{\Omega}^3 q\left(q^{2\nu+1}-1\right)+\bar{\Omega}^2\bar{V}_\Sigma\left[\frac{1}{q^2}\left(\nu q^{2\nu+1}+\nu+1\right)-\left(1+\zeta\right)q\left(q^{2\nu+1}\left(\nu+1\right)+\nu\right)\right]+$$
$$+\bar{\Omega}\left[\bar{V}_\Sigma^2\left(\nu+1\right)\nu\left(1+\zeta\right)\left(1-q^{2\nu+1}\right)+\left(\nu q^{2\nu+1}+\nu+1\right)\right]+\bar{V}_\Sigma\left(1+\zeta\right)\nu\left(\nu+1\right)\left(1-q^{2\nu+1}\right)=0,$$

где $\bar{\Omega}=\Omega\sqrt{\dfrac{R_2}{g}}$; $\bar{V}_\Sigma=\dfrac{V_\Sigma}{\sqrt{gR_2}}$; $q=\dfrac{R_1}{R_2}$; $V_\Sigma=V_0(1)$.

В табл. 2 представлены результаты расчётов собственных чисел в зависимости от скорости $\bar{V}_0$ и параметра $\bar{\beta}$.

Таблица 2. Собственные частоты колебаний жидкости в конической ёмкости при $\vartheta_o=45^o$, $\nu=2$, $q=\sqrt{2}+2$, $m=1$, $n=1$

$\bar{V}_0$	$\bar{\beta}$	$\overline{\Omega_1}$	$\overline{\Omega_{2,3}}$
0	0	0	0,00 ± 0,76386i
0	0,2	-15,0536	-0,000174 ± 0,76386i
0,05	0,2	-16,75109	-0,0473 ± 0,76505i
0,1	0,2	-18,44841	-0,0294 ± 0,76572i
0	0,5	-6,0207	-0,000429 ± 0,76391i
0,05	0,5	-7,71871	-0,01474 ± 0,76662i
0,1	0,5	-9,41601	-0,02943 ± 0,76805i
0	1	-3,00914	-0,00082 ± 0,76406i
0,05	1	-4,7083	-0,01455 ± 0,76845i
0,1	1	-6,4055	-0,02928 ± 0,77027i

Колебания жидкости в сферической ёмкости

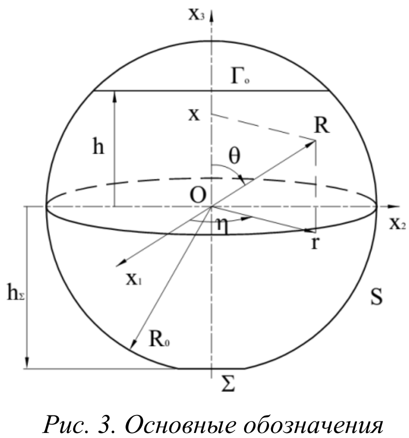

Рис. 3. Основные обозначения и системы координаты

Рассмотрим задачу о собственных движениях жидкости, вытекающей через заборные устройства из сферической ёмкости с радиусом R_0 при наличии свободной поверхности (рис. 3).

Введём обозначения: h – расстояние от центра бака до свободной поверхности, $r_0=\sqrt{R_0^2-h^2}$ – радиус свободной поверхности, h_Σ – расстояние от центра бака до поверхности слива, $r_\Sigma=\sqrt{R_0^2-h_\Sigma^2}$ – радиус поверхности слива. Используя цилиндрические координаты x, r, η с началом в центре сферы, получим задачу для определения потенциала скоростей $\Phi\left(x,r,\eta,t\right)$:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\Phi = 0 \quad \text{в } Q,\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}V_{0\Gamma} + g\int\frac{\partial\Phi}{\partial x}dt = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0 \ \left(x = h\right),\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}V_{0\Sigma} - \gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \ \text{ на } \Sigma \ \left(x = h_\Sigma\right),\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } S \ \left(R{=}R_0\right),\\
&\Phi\left(x,r,\eta,t\right) = \Phi^{(0)} \ \text{ при } t = 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Будем искать функцию $\Phi\left(x,r,\eta,t\right)$ в виде $\Phi\left(x,r,\eta,t\right) = \Phi_1\left(x,r,\eta,t\right) + \Phi_2\left(x,r,\eta,t\right)$.

Функции $\Phi_1\left(x,r,\eta,t\right)$, $\Phi_2\left(x,r,\eta,t\right)$ представим в видах

$$\Phi_1\left(x,r,\eta,t\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\Phi_{1m}\left(x,r,\eta,t\right),\ \Phi_2\left(x,r,\eta,t\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\Phi_{2m}\left(x,r,\eta,t\right).$$

Здесь функция $\Phi_{1m}\left(x,r,\eta,t\right)$ есть решение задачи

$$\Delta\Phi_{1m} = 0 \quad \text{в } Q,\ \frac{\partial\Phi_{1m}}{\partial x} \neq 0 \ \text{ на } \Gamma_0,\ \frac{\partial\Phi_{1m}}{\partial x} = 0 \ \text{ на } \Sigma,\ \ \frac{\partial\Phi_{1m}}{\partial n} = 0 \ \text{ на } S,$$

функция $\Phi_{2m}\left(x,r,\eta,t\right)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\Delta\Phi_{2m} = 0 \quad \text{на } Q,\ \frac{\partial\Phi_{2m}}{\partial x} = 0 \ \text{ на } \Gamma_0,\ \frac{\partial\Phi_{2m}}{\partial x} \neq 0 \ \text{ на } \Sigma,\ \ \frac{\partial\Phi_{2m}}{\partial n} = 0 \ \text{ на } S.$$

Представим функции $\Phi_{1m}(x,r,\eta,t)$, $\Phi_{2m}(x,r,\eta,t)$ в виде

$$
\begin{aligned}
\Phi_{1m}\left(x,r,\eta,t\right) &= \varphi_{1m}\left(x,r,\eta\right)\dot{S}_m\left(t\right) = \varphi^*_{1m}\left(x,r\right)H_m\left(\eta\right)\dot{S}_m\left(t\right),\\
\Phi_{2m}\left(x,r,\eta,t\right) &= \varphi_{2m}\left(x,r,\eta\right)\dot{p}_m\left(t\right) = \varphi^*_{2m}\left(x,r\right)H_m\left(\eta\right)\dot{p}_m\left(t\right).
\end{aligned}
$$

Здесь

$$H_m\left(\eta\right) = \begin{cases}\sin\left(m\eta\right)\\ \cos\left(m\eta\right)\end{cases},$$

функции $\varphi_{1m}\left(x,r,\eta\right) = \varphi^*_{1m}\left(x,r\right)H_m\left(\eta\right)$, $\varphi_{2m}\left(x,r,\eta\right) = \varphi^*_{2m}\left(x,r\right)H_m\left(\eta\right)$ есть решения вариационных задач: найти минимум функционалов [5]

$$F_1\left(\varphi_{1m}\right) = \int\limits_Q\left(\nabla\varphi_{1m}\right)^2 dQ - \chi_1\int\limits_{\Gamma_0}\left(\varphi_{1m}\right)^2 d\Gamma;\ \ F_2\left(\varphi_{2m}\right) = \int\limits_Q\left(\nabla\varphi_{2m}\right)^2 dQ - \chi_2\int\limits_{\Sigma}\left(\varphi_{2m}\right)^2 d\Gamma. \tag{7}$$

Используя метод Ритца, находим решения вариационных задач (7):

$$\varphi_{1m}\left(x,r,\eta\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{1mn}^{*}\left(x,r\right)H_m\left(\eta\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}a_{mnk}U_k\left(x,r\right)}{\sum\limits_{k=1}^{N}a_{mnk}\left.\frac{\partial U_k\left(x,r\right)}{\partial x}\right|_{\left(x=h,r=r_0\right)}}\right)H_m\left(\eta\right),$$

$$\varphi_{2m}\left(x,r,\eta\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{2mn}^{*}\left(x,r\right)H_m\left(\eta\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}b_{mnk}U_k\left(x,r\right)}{\sum\limits_{k=1}^{N}a_{mnk}\left.\frac{\partial U_k\left(x,r\right)}{\partial x}\right|_{\left(x=h,r=r_0\right)}}\right)H_m\left(\eta\right),$$

где a_{mnk}, b_{mnk} – коэффициенты, полученные при решении вариационных задач (7);
$U_k\left(x,r\right)=R^kP_k^{(m)}\left(\cos\theta\right)$ – координатные функции;
$P_k^{(m)}\left(\cos\theta\right)=\sin\theta^m\frac{d^m}{d^m\left(\cos\theta\right)}P_k\left(\cos\theta\right)$ – присоединённые функции Лежандра степени m;
$P_k\left(\cos\theta\right)=\frac{1}{2^k\,\mathrm{k}!}\frac{d^k}{d\left(\cos\theta\right)^k}\left(\cos^2\theta-1\right)^k$ – полином Лежандра степени k;
N – порядок приближения решений вариационных задач (7).

Тогда

$$\Phi_1\left(x,r,\eta,t\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}a_{mnk}U_k\left(x,r\right)}{\sum\limits_{k=1}^{N}a_{mnk}\left.\frac{\partial U_k\left(x,r\right)}{\partial x}\right|_{\left(x=h,r=r_0\right)}}\right)H_m\left(\eta\right)\dot{S}_{mn}\left(t\right),$$

$$\Phi_2\left(x,r,\eta,t\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}b_{mnk}U_k\left(x,r\right)}{\sum\limits_{k=1}^{N}a_{mnk}\left.\frac{\partial U_k\left(x,r\right)}{\partial x}\right|_{\left(x=h,r=r_0\right)}}\right)H_m\left(\eta\right)\dot{p}_{mn}\left(t\right). \qquad (8)$$

Поставив (8) во второе и третье уравнения задачи (6), получим

$$\left[\begin{array}{l}\varphi_{1mn}^{*}\ddot{S}_{mn}-V_{0\Gamma}\left(\frac{\partial\varphi_{1mn}^{*}}{\partial h}+\frac{\partial\varphi_{1mn}^{*}}{\partial x}\right)\dot{S}_{mn}+\varphi_{2mn}^{*}\ddot{p}_{mn}-\\-V_{0\Gamma}\frac{\partial\varphi_{2mn}^{*}}{\partial h}\dot{p}_m+g\frac{\partial\varphi_{1mn}^{*}}{\partial x}S_{mn}\end{array}\right]H_m\left(\eta\right)=0, \qquad (9)$$

$$\left[\begin{array}{l}\varphi_{2mn}^{*}\ddot{p}_{mn}+\left(-V_{0\Gamma}\dfrac{\partial\varphi_{2mn}^{*}}{\partial h}-\left(V_{0\Sigma}+\gamma\right)\dfrac{\partial\varphi_{2mn}^{*}}{\partial x}\right)\dot{p}_{mn}+\\ +\varphi_{1mn}^{*}\ddot{S}_{mn}-V_{0\Gamma}\dfrac{\partial\varphi_{1mn}^{*}}{\partial h}\dot{S}_{mn}\end{array}\right]H_m\left(\eta\right)=0. \tag{10}$$

Умножив (9) на $\varphi_{1mn}^{*}H_m$, (10) – на $\varphi_{2mn}^{*}H_m$ и проинтегрировав по поверхностям Γ_0 и Σ соответственно, получим

$$\begin{aligned}&\ddot{S}_{mn}+\alpha_{mn}^{(1)}\ddot{p}_{mn}+V_{0\Gamma}\varepsilon_{mn}^{(1)}\dot{p}_{mn}+V_{0\Gamma}\delta_{mn}^{(1)}\dot{S}_{mn}+\omega_{mn}^{2}S_{mn}=0,\\&\ddot{p}_{mn}+\alpha_{mn}^{(2)}\ddot{S}_{mn}+V_{0\Gamma}\varepsilon_{mn}^{(2)}\dot{S}_{mn}+\left(V_{0\Gamma}\varepsilon_{mn}^{(2)'}-\left(V_{0\Sigma}+\gamma\right)\sigma_{mn}\right)\dot{p}_{mn}=0,\\&m=0,1,2,...\ ,\ n=1,2,3...\ .\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь

$$\alpha_{mn}^{(1)}=\frac{\int_0^{r_0}\varphi_{1mn}^{*}\varphi_{2mn}^{*}rdr}{\int_0^{r_0}\varphi_{1mn}^{*}\varphi_{1mn}^{*}rdr},\quad \varepsilon_{mn}^{(1)}=\frac{-\int_0^{r_0}\varphi_{1mn}^{*}\dfrac{\partial\varphi_{2mn}^{*}}{\partial h}rddr}{\int_0^{r_0}\varphi_{1mn}^{*}\varphi_{1mn}^{*}rdr},\quad \omega_{mn}^{2}=g\frac{\int_0^{r_0}\varphi_{1mn}^{*}\dfrac{\partial\varphi_{1mn}^{*}}{\partial x}rdr}{\int_0^{r_0}\varphi_{1mn}^{*}\varphi_{1mn}^{*}rdr},$$

$$\delta_{mn}^{(1)}=\frac{-\int_0^{r_0}\varphi_{1mn}^{*}\dfrac{\partial\varphi_{1mn}^{*}}{\partial h}rdr-\int_0^{r_0}\varphi_{1mn}^{*}\dfrac{\partial\varphi_{1mn}^{*}}{\partial x}rdr}{\int_0^{r_0}\varphi_{1mn}^{*}\varphi_{1mn}^{*}rdr},\quad \alpha_{mn}^{(2)}=\frac{\int_0^{r_\Sigma}\varphi_{1mn}^{*}\varphi_{2mn}^{*}rdr}{\int_0^{r_\Sigma}\varphi_{2mn}^{*}\varphi_{2mn}^{*}rdr},$$

$$\varepsilon_{mn}^{(2)}=\frac{-\int_0^{r_\Sigma}\varphi_{2mn}^{*}\dfrac{\partial\varphi_{1mn}^{*}}{\partial h}rdr}{\int_0^{r_\Sigma}\varphi_{2mn}^{*}\varphi_{2mn}^{*}rdr},\quad \varepsilon_{m}^{(2)'}=\frac{-\int_0^{r_\Sigma}\varphi_{2mn}^{*}\dfrac{\partial\varphi_{2mn}^{*}}{\partial h}rdr}{\int_0^{r_\Sigma}\varphi_{2mn}^{*}\varphi_{2mn}^{*}rdr},\quad \sigma_{mn}=\frac{\int_0^{r_\Sigma}\varphi_{2mn}^{*}\dfrac{\partial\varphi_{2mn}^{*}}{\partial x}rdr}{\int_0^{r_\Sigma}\varphi_{2mn}^{*}\varphi_{2mn}^{*}rdr}.$$

Для определения собственных частот рассматриваемой механической системы положим $S_{mn}=A_{1mn}e^{\Omega t}$, $p_{mn}=A_{2mn}e^{\Omega t}$. Из уравнений (11) получаем характеристическое уравнение

$$k_{mn}^{(3)}\Omega^3+k_{mn}^{(2)}\Omega^2+k_{mn}^{(1)}\Omega+k_{mn}^{(0)}=0, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}&k_{mn}^{(3)}=1+\alpha_{mn}^{(1)}\alpha_{mn}^{(2)},\ k_{mn}^{(0)}=\omega_{mn}^{2}\left(V_{0\Gamma}\varepsilon_{mn}^{(2)'}-\left(V_{0\Sigma}+\gamma\right)\sigma_{mn}\right),\\&k_{mn}^{(1)}=V_{0\Gamma}^{2}\left(\delta_{mn}^{(1)}\varepsilon_{mn}^{(2)'}+\varepsilon_{m}^{(1)}\varepsilon_{mn}^{(2)}\right)-V_{0\Gamma}\delta_{mn}^{(1)}\left(V_{0\Sigma}+\gamma\right)\sigma_{mn}+\omega_{mn}^{2},\\&k_{mn}^{(2)}=V_{0\Gamma}\left(\alpha_{mn}^{(1)}\varepsilon_{mn}^{(2)}+\alpha_{mn}^{(2)}\varepsilon_{mn}^{(1)}+\delta_{mn}^{(1)}+\varepsilon_{mn}^{(2)'}\right)-\left(V_{0\Sigma}+\gamma\right)\sigma_{mn},\\&m=0,1,2,...,\ n=1,2,3...\ .\end{aligned}$$

Результаты вычислений корней кубического уравнения (12) при $R_0=1$ м, $r_\Sigma=0{,}1$ м, $m=1$, $n=1$, $N=8$ для различных значений h, $V_{0\Gamma}$, γ приведены в табл. 3, а на рис. 3 показаны формы колебаний.

Таблица 3. Собственные частоты колебаний жидкости в сферической ёмкости при перераспределении жидкости из бака

h, м	$V_{0Г}$, м/с	γ, м/с	ω_{11}, c^{-1}	Ω_1, c^{-1}	$\Omega_{2,3}, c^{-1}$
0.3	0	10	4.34952	-48.97461	-0.00009 $\pm$ 4.34953i
0.1	0	10	4.03415	-45.97863	-0.00003 $\pm$ 4.03415i
0.3	0.02	10	4.34952	-58.09474	-0.02556 $\pm$ 4.34949i
0.3	0.04	20	4.34952	-116.18973	-0.05101 $\pm$ 4.34926i
0.3	0.04	40	4.34952	-214.13938	-0.05099 $\pm$ 4.34924i
0.3	0.04	60	4.34952	-312.08901	-0.05099 $\pm$ 4.34923i
0.3	0.04	80	4.34952	-410.03864	-0.05099 $\pm$ 4.34920i
0.3	0.04	100	4.34952	-507.98827	-0.05098 $\pm$ 4.34923i
0.3	0.06	20	4.34952	-125.30984	-0.07649 $\pm$ 4.34890i
-0.3	0.04	20	3.60282	-97.64699	-0.07718 $\pm$ 3.60185i
-0.2	0.04	20	3.69414	-102.05484	-0.06553 $\pm$ 3.69356i
-0.1	0.04	20	3.79478	-104.25786	-0.06268 $\pm$ 3.79427i
0.1	0.04	20	4.03415	-110.27247	-0.06251 $\pm$ 4.03365i
0.2	0.04	20	4.17999	-112.15043	-0.06517 $\pm$ 4.17950i
0.4	0.04	20	4.55001	-118.82946	-0.02732 $\pm$ 4.54984i

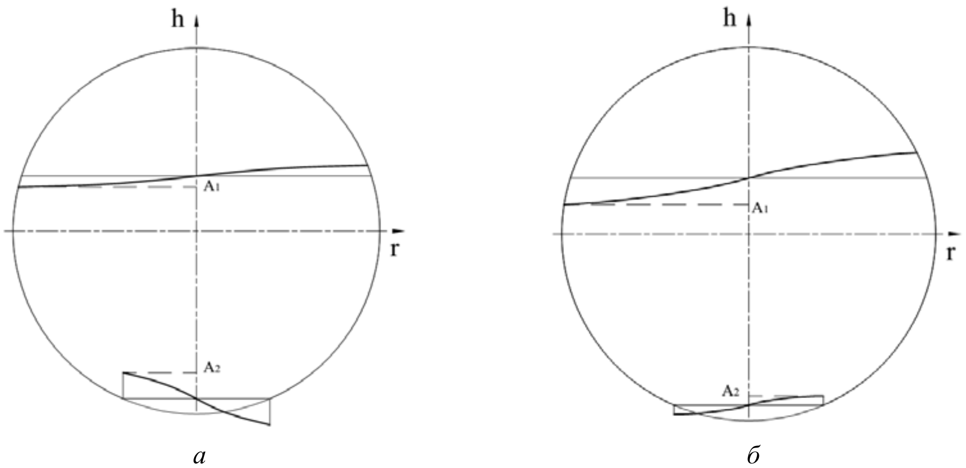

Рис. 3. Формы колебаний жидкости в сферическом сосуде:
$h = 0{,}2\,\text{м}\ \ m = 1,\ \ n = 1,\ \Omega = -112.15043\,(a)$ и $-0.06517 + 4.17950i\ (б)$

Заключение

Спектр нормальных движений несжимаемой жидкости обладает двумя ветвями собственных значений: дискретного множества вещественных чисел и дискретного множества комплексно-сопряжённых чисел, расположенных вблизи мнимой оси. Случаю отрицательных вещественных корней отвечают апериодические движения жидкости, а случаю отрицательных вещественных составляющих решений отвечают затухающие колебания.

Библиографический список

1. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
2. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твёрдого тела. Киев: Наукова думка, 1990. 296 с.

3. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчёта собственных частот колебаний ограниченного объёма жидкости. М.: Вычислительный центр АН СССР, 1966. 270 с.

4. Лимарченко О.С., Матараццо Д., Ясинский В.В. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью. Киев: ГНОЗИС, 2002. 304 с.

5. Степанова М.И., Темнов А.Н. Малые движения жидкости с поверхностной диссипацией энергии // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2011. № 4. С. 99-110.

6. Дьяченко (Степанова) М.И., Темнов А.Н. Собственные колебания жидкого топлива в условиях перераспределения // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2012. № 3. С. 31-38.

7. Дьяченко М.И., Темнов А.Н. Проблемы динамики перераспределения топлива в крупногабаритных ракетно-космических объектах // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 8 (8). С. 164-174. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-8-457

8. Кириллов В.В. Исследование колебаний жидкости в неподвижном сосуде с учётом её вытекания // Труды Московского физико-технического института. 1960. № 5. С. 19-25.

9. Орлов В.В., Темнов А.Н. Малые движения жидкости, вытекающей из бака // Сб. тезисов докладов Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж: Воронежский государственный университет, 1997. С. 124.

FLUCTUATIONS OF LIQUID FUEL IN TANKS WITH OIL RECOVERY UNITS

M. I. Dyachenko Postgraduate student , Department of Spacecraft and Launch Vehicles;
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation;
s_masyanya@mail.ru

Nguyen Duy Hung Postgraduate student, Department of Spacecraft and Launch Vehicles;
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation;
freedom_dh@yahoo.com.vn

A. N. Temnov Candidate of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles;
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation;
antt45@mail.ru

The article presents solutions of problems of natural fluctuations of liquid in cylindrical, conical and spherical tanks, with boundary conditions on the free surface and the surface with resistance, i.e. the drain surface. Particular attention is paid to finding the eigenvalues and eigenfrequencies of equations of oscillations of perturbed motion of fluid with the presence of dissipation on the boundary surfaces. It is shown that low speed of lowering of the free surface and resistance conditions on the surface of the drain can affect both the oscillatory and the aperiodic parts of the solution of the fluid oscillation problem.

Redistribution; cylindrical tank; conical tank; spherical tank; cluster configuration; fuel tank; launch vehicle; incompressible fluid; eigenvalues and eigenvibrations.

Citation: Dyachenko M.I., Nguyen Duy Hung, Temnov A.N. Fluctuations of liquid fuel in tanks with oil recovery units. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2017. V. 16, no. 2. P. 23-35. DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-2-23-35

References

1. Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [Dynamics of missiles]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 2003. 520 p.

2. Lukovskiy I.A. *Vvedenie v nelineynuyu dinamiku tverdogo tela* [Introduction to non-linear rigid body dynamics]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1990. 296 p.

3. Moiseev N.N., Petrov A.A. *Chislennye metody rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy ogranichennogo ob'ema zhidkosti* [Numerical methods of calculating natural frequencies of oscillations of a limited volume of liquid]. Moscow: Vychislitel'nyy Tsentr AN SSSR Publ., 1966. 270 p.

4. Limarchenko O.S., Mataratstso D., Yasinskiy V.V. *Dinamika vrashchayushchikhsya konstruktsiy s zhidkost'yu* [Dynamics of rotating structures with liquid]. Kiev: GNOZIS Publ., 2002. 304 p.

5. Stepanova M.I., Temnov A.N. Small Motions of Liquid with Surface Energy Dissipation. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 2011. No. 4. P. 99-110. (In Russ.)

6. D'yachenko M.I., Temnov A.N. Natural Oscillations of Liquid Propellant under Redistribution Conditions. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*. 2012. No. 3. P. 31-38. (In Russ.)

7. Dyachenko M.I., Temnov A.N. Problems of Fuel Redistribution Dynamics in Large-Sized Rocket and Space Objects. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2012. No. 8 (8). P. 164-174 (In Russ.). DOI: 10.18698/2308-6033-2012-8-457

8. Kirillov V.V. Study of oscillations of liquid in stationary vessel taking into account its leakage. *Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*. 1960. No. 5. P. 19-25. (In Russ.)

9. Orlov V.V., Temnov A.N. Malye dvizheniya zhidkosti, vytekayushchey iz baka. *Sb. tezisov dokladov Voronezhskoy zimney matematicheskoy shkoly «Sovremennye metody teorii funktsiy i smezhnye problemy»*. Voronezh: Voronezh State University Publ., 1997. P. 124. (In Russ.)