

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЕМОГО УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ НАНОСПУТНИКА С ИНЕРЦИОННЫМИ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОРГАНАМИ

© 2016 М. М. Молдабеков, Д. Ш. Ахмедов, С. А. Елубаев,  
А. С. Сухенко, Т. М. Бопеев, К. А. Алипбаев, Д. Л. Михайленко

Институт космической техники и технологий, г. Алматы, Республика Казахстан

В статье рассматривается проблема разработки системы управления ориентацией наноспутника с помощью трёх маховиков, установленных вдоль его главных центральных осей инерции. В основу разработки закона управления ориентацией наноспутника положен PD-регулятор. Проведено исследование устойчивости процесса управления ориентацией наноспутника с помощью метода функций Ляпунова, позволившее доказать, что полученный закон управления ориентацией обеспечивает асимптотическую устойчивость вращательного движения наноспутника. В дальнейшем, основываясь на выведенной математической модели динамики маховиков, получен вид функции управляющего напряжения для электродвигателей маховиков с учётом их технических характеристик. Проведены численные исследования управляемого вращательного движения для наноспутника типа CubeSat3U с маховиками на базе коммерческого электродвигателя постоянного тока. В ходе численных экспериментов рассмотрено несколько случаев управления поворотом наноспутника на различные углы. Результаты численных экспериментов показали адекватность разработанной математической модели.

*Наноспутник, трёхосная ориентация, маховик, закон управления угловым движением, исследование устойчивости.*

### Введение

Достижения последних лет в области микроэлектроники, микроэлектромеханики и технологии производства интегральных схем позволили создавать малые космические аппараты (мини-, микро- и наноспутники) с невысокой стоимостью и небольшим временем подготовки, но с высоким уровнем функциональных параметров. На спутнике такого класса можно устанавливать практически все присущие большому космическому аппарату бортовые системы: систему управления ориентацией, систему энергоснабжения, систему связи, бортовой комплекс управления [1]. Система управления ориентацией обеспечивает стабилизацию наноспутника и его ориентирование в заданном направлении в процессе полёта. Решение этих задач требует определения ориентации наноспутника с помощью датчиков ори-

ентации и управления ею с помощью исполнительных органов [2].

Ориентация наноспутника может быть определена с помощью магнитных и солнечных датчиков, угловая скорость – с помощью гироскопического датчика, а при необходимости сверхточного определения ориентации используются звёздные датчики.

Управление ориентацией наноспутника может быть осуществлено как с помощью пассивных исполнительных органов (гравитационная штанга, постоянный магнит), так и с помощью активных исполнительных органов (инерционные исполнительные органы – маховики и электромагнитные исполнительные органы). Системы управления ориентацией, использующие активные исполнительные органы, способны к более сложным пространственным манёврам [2].

*Цитирование:* Молдабеков М.М., Ахмедов Д.Ш., Елубаев С.А., Сухенко А.С., Бопеев Т.М., Алипбаев К.А., Михайленко Д.Л. Математическая модель управляемого углового движения наноспутника с инерционными исполнительными органами // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). 2016. Т. 15, № 1. С. 97-106. DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-1-97-106

В данной работе рассматривается задача разработки математической модели управления трёхосной ориентацией наноспутника с помощью трёх маховиков, установленных вдоль его главных центральных осей инерции. Для решения задачи требуется определить закон изменения вектора управляющего момента или закон управления движением маховиков, позволяющий переводить наноспутник из текущего углового положения в другое требуемое угловое положение.

### Математическая модель системы управления ориентацией

Для описания ориентации наноспутника введём неподвижную инерциальную систему координат  $OXYZ$  с началом в центре масс Земли и связанную систему координат  $Sxyz$  с началом в центре масс наноспутника. Для описания динамики вращательного движения наноспутника применим динамические уравнения Эйлера для вращательного движения твёрдого тела с неподвижной точкой [3]:

$$J\vec{\dot{\omega}} + \vec{\omega} \times J\vec{\omega} = \vec{M}_{вн}, \quad (1)$$

где  $J = \{J_1, J_2, J_3\}$  – диагональная (3×3) матрица тензора инерции наноспутника;  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  – вектор абсолютной угловой скорости наноспутника в проекциях на оси системы координат  $Sxyz$ ;  $\vec{M}_{вн} = (M_{вн1}, M_{вн2}, M_{вн3})^T$  – вектор главного момента внешних сил в проекциях на оси системы координат  $Sxyz$ .

Поскольку три маховика, установленных на наноспутнике, имеют подвижные относительно него элементы, наноспутник следует рассматривать как систему четырёх твёрдых тел. Соответственно силы и моменты взаимодействия маховиков с наноспутником следует рассматривать как внутренние силы и моменты. В этом случае действующие на наноспутник

внешние силы и моменты равны нулю:  $\vec{M}_{вн} = 0$ .

Как следствие, суммарный кинетический момент наноспутника и маховиков согласно теореме об изменении кинетического момента будет величиной постоянной:

$$J\vec{\omega} + J_m\vec{\omega}_m = \text{const}, \quad (2)$$

где  $J_m = \{J_{m1}, J_{m2}, J_{m3}\}$  – диагональная (3×3) матрица тензора инерции маховиков;  $\vec{\omega}_m = (\omega_{m1}, \omega_{m2}, \omega_{m3})^T$  – вектор угловых скоростей маховиков, установленных вдоль осей  $x, y, z$  соответственно.

Дифференцируя равенство (2) по времени, получим динамические уравнения Эйлера в виде:

$$J\vec{\dot{\omega}} + \vec{\omega} \times (J\vec{\omega} + J_m\vec{\omega}_m) = \vec{M}, \quad (3)$$

где через

$$\vec{M} = -J_m\vec{\dot{\omega}}_m \quad (4)$$

обозначен вектор управляющих моментов маховиков.

Рассмотрим кинематические уравнения вращательного движения наноспутника в кватернионах. Согласно работе [4] кинематические уравнения в кватернионах, характеризующие изменение углового положения наноспутника, можно записать в виде:

$$\vec{\dot{\omega}} = 2\vec{Q}^* \otimes \vec{Q}, \quad (5)$$

где  $\vec{Q} = q_0 + q_1\vec{k}_1 + q_2\vec{k}_2 + q_3\vec{k}_3$  – кватернион, задающий текущее угловое движение наноспутника относительно инерциальной системы координат;  $\vec{Q}^*$  – кватернион, обратный к  $\vec{Q}$ .

Пусть маховик приводится во вращение с помощью электродвигателя (ЭД) постоянного тока и связан с ЭД через вал

последнего. Как известно, для определённых типов ЭД влиянием индуктивности якоря на динамику вращения маховика можно пренебречь по сравнению с влиянием момента инерции самого маховика. В этом случае изменение основных переменных состояния ЭД описывается следующими уравнениями [5]:

$$\begin{cases} RI + k_e \omega_m = U, \\ J_m \frac{d\omega_m}{dt} = k_e I, \end{cases} \quad (6)$$

где  $I$ ,  $U$ ,  $R$  – электрический ток, напряжение питания и сопротивление якоря электродвигателя соответственно;  $k_e$  – константа противо-ЭДС электродвигателя;  $J_m = J'_m + J_\partial$  – приведённый к общему валу маховика суммарный момент инерции якоря ЭД и маховика.

Перейдём от системы уравнений (6) относительно угловой скорости маховика  $\omega_m$  и тока якоря электродвигателя  $I$  к одному уравнению относительно угловой скорости маховика  $\omega_m$ :

$$\dot{\omega}_m + \frac{1}{T} \omega_m = kU, \quad (7)$$

$$\text{где } T = \frac{J_m R}{k_e^2}, \quad k = \frac{k_e}{J_m R}.$$

Как видно из уравнения (7), управление маховиком осуществляется путём изменения напряжения  $U$  якоря ЭД. Полученное дифференциальное уравнение (7) может быть использовано для описания динамики каждого из трёх маховиков наноспутника.

Таким образом, система управления (СУ) движением наноспутника описывается системой дифференциальных уравнений (3), (5) и трёх уравнений вида (7). Эта система включает 10 дифференциальных уравнений первого порядка с 10 неизвестными и является полной.

Рассмотрим задачу построения СУ ориентацией наноспутника на основе за-

кона управления с обратной связью по угловой скорости и положению наноспутника вида:

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{\omega}_E, \vec{Q}, \vec{p}), \quad (8)$$

где  $\vec{p}$  – вектор неизвестных параметров закона управления.

Конкретная задача построения СУ при известном виде закона управления (8) будет сводиться к определению (выбору) вектора параметров  $\vec{p}$  закона управления, исходя из условий устойчивости и качества процессов управления. Для решения задачи устойчивости применим метод функций Ляпунова. Метод заключается в том, что задача определения области устойчивости в пространстве параметров  $\vec{p}$  сводится к построению функции Ляпунова, удовлетворяющей теореме об асимптотической устойчивости движения.

### Исследование устойчивости методом функций Ляпунова

Система дифференциальных уравнений (3), (5), (7) имеет независимую подсистему из трёх уравнений вида (7) относительно угловых скоростей маховиков. Поэтому её можно решить независимо от остальных уравнений движения при известных во времени значениях напряжения питания ЭД. Таким образом, для исследования устойчивости достаточно исследовать решение системы семи дифференциальных уравнений (3) и (5).

Построение функций Ляпунова для системы дифференциальных уравнений вида (3) и (5) рассмотрено в ряде работ, например [6 - 8]. Предложенные в этих работах законы управления с обратной связью отличаются между собой, однако общим является то, что все они реализуют пропорционально-дифференциальный PD-регулятор, т.е. основаны на использовании обратных связей по угловому положению и угловой скорости наноспутника.

Следуя этому подходу, зададим закон управления с обратной связью в виде линейной функции:

$$M_i = -h_i \omega_i - \alpha_i q_0 q_i, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (9)$$

где  $h_i, \alpha_i$  – неизвестные произвольные

$$T(\vec{\omega}, \vec{Q}) = \frac{1}{2}(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) + 1 - q_0^2 = \frac{1}{2}(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) + \frac{1}{2}[(1 - q_0^2) + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2]. \quad (10)$$

Эта функция принимает только положительные значения и обращается в нуль только в заданном ориентированном положении наноспутника относительно инерциальной системы координат:

$$\vec{\omega} = (0, 0, 0)^T, \quad \vec{Q} = (1, 0, 0, 0)^T. \quad (11)$$

Согласно теореме Ляпунова [9] для асимптотической устойчивости рассматриваемого движения достаточно, чтобы полная производная по времени от функции Ляпунова (10) была отрицательно-

$$\dot{T} = (J_{m3} \omega_{m3} - J_{m2} \omega_{m2}) \omega_1 + (J_{m1} \omega_{m1} - J_{m3} \omega_{m3}) \omega_2 + (J_{m2} \omega_{m2} - J_{m1} \omega_{m1}) \omega_3 + \sum_{i=1}^3 M_i \omega_i + \sum_{i=1}^3 q_0 q_i \omega_i. \quad (13)$$

Допустим, что коэффициенты при следующих трёх слагаемых в правой части равенства (13) равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} J_{m3} \omega_{m3} - J_{m2} \omega_{m2} &= 0, \\ J_{m1} \omega_{m1} - J_{m3} \omega_{m3} &= 0, \\ J_{m2} \omega_{m2} - J_{m1} \omega_{m1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Решение этой однородной линейной системы алгебраических уравнений даёт:

$$J_{mi} \omega_{mi} = C \omega_m^0, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (15)$$

где  $C = \text{const}$ ;  $\omega_m^0 = \omega_m^0(t)$  – произвольная функция времени  $t$ .

Отсюда следует, что условия (15) могут иметь место в случае, когда угловые скорости маховиков  $\omega_{mi} (i = \overline{1,3})$  будут

параметры закона управления, которые должны быть определены из условий устойчивости движения.

Будем искать функцию Ляпунова в виде положительно-определённой функции переменных  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, q_0, q_1, q_2, q_3$  вида:

определённой функцией и обращалась в нуль только в заданном ориентированном угловом положении наноспутника.

Производная функции  $T(\vec{\omega}, \vec{Q})$  по времени будет определяться как

$$\dot{T} = \frac{dT(\vec{\omega}, \vec{Q})}{dt} = \sum_{i=1}^3 \omega_i J_i \dot{\omega}_i + \sum_{i=1}^3 q_0 q_i \dot{\omega}_i. \quad (12)$$

Отсюда в силу уравнений (3), (5) будем иметь:

синхронизированы между собой во времени:

$$\omega_{mi}(t) = C_i \omega_m^0(t), \quad C_i = \frac{C}{J_{mi}}, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (16)$$

При выполнении условий (14) из (13) имеем:

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^3 M_i \omega_i + \sum_{i=1}^3 q_0 q_i \omega_i.$$

Это равенство с учётом (9) примет вид:

$$\dot{T} = -\sum_{i=1}^3 h_i \omega_i^2 - \sum_{i=1}^3 (\alpha_i - 1) q_0 q_i \omega_i.$$

Допустим, что  $\alpha_i = 1, (i = \overline{1,3})$ , тогда:

$$\dot{T} = -\sum_{i=1}^3 h_i \omega_i^2. \quad (17)$$

Эта функция будет отрицательно-определённой, если  $h_i > 0, (i = \overline{1,3})$ . Отсюда следует, что управление с обратной связью вида (9) обеспечивает асимптотическую устойчивость движения системы управления ориентацией наноспутника при  $\alpha_i = 1, h_i > 0 (i = \overline{1,3})$  и условиях (16).

### Определение неизвестных параметров управления

Один из параметров закона управления  $\alpha_i, (i = \overline{1,3})$  определён в ходе исследования устойчивости. Для определения второго параметра закона управления  $h_i (i = \overline{1,3})$  используем метод оптимального LQR-синтеза.

Синтез параметров управления методом оптимального LQR - синтеза основан на использовании линейной модели системы управления в переменных состояния:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (18)$$

с законом управления в виде линейной функции:

$$u(t) = -Kx(t), \quad (19)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} u(t). \quad (23)$$

где  $x(t)$  – вектор состояния системы;  $u(t)$  – вектор управления;  $A$  – матрица системы;  $B$  – матрица управления;  $K$  – матрица неизвестных параметров управления.

Задача оптимального LQR - синтеза состоит в том, чтобы найти матрицу  $K$ , минимизирующую функционал [10]:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt, \quad (20)$$

где  $Q \geq 0$  – знакоположительная симметрическая матрица;  $R > 0$  – положительно-определённая симметрическая матрица.

Матрица  $K$  в соответствии с теорией оптимального LQR-синтеза имеет вид [10]:

$$K = -R^{-1} B^T P, \quad (21)$$

где матрица  $P$  определяется путём решения матричного алгебраического уравнения Риккати [10]:

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (22)$$

Матрицы  $P$  и  $Q$  в уравнении (22) представляют собой положительно определённые симметрические матрицы.

Для реализации синтеза (1) и (5) уравнения движения необходимо линеаризовать.

Линеаризованные уравнения (3), (5) имеют вид:

### Результаты моделирования управляемого углового движения наноспутника

Исследование управляемого углового движения проводилось для наноспутника типа CubeSat3U с маховиками на базе коммерческого электродвигателя постоянного тока.

Моменты инерции наноспутника  $J = [0.04088; 0.04088; 0.01116]$  кгм<sup>2</sup>.

$$K = \begin{bmatrix} 0.0032 & 0 & 0 & 0.0118 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0032 & 0 & 0 & 0.0118 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0032 & 0 & 0 & 0.0067 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Таким образом, второй вектор параметров закона управления может быть определён как  $h_1 = 0,0118$ ;  $h_2 = 0,0118$ ;  $h_3 = 0,0067$ .

Расчёты проведены для различных начальных и требуемых угловых положений наноспутника при нулевой начальной угловой скорости. Результаты расчётов приведены на рис. 1, *a*; *b*; *c*; *d*. На первом графике представлено изменение по времени углового положения наноспутника в кватернионах, на втором графике представлено изменение по времени угловой скорости наноспутника, на третьем графике представлен кватернион рассогласования.

На рис. 1, *a* приведены результаты расчётов для начального углового положения наноспутника  $\varphi_x = 80^\circ$ ;  $\varphi_y = -65^\circ$ ;  $\varphi_z = 30^\circ$  и требуемого углового положения  $\varphi_x^3 = 0^\circ$ ,  $\varphi_y^3 = 0^\circ$ ,  $\varphi_z^3 = 0^\circ$ .

Моменты инерции маховиков

$$J_m = [0.0000011; 0.0000011; 0.0000011] \text{ кгм}^2.$$

Сопротивление якоря электродвигателя маховика  $R=38$  Ом.

Коэффициент ЭДС электродвигателя маховика  $k_e = 0.00708$  Вс.

Подставляя в (22) матрицы  $A$  и  $B$ , определённые в результате линеаризации уравнений углового движения, и решая уравнение (22) относительно матрицы  $P$ , с использованием (21) получим матрицу  $K$ :

На рис. 1, *b* приведены результаты расчётов для начального углового положения наноспутника

$$\varphi_x = 0^\circ, \varphi_y = 0^\circ, \varphi_z = 0^\circ$$

и требуемого углового положения  $\varphi_x^3 = 80^\circ$ ,  $\varphi_y^3 = -65^\circ$ ,  $\varphi_z^3 = 30^\circ$ .

На рис. 1, *c* приведены результаты расчётов для начального углового положения наноспутника

$$\varphi_x = 20^\circ, \varphi_y = 75^\circ, \varphi_z = -35^\circ$$

и требуемого углового положения  $\varphi_x^3 = 0^\circ$ ,  $\varphi_y^3 = 0^\circ$ ,  $\varphi_z^3 = 0^\circ$ .

На рис. 1, *d* приведены результаты расчётов для начального углового положения наноспутника

$$\varphi_x = 0^\circ, \varphi_y = 0^\circ, \varphi_z = 0^\circ$$

и требуемого углового положения  $\varphi_x^3 = 20^\circ$ ,  $\varphi_y^3 = 75^\circ$ ,  $\varphi_z^3 = -35^\circ$ .

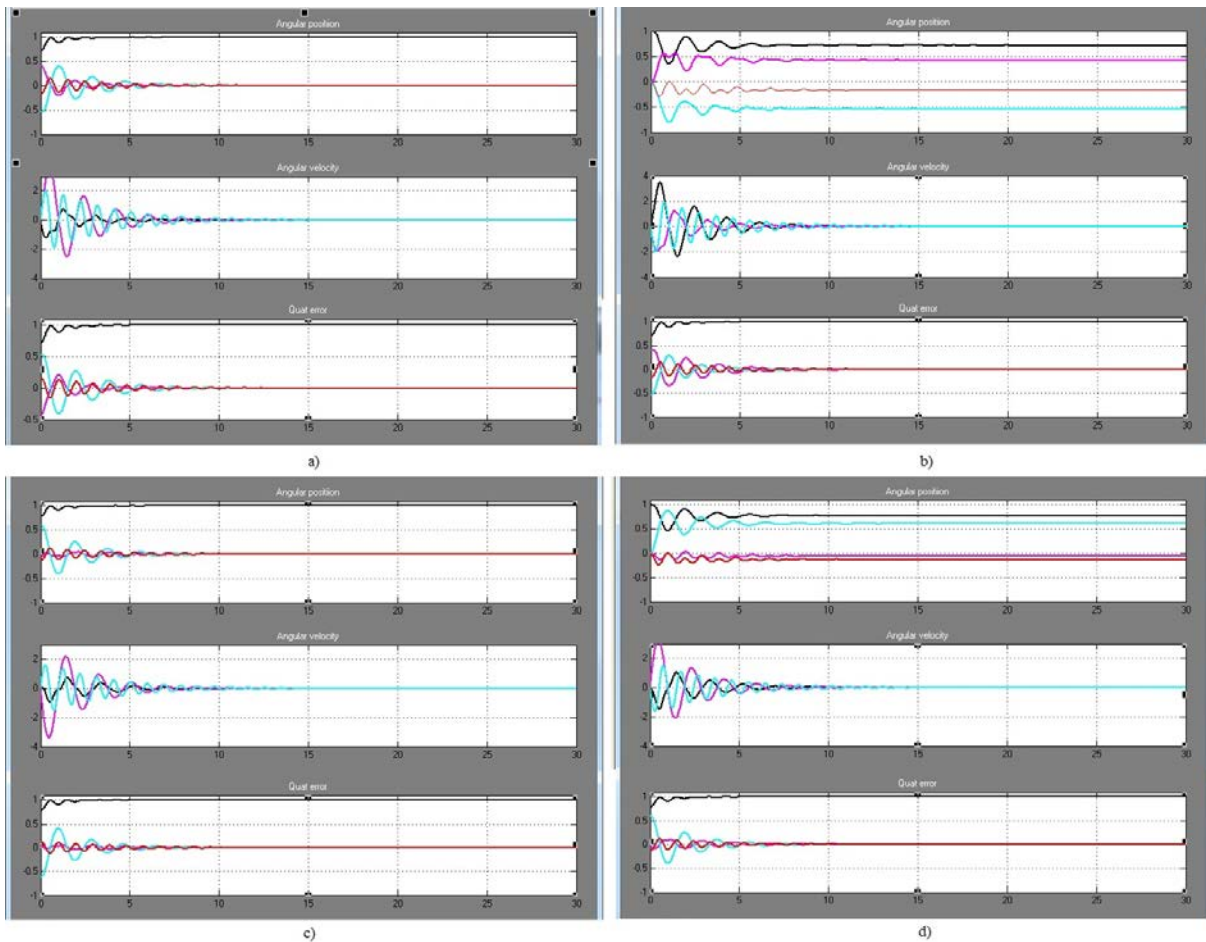


Рис. 1. Параметры ориентации наноспутника

Как показали результаты расчётов, во всех рассмотренных случаях для перевода наноспутника в требуемое угловое положение при заданном законе управления и параметрах управления требуется в среднем около 20 секунд. При этом наблюдается высокая скорость и качество переходных процессов.

### Заключение

Решена задача управления трёхосной ориентацией наноспутника с помощью маховиков с учётом их динамики и

технических характеристик. В основу управления угловым положением наноспутника положен PD-регулятор. Проведено исследование устойчивости, показавшее, что полученный закон управления ориентацией обеспечивает асимптотическую устойчивость по Ляпунову. Проведённые численные расчёты для различных начальных и требуемых значений углового положения наноспутника показали высокую скорость и качество переходных процессов.

### Библиографический список

1. Севастьянов Н.Н., Бранец В.Н., Панченко В.А., Казинский Н.В., Кондранин Т.В., Негодяев С.С. Анализ современных возможностей создания малых космических аппаратов для дистанционного зондирования Земли // Труды Московского физико-технического института. 2009. Том 1, № 3. С. 14-22.
2. Wertz J.R., Larson W.J. Space mission analysis and design. Torrance, California: Microcosm Inc., 1992. 827 p.

3. Sidi M.J. Spacecraft dynamics and control. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 41 p.
4. Амелькин Н.И. Кинематика и динамика твёрдого тела (кватернионное изложение). М.: Московский физико-технический институт, 2000. 61 с.
5. Hoevenaars T., Engelen S. and Bouwmeester J. Model-Based Discrete PID Controller for CubeSat Reaction Wheels Based on COTS Brushless DC Motors // Materials of First IAA Conference on dynamics and control of space systems. 2012. V. 145. P. 379-395.
6. Dando A.J. Robust adaptive control of rigid spacecraft attitude maneuvers: PhD's thesis – Queensland, 2008. 282 p.
7. Topland M.T., Gravdahl J.T. Nonlinear attitude control of the Micro-Satellite ESEO // International Astronautical Federation – 55th International Astronautical Congress. 2004. V. 2. P. 757-767.
8. Севастьянов Н.Н. Концепция построения системы ориентации и управления движением спутника связи «ЯМАЛ». Штатная схема функционирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. №2 (22). С. 85-96.
9. Yadeta Z. Lyapunov's Second Method for Estimating Region of Asymptotic Stability // Open Science Repository Mathematics. 2013. DOI: 10.7392/Mathematics.70081944.
10. Кватернак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 653 с.

### Информация об авторах

**Молдабеков Мейрбек Молдабекович**, доктор технических наук, профессор, академик Национальной Академии наук Республики Казахстан, Аэрокосмический комитет Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан. E-mail: [moldabekov.m@istt.kz](mailto:moldabekov.m@istt.kz). Область научных интересов: математическое моделирование систем управления движением космических аппаратов.

**Ахмедов Даулет Шафигуллович**, доктор технических наук, директор, Институт космической техники и технологий АО «НЦКИТ», г. Алматы, Республика Казахстан. E-mail: [iasp@mail.ru](mailto:iasp@mail.ru). Область научных интересов: космическая техника и технологии, информационно-коммуникационные технологии.

**Елубаев Сулеймен Актлеуович**, заведующий, лаборатория имитационного моделирования и разработки космических систем, Институт космической техники и технологий АО «НЦКИТ», г. Алматы, Республика Казахстан. E-mail: [elubaev.s@istt.kz](mailto:elubaev.s@istt.kz). Область научных интересов: разработка автоматизированных систем управления.

**Сухенко Анна Сергеевна**, заведующий сектором, лаборатория имитационного моделирования и разработки космических систем, Институт космической техники и технологий АО «НЦКИТ», г. Алматы, Республика Казахстан. E-mail: [suhenko.a@istt.kz](mailto:suhenko.a@istt.kz). Область научных интересов: математическое моделирование систем управления движением космических аппаратов.

**Бопеев Тимур Маратович**, заведующий сектором, лаборатория имитационного моделирования и разработки космических систем, Институт космической техники и технологий АО «НЦКИТ», г. Алматы, Республика Казахстан. E-mail: [bopuev.t@istt.kz](mailto:bopuev.t@istt.kz). Область научных интересов: разработка аппаратного программного обеспечения космической техники.

**Алипбаев Куаныш Арингожаевич**, PhD по специальности механика, заместитель заведующего, лаборатория имитационного моделирования и разработки космических систем, Институт космической техники и технологий АО «НЦКИТ», г. Алматы, Республика Казахстан. E-mail: [alipbayev.k@istt.kz](mailto:alipbayev.k@istt.kz). Область научных интересов: разработка математического обеспечения систем управления космических аппаратов.



**Михайленко Дарья Леонтьевна**, научный сотрудник, лаборатория имитационного моделирования и разработки космических систем, Институт космической техники и технологий АО «НЦКИТ», г. Алматы, Республика Казахстан. E-mail: [mikhaylenko.d@istt.kz](mailto:mikhaylenko.d@istt.kz). Область научных интересов: имитационное моделирование космических систем.

## MATHEMATICAL MODEL OF ANGULAR MOTION OF NANOSATELLITES WITH INERTIAL ACTUATORS

© 2016 M. M. Moldabekov, D. S. Ahmedov, S. A. Elubaev, A. S. Sukhenko, T. M. Bopeeov, K. A. Alipbayev, D. L. Mikhailenko

Institute of Space Systems and Technologies, Almaty, Republic of Kazakhstan

The problem of developing a nanosatellite attitude control system using three reaction wheels mounted along the main central axes of inertia is discussed in the paper. The law of controlling a nanosatellite's attitude is based on a PD - controller. The stability of the process of controlling the nanosatellite attitude using the Lyapunov function method has been analyzed. It allows us to prove that the obtained control law provides the asymptotic stability of nanosatellite angular motion. Hereafter, the function of control voltage for electric motors of reaction wheels taking into account their specifications is obtained based on the developed mathematical model of reaction wheel dynamics. Numerical calculations of controlled angular motion have been carried out for the nanosatellite CubeSat3U with actuators on the basis of a commercial DC motor. Several cases of controlling the satellite's rotation by different angles are considered in the course of the numerical experiments. The results of numerical experiments showed the adequacy of the developed mathematical model.

*Nanosatellite, three- axis orientation, reaction wheel, angular motion control law, stability investigation*

### References

1. Sevastianov N.N., Branets V.N., Panchenko V.A., Kazinski N.V., Kondranin T.V., Negodyaev S.S. Advanced approaches to Earth observation small satellite development. *Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta*. 2009. V. 1, no. 3. P. 14-22. (In Russ.)
2. Wertz J.R., Larson W.J. Space mission analysis and design. Torrance, California: Microcosm Inc., 1992. 827 p.
3. Sidi M.J. Spacecraft dynamics and control. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 41 p.
4. Amel'kin N.I. *Kinematika i dinamika tverdogo tela (kvaternionnoe izlozhenie)* [Kinematics and dynamics of a rigid body (quaternionic presentation)]. Moscow: Moscow Institute of Physics and Technology Publ., 2000. 61 p.
5. Hoevenaars T., Engelen S. and Bouwmeester J. Model-Based Discrete PID Controller for CubeSat Reaction Wheels Based on COTS Brushless DC Motors. *Materials of First IAA Conference on dynamics and control of space systems*. 2012. V. 145. P. 379-395.
6. Dando A.J. Robust adaptive control of rigid spacecraft attitude maneuvers: PhD's thesis – Queensland, 2008. 282 p.
7. Topland M.T., Gravdahl J.T. Nonlinear attitude control of the Micro-Satellite ESEO. *International Astronautical Federation – 55th International Astronautical Congress*. 2004. V. 2. P. 757-767.

---

*Citation:* Moldabekov M.M., Ahmedov D.S., Elubaev S.A., Sukhenko A.S., Bopeeov T.M., Alipbayev K.A., Mikhailenko D.L. Mathematical model of angular motion of nanosatellites with inertial actuators. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2016. V. 15, no. 1. P. 97-106. DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-1-97-106

8. Sevast'yanov N.N. The concept of building the system of orientation and motion control of the Yamal communication satellite. The nominal operation scheme. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2013. No. 2 (22). P. 85-96. (In Russ.)

9. Yadeta Z. Lyapunov's Second Method for Estimating Region of Asymptotic Stability. *Open Science Repository Mathematics*. 2013. DOI: 10.7392/Mathematics.70081944

10. Kvaternaak H., Sivan R. *Lineynye optimal'nye sistemy upravleniya* [Linear optimal control systems]. Moscow: Mir Publ., 1977. 653 p.

### About the authors

**Moldabekov Meyrbek Moldabekovich**, Doctor of Science (Engineering), Professor, Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Aerospace Committee of the Ministry for Investment and Development of the Republic of Kazakhstan. E-mail: [moldabekov.m@istt.kz](mailto:moldabekov.m@istt.kz). Area of Research: mathematical modeling of spacecraft motion control systems.

**Akhmedov Daulet Shafigulovich**, Doctor of Science (Engineering), Director of the Institute of Space Systems and Technologies, Joint Stock Company «NCSRT», Almaty, Republic of Kazakhstan. E-mail: [lacp@mail.ru](mailto:lacp@mail.ru). Area of Research: space equipment and technologies, information and communication technologies.

**Elubaev Suleimen Aktleuvich**, Head of the Laboratory of Space System Simulation Modeling and Development, Institute of Space Systems and Technologies, Joint Stock Company «NCSRT», Almaty, Republic of Kazakhstan. E-mail: [elubaev.s@istt.kz](mailto:elubaev.s@istt.kz). Area of Research: development of computer-aided control systems.

**Sukhenko Anna Sergeevna**, Head of Sector, Laboratory of Space System Simulation Modeling and Development, Institute of Space Systems and Technologies, Joint Stock Company «NCSRT», Almaty, Republic of Kazakhstan. E-mail: [sukhenko.a@istt.kz](mailto:sukhenko.a@istt.kz). Area of Research: mathematical modeling of spacecraft motion control systems.

**Bopeyev Timur Maratovich**, Head of Sector, Laboratory of Space System Simulation Modeling and Development, Institute of Space Systems and Technologies, Joint Stock Company «NCSRT», Almaty, Republic of Kazakhstan. E-mail: [bopeyev.t@istt.kz](mailto:bopeyev.t@istt.kz). Area of Research: development of space equipment hardware and software.

**Alipbayev Kuanish Aringozhaevich**, Doctor of Science (Engineering), Deputy Head of the Laboratory of Space System Simulation Modeling and Development, Institute of Space Systems and Technologies, Joint Stock Company «NCSRT», Almaty, Republic of Kazakhstan. E-mail: [alipbayev.k@istt.kz](mailto:alipbayev.k@istt.kz). Area of Research: development of software for spacecraft control systems.

**Mikhaylenko Daria Leontievna**, research associate of the Laboratory of Space System Simulation Modeling and Development, Institute of Space Systems and Technologies, Joint Stock Company «NCSRT», Almaty, Republic of Kazakhstan. E-mail: [mikhaylenko.d@istt.kz](mailto:mikhaylenko.d@istt.kz). Area of Research: simulation of space systems.