

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛИ УСТАЛОСТНОЙ ДЕГРАДАЦИИ ЖЁСТКОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

© 2024

- А. В. Пантелеев** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика»; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет); [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)
- Н. В. Турбин** ведущий инженер Передовой инженерной школы; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет); [turbinnv@mai.ru](mailto:turbinnv@mai.ru)
- И. С. Надоров** студент бакалавриата института «Компьютерные науки и прикладная математика»; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет); [nnadorovivan@gmail.com](mailto:nnadorovivan@gmail.com)
- Н. О. Кононов** инженер Передовой инженерной школы; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет); [nconon@gmail.com](mailto:nconon@gmail.com)

Разработана методика получения параметров модели деградации жёсткости композиционного материала путём специальной обработки данных экспериментов и использования методов оптимизации. В качестве исходных данных используются результаты ресурсных испытаний однонаправленных полимерных композиционных материалов с разными изначальными жёсткостями, напряжениями разрушения и действующими напряжениями цикла. В качестве математической модели деградации жёсткости используется нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение с пятью неизвестными параметрами, отражающее характерные изменения свойств материала. Процедура решения сводится к задаче оптимизации целевой функции, величина которой характеризует достигнутую точность. В качестве методов оптимизации использованы метод, имитирующий поведение стаи мотыльков, и метод последовательной редукции множества поиска. Предложен пошаговый алгоритм нахождения неизвестных параметров модели, приведены численные результаты обработки экспериментальных данных, содержащих информацию об изменении модуля упругости композиционного материала в ходе приложения циклов нагрузки.

*Композиционный материал; модель деградации жёсткости; идентификация параметров; методы численного интегрирования; методы оптимизации*

---

**Цитирование:** Пантелеев А.В., Турбин Н.В., Надоров И.С., Кононов Н.О. Параметрическая идентификация коэффициентов модели усталостной деградации жёсткости композиционного материала // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2024. Т. 23, № 3. С. 119-131.  
DOI: 10.18287/2541-7533-2024-23-3-119-131

### Введение

Обоснование долговечности первичных конструкций самолёта является необходимым требованием, в том числе для конструкций из полимерных композиционных материалов (ПКМ). Так как накопление усталостной повреждаемости в ПКМ сопровождается потерей жёсткости, то получили распространение различные методики расчетной оценки долговечности по остаточной жёсткости [1 – 4]. Деградация жёсткости в материале при циклических нагрузках вызывает рост деформаций, а, следовательно,

снижает сопротивление усталости материала. Связь роста деформаций при деградации жёсткости образца либо конструкции исследуется в работах [1; 12]. Получение рабочих характеристик ПКМ при этом является задачей специального эксперимента [5]. Важной задачей является формирование и анализ математических моделей, описывающих процессы деградации жёсткости композиционных материалов. Одна из возможных моделей, предложенная в [2], содержит пять неизвестных параметров, характеризующих усталостное снижение жёсткости материала.

В настоящей статье предложен алгоритм нахождения параметров на основе численных методов моделирования процесса деградации жёсткости композиционного материала [6; 7] и метаэвристических методов оптимизации [8].

### **Постановка задачи параметрической идентификации модели усталостной деградации жёсткости композиционного материала**

В процессе изложения используются следующие основные обозначения:  $n$  – порядковый номер цикла нагружения;  $n \in \{0, \dots, N\}$ , где  $N$  – общее число выполненных испытаний; один цикл: исходное состояние  $\rightarrow$  напряженное состояние (растяжение)  $\rightarrow$  исходное состояние;  $\sigma$  – напряжение, характеризующее действие внутренних сил упругости в деформированном твёрдом теле;  $X_T$  – прочность на растяжение, характеризующая напряжение, при котором происходит разрушение образца;  $E$  – модуль упругости, характеризующий способность материала сопротивляться деформации под действием напряжений;  $D$  – повреждаемость, характеризующая падение модуля упругости образца.

Текущее значение повреждаемости связано со значением модуля упругости:

$$D(n) = 1 - \frac{E(n)}{E_0}, \quad (1)$$

где  $E(n)$  – текущий модуль упругости, характеризующий способность материала сопротивляться растяжению/сжатию при упругой деформации после циклической нагрузки;  $E_0$  – исходный модуль упругости – константа, характеризующая способность материала сопротивляться деформации под действием напряжений.

Подразумевается, что модули упругости  $E(n)$  и  $E_0$  являются статическими модулями упругости, которые измеряются стандартным путём при остановке циклических испытаний на определённых этапах и приложении нагрузки в квазистатическом режиме. Поскольку  $E(n) \in [0, E_0]$ , то повреждаемость  $D(n) \in [0, 1]$ .

Если известно значение повреждаемости, то текущий модуль упругости находится по формуле, следующей из (1):

$$E(n) = E_0 [1 - D(n)]. \quad (2)$$

Величина  $\Sigma(n)$ , характеризующая усталостное состояние образца, называется индексом усталостного разрушения:

$$\Sigma(n) = \frac{\sigma}{[1 - D(n)] X_T}. \quad (3)$$

В [2] предложена математическая модель изменения величины скорости роста повреждаемости образца:

$$\frac{dD(n)}{dn} = c_1 \Sigma(n) \exp\left[-\frac{c_2 D(n)}{\sqrt{\Sigma(n)}}\right] + c_3 D(n) \Sigma^2(n) \left[1 + \exp\left\{c_5 [\Sigma(n) - c_4]\right\}\right], \quad (4)$$

где  $c_1, \dots, c_5$  – коэффициенты, характеризующие усталостные характеристики материала. При этом начальное условие:  $D(0) = 0$ .

С учётом (3) уравнение (4) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \frac{dD(n)}{dn} = & c_1 \frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T} \exp\left[-\frac{c_2 D(n)}{\sqrt{\frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T}}}\right] + c_3 D(n) \left[\frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T}\right]^2 + \\ & + c_3 D(n) \left[\frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T}\right]^2 \exp\left\{c_5 \left[\frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T} - c_4\right]\right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

Введём обозначения  $\hat{E}(n) = \frac{E(n)}{E_0}$ ,  $\beta = \frac{X_T}{\sigma}$ . Из уравнения (1) следует

$D(n) = 1 - \frac{E(n)}{E_0} = 1 - \hat{E}(n)$ , то  $\frac{dD(n)}{dn} = -\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ . Тогда получаем дифференциальное уравнение, эквивалентное (5), в виде

$$\frac{d\hat{E}(n)}{dn} = -\frac{1}{\beta \hat{E}(n)} \left( c_1 \exp\left[-c_2 (1 - \hat{E}(n)) \sqrt{\beta \hat{E}(n)}\right] + c_3 \frac{1 - \hat{E}(n)}{\beta \hat{E}(n)} \left[1 + \exp\left\{c_5 \left[\frac{1}{\beta \hat{E}(n)} - c_4\right]\right\}\right] \right). \quad (6)$$

Поскольку  $E(0) = E_0$ , то начальное условие для уравнения (6) имеет вид

$$\hat{E}(0) = 1. \quad (7)$$

Решение задачи Коши (6), (7) описывает изменение относительного модуля упругости  $\hat{E}(n)$  в зависимости от числа выполненных испытаний. Коэффициент  $c_1$  характеризует скорость роста в режиме инициирования повреждений (на первом этапе), т.е. резкое начальное снижение кривой уменьшения модуля упругости. Коэффициент  $c_2$  должен быть достаточно большим по величине, чтобы первое слагаемое по величине достаточно быстро убывало с ростом повреждаемости. Коэффициент  $c_3$  характеризует скорость роста в режиме распространения повреждений (на втором этапе), т.е. когда происходит постепенное уменьшение модуля упругости. Коэффициенты  $c_4, c_5$  характеризуют этап взрывного роста повреждаемости (третий этап).

Как правило, в качестве исходной информации, доступной по результатам испытаний (эксперимента), известна зависимость модуля упругости  $E_{\text{exp}}(n)$  при  $n \in \{0, \dots, N\}$ .

Качество параметрической идентификации модели предлагается оценивать величиной целевой функции вида

$$\sum_{n \in \{0, \dots, N\}} \alpha_n \left[ \hat{E}(n) - \hat{E}_{\text{exp}}(n) \right]^2, \quad (8)$$

где  $\hat{E}(n)$  – решение дифференциального уравнения (6) с начальным условием (7);  $\alpha_n$  – весовые коэффициенты, отражающие степень важности учёта отклонений решения  $\hat{E}(n)$  от экспериментальных данных на различных этапах деградации жёсткости материала.

Требуется найти коэффициенты  $c_1, \dots, c_5$  усталостных характеристик материала, т.е. параметры модели (6),(7), по имеющейся исходной информации об эксперименте, минимизируя значение критерия (8):

$$\sum_{n \in \{0, \dots, N\}} \alpha_n \left[ \hat{E}(n) - \hat{E}_{\text{exp}}(n) \right]^2 \rightarrow \min_{c_1, \dots, c_5}. \quad (9)$$

### **Алгоритм решения задачи параметрической идентификации коэффициентов модели усталостной деградации жёсткости композиционного материала**

Пусть известны: зависимость  $E_{\text{exp}}(n)$ , заданная таблицей при  $n \in \{0, \dots, N\}$ ; значения  $E_0, X_T, \sigma$ .

Шаг 1. Вычислить  $\beta = \frac{X_T}{\sigma}$  и получить таблицу для относительного модуля упругости  $\hat{E}_{\text{exp}}(n) = \frac{E_{\text{exp}}(n)}{E_0}$ .

Шаг 2. Решить задачу параметрической оптимизации

$$\sum_{n \in \{0, \dots, N\}} \alpha_n \left[ \hat{E}(n) - \hat{E}_{\text{exp}}(n) \right]^2 \rightarrow \min_{c_1, \dots, c_5}, \quad (10)$$

где  $\hat{E}(n)$  – решение на отрезке  $[0, N]$  дифференциального уравнения

$$\frac{d\hat{E}(n)}{dn} = -\frac{1}{\beta\hat{E}(n)} \left( c_1 \exp \left[ -c_2 (1 - \hat{E}(n)) \sqrt{\beta\hat{E}(n)} \right] + c_3 \frac{1 - \hat{E}(n)}{\beta\hat{E}(n)} \left[ 1 + \exp \left\{ c_5 \left[ \frac{1}{\beta\hat{E}(n)} - c_4 \right] \right\} \right] \right),$$

с начальным условием  $\hat{E}(0) = 1$ .

Результатом являются параметры материала  $c_1, \dots, c_5$ .

Шаг 3. Найти оценки близости результатов эксперимента и результатов параметрической идентификации:

$$A. \Delta_1 = \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \left| \frac{\hat{E}_{\text{exp}}(n) - \hat{E}(n)}{\hat{E}_{\text{exp}}(n)} \right|; \quad B. \Delta_2 = \sqrt{\sum_{n \in \{0, \dots, N\}} \left[ \frac{\hat{E}_{\text{exp}}(n) - \hat{E}(n)}{\hat{E}_{\text{exp}}(n)} \right]^2}.$$

Шаг 4. Анализ результатов. Если оценки близости (А или Б) не удовлетворяют предъявляемым требованиям, то

- заменить метод численного интегрирования на шаге 2 более точным;
- изменить параметры используемого метода оптимизации или применить другой метод оптимизации, используя уже полученный результат в качестве начального приближения;
- изменить весовые коэффициенты в критерии (8) с учётом достигнутой точности аппроксимации на разных этапах процесса деградации жёсткости.

Замечания.

1. Заданная таблица значений  $E_{\text{exp}}(n)$  определяет границы отрезка  $[0, N] = [x_0, x_f]$  интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения и расположение узлов  $x_i \in [x_0, x_f], i = 0, 1, \dots, n-1$ , определяемых шагами  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ . В общем случае величина шага является переменной, а именно  $h_{i+1} = \text{var}$ , т.е. имеется неравномерная сетка  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , а в частном случае шаг может быть постоянным  $h_{i+1} = h = \text{const}$  (равномерная сетка).

2. Для решения задачи Коши (6),(7), записанной в форме  $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$ , можно использовать следующие явные методы [6; 7]:

- явный метод Эйлера:  $y_{i+1} = y_i + h_{i+1}f(x_i, y_i)$  (первый порядок точности);
- метод Эйлера-Коши:  $y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf'_i$  (второй порядок точности), где  $f_i = f(x_i, y_i)$ .

Для начала работы требуются две «разгонные» точки  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ , первая определяется начальным условием, а вторая – явным методом Эйлера;

– методы Адамса-Бэшфорда:

A.  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$  (второй порядок точности),

B.  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$  (третий порядок точности),

B.  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$  (четвёртый порядок точности).

Для начала работы требуется знать 2, 3, 4 «разгонные» точки соответственно.

Для неравномерной сетки рекомендуется применять численные методы, более точные по сравнению с явным методом Эйлера:

– двухшаговую явную схему Эйлера второго порядка

$$y_{i+1} = y_i(1 - \delta_{i+1}^2) + \delta_{i+1}^2 y_{i-1} + H_i^{i+1} \delta_{i+1} f(x_i, y_i),$$

где  $H_i^{i+1} = h_i + h_{i+1}$ ,  $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i}$ ,  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ ;

– обобщённую на нерегулярный шаблон схему Адамса-Бэшфорта:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_{i+1}^2}{2} \left( \frac{H_{2i}^{i+1}}{\Pi_i^{i+1}} f_i - \frac{1}{h_i} f_{i-1} \right),$$

где  $\Pi_i^{i+1} = h_i h_{i+1}$ ,  $H_{2i}^{i+1} = 2h_i + h_{i+1}$ .

3. Исходя из опыта решения задач поиска коэффициентов модели усталостной деградации жёсткости композиционного материала, можно задать интервальные множества допустимых значений искомых коэффициентов, т.е.  $c_i \in [c_{i\min}, c_{i\max}]$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Поэтому множество допустимых решений в задаче оптимизации (10) является параллелепипедным. Исходя из назначения последнего слагаемого в правой части дифференциального уравнения (6), можно сформировать априорные оценки множества возможных значений коэффициента  $c_4$ :

$$\frac{1}{\beta} \leq c_4 \leq \frac{1}{\beta \hat{E}_{\min}}, \quad (11)$$

где  $\hat{E}_{\min}$  – минимальное значение  $\hat{E}(n)$  из таблицы экспериментальных данных.

Результаты испытания композиционных материалов могут отражать как эффект монотонного убывания модуля упругости, так и наличие интервалов, где модуль упругости незначительно локально увеличивается (как правило, на втором этапе испытаний), при этом значение левой границы  $c_{3\min}$  коэффициента  $c_3$  может быть отрицательным.

4. Для решения задачи (10) рекомендуется использовать метаэвристические алгоритмы оптимизации, например, метод, имитирующий поведение стаи мотыльков (Moth-flame optimization, MFO) [8], и метод Luus-Jaakola [9] последовательной редукции множества допустимых решений. Метод MFO относится к классу биоинспирированных алгоритмов глобальной оптимизации, хорошо зарекомендовавших себя при решении разнообразных задач параметрической оптимизации сложных технических систем [10]. Рекомендуемые параметры метода Luus-Jaakola [9]:  $R = 100$ ;  $\gamma = 0,8$ ;  $\eta = 0,9$ ;  $P = 100$ ;  $ITER = 100$ ;  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ;  $\varepsilon_2 = 10^{-5}$ . В приведённых далее примерах приведены только значения параметров, отличающиеся от рекомендуемых.

### **Примеры решения задачи параметрической идентификации модели усталостной деградации жёсткости композиционного материала**

**Пример 1.** Заданы характерные свойства исследуемого материала, используемые в расчётных уравнениях модели деградации жёсткости: однонаправленный элементарный образец из композиционного материала с углеродными волокнами и полимерным связующим, изначальная жёсткость в продольном направлении образца  $E_0 = 37000$  МПа, напряжение разрушения в продольном направлении образца  $X_T = 463$  МПа, действующее напряжение цикла  $\sigma = 273,17$  МПа [11], коэффициент асимметрии цикла  $R = 0,1$ . Нагрузка совпадает с направлением армирования. В табл. 1 приведены результаты испытаний, отражающие изменение значений модуля упругости (и относительного модуля упругости). Данные приведены с различными интервалами между выполненными экспериментами,  $n \in [0, 57000]$ .

**Вариант 1.** В качестве метода интегрирования дифференциального уравнения применялся явный метод Эйлера с шагом  $h = 100$ , а в качестве метода оптимизации – метод Luus-Jaakola последовательной редукции множества допустимых решений с параметром  $R = 3000$ . Начальное приближение:  $c_1 = 0,00069$ ;  $c_2 = 15,840$ ;  $c_3 = 3,651 \cdot 10^{-6}$ ;  $c_4 = 2,915 \cdot 10^{-5}$ ;  $c_5 = 0,974$ , полученное в результате решения задачи аппроксимации правой части уравнения (6) по результатам испытаний, приведенным в табл. 1. Весовые коэффициенты  $\alpha_n$  в (8) полагались равными единице, процедура их дополнительного выбора не привела к улучшению итогового результата.

Таблица 1. Значения модуля упругости  $E_{\text{exp}}(n)$  и относительного модуля упругости  $\hat{E}_{\text{exp}}(n)$

$E_{\text{exp}}(n)$ , МПа	$n$ , цикл	$\hat{E}_{\text{exp}}(n)$
Этап 1		
37000	0	1
32098,828	500	0,867
31250,671	1000	0,845
30696,496	1500	0,829
30271,219	2000	0,818
29919,902	2500	0,809
29617,032	3000	0,800
29348,549	3500	0,793
29105,829	4000	0,787
28883,174	4500	0,781
28676,612	5000	0,775
Этап 2		
27094,187	10000	0,733
25904,636	15000	0,700
24862,255	20000	0,672
23874,709	25000	0,645
22886,545	30000	0,619
21848,868	35000	0,591
20700,578	40000	0,559
19337,878	45000	0,523
17515,574	50000	0,473
Этап 3		
17042,850	51000	0,461
16507,021	52000	0,446
15882,708	53000	0,429
15124,628	54000	0,409
14137,958	55000	0,382
12654,423	56000	0,342
8461,092	57000	0,229

Результат решения задачи отражен на рис. 1 (здесь и далее график исходных данных  $\hat{E}_{\text{exp}}(n)$  выделен красной-штриховой линией, а решение  $\hat{E}(n)$  дифференциального уравнения зеленой-сплошной).

**Вариант 2.** С целью ускорения процесса моделирования выполнялось интегрирование уравнения (6) явным методом Эйлера с шагом  $h = 500$ . Для решения задачи (10) использовался метод Luus-Jaakola с параметром  $R = 3000$  и начальным приближением, удовлетворяющим условию (11):  $c_1 = 0,00076$ ;  $c_2 = 14,971$ ;  $c_3 = 5,285 \cdot 10^{-6}$ ;  $c_4 = 0,6$ ;  $c_5 = 1,056$ . Результат решения задачи отражён на рис. 2. Как следует из анализа рис. 1 и рис. 2, второе решение оказалось более точным. Значение критерия (8)

составило 0,000182. Если использовать начальное приближение вида  $c_1 = 0,00076$ ;  $c_2 = 14,971$ ;  $c_3 = 5,285 \cdot 10^{-6}$ ;  $c_4 = 0,6$ ;  $c_5 = 1,056$ , оно может быть несколько улучшено до величины 0,000140. При этом график решения практически совпадает с изображенным на рис. 2. Таким образом, при следующих найденных значениях параметров исследуемого композиционного материала  $c_1 = 0,00047$ ;  $c_2 = 13,828$ ;  $c_3 = 3,072 \cdot 10^{-6}$ ;  $c_4 = 0,625$ ;  $c_5 = 2,109$  получена более высокая точность.

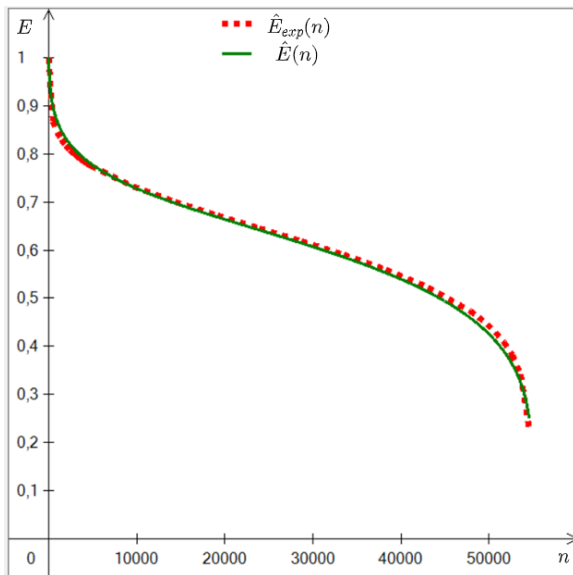


Рис. 1. Результаты решения примера 1, вариант 1

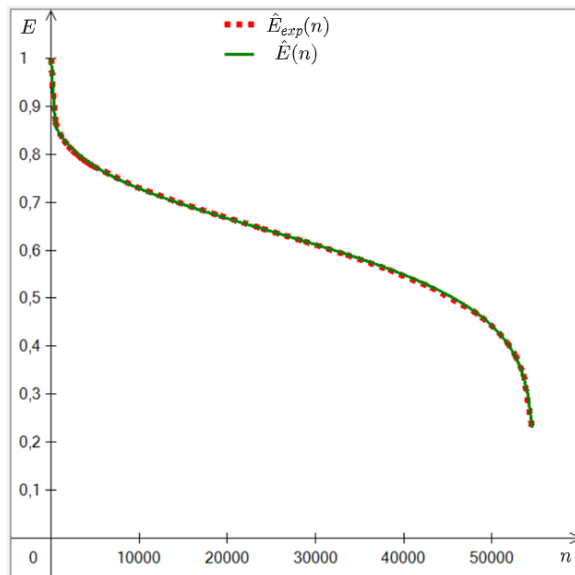


Рис. 2. Результаты решения примера 1, вариант 2

**Вариант 3.** В качестве метода интегрирования дифференциального уравнения применялся явный метод Эйлера с шагом  $h = 500$  (случай 1) и  $h = 100$  (случай 2), а в качестве метода оптимизации метод MFO [8] с уточнением методом Luus-Jaakola. Параметры метода MFO:  $Np = 3000, s = 1, T = 500000, \tau = 500$ . Ограничения на параметры модели:  $c_1 \in [0; 1]$ ,  $c_2 \in [0; 50]$ ,  $c_3 \in [-0,001; 0,001]$ ,  $c_4 \in [0,59; 2,58]$ ,  $c_5 \in [0; 50]$ . Время расчётов методом MFO 2 минуты, уточнение методом Luus-Jaakola также 2 минуты. Результаты решения задачи отражены на рис. 3 (случай 1) и рис. 4 (случай 2). Значение критерия (8) составило 0,000146 при  $h = 500$  и следующих полученных значениях параметров:  $c_1 = 0,00048$ ;  $c_2 = 14,108$ ;  $c_3 = 7,676 \cdot 10^{-6}$ ;  $c_4 = 1,309$ ;  $c_5 = 3,134$ , а при  $h = 100$  значение критерия составило 0,00011 при следующих полученных значениях параметров:  $c_1 = 0,00156$ ;  $c_2 = 18,507$ ;  $c_3 = 9,805 \cdot 10^{-6}$ ;  $c_4 = 1,502$ ;  $c_5 = 2,527$ . Отсюда следует вывод о том, что последовательное применение двух методов оптимизации привело к наилучшему результату.



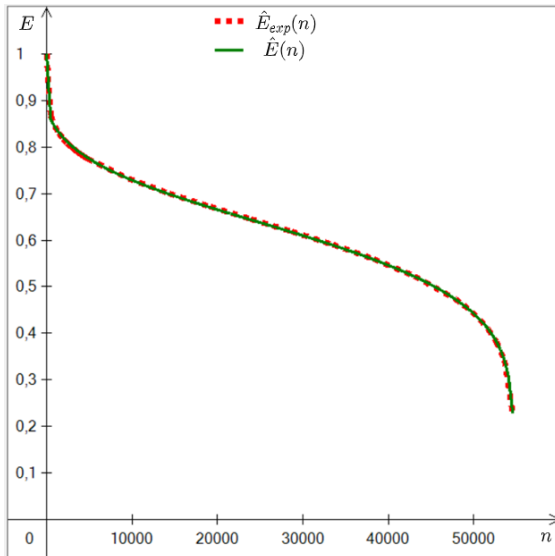


Рис. 3. Результаты решения примера 1, вариант 3(1)

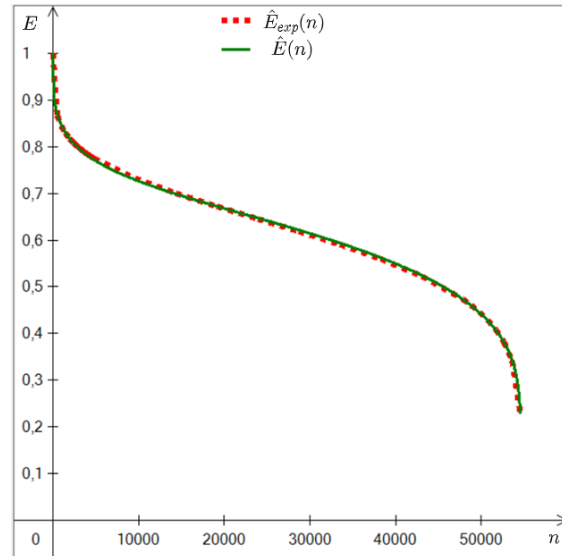


Рис. 4. Результаты решения примера 1, вариант 3(2)

**Пример 2.** Заданы характерные свойства исследуемого материала, используемые в расчётных уравнениях модели деградации жёсткости: однонаправленный элементарный образец из композиционного материала с углеродными волокнами и полимерным связующим; изначальная жёсткость в продольном направлении образца  $E_0 = 129000$  МПа, напряжение разрушения в продольном направлении образца  $X_T = 1730$  МПа, действующее напряжение цикла  $\sigma = 1123$  МПа, коэффициент асимметрии цикла  $R = 0,1$ . Нагрузка совпадает с направлением армирования. В табл. 2 приведены результаты двух испытаний, отражающие изменение значений модуля упругости (и относительного модуля упругости) по разным осям,  $n \in [0, 100000]$ . Данные приведены с различными интервалами между выполненными экспериментами на трёх этапах процесса разрушения материала. Заметим, что приведённые данные содержат промежутки немонотонного поведения модуля упругости.

Для вычисления критерия (8) выполнялось интегрирование уравнения (6) явным методом Эйлера с шагом  $h = 100$ . Для решения задачи (10) использовался метод MFO с уточнением методом Luus-Jaakola. Параметры метода MFO:  $Np = 3000$ ,  $s = 1$ ,  $T = 500000$ ,  $\tau = 500$ , ограничения на параметры модели для испытания 1:  $c_1 \in [0; 1]$ ,  $c_2 \in [0; 50]$ ,  $c_3 \in [-0,001; 0,001]$ ,  $c_4 \in [0,649; 1,698]$ ,  $c_5 \in [0; 50]$ , а для испытания 2:  $c_1 \in [0; 1]$ ,  $c_2 \in [0; 50]$ ,  $c_3 \in [-0,001; 0,001]$ ,  $c_4 \in [0,649; 0,925]$ ,  $c_5 \in [0; 50]$ . Время счёта методом MFO 2 минуты, методом Luus-Jaakola 5 секунд. Результаты решения задачи (10) отражены на рис. 4, 5. Значение критерия (8) для испытания 1 составило 0,00076 при следующих значениях параметров  $c_1 = 0,0076$ ;  $c_2 = 14,342$ ;  $c_3 = -4,345 \cdot 10^{-6}$ ;  $c_4 = 1,698$ ;  $c_5 = 27,134$ . Значение критерия (8) для испытания 2 составило 0,0029 при следующих значениях параметров  $c_1 = 0,00214$ ;  $c_2 = 18,265$ ;  $c_3 = -1,252 \cdot 10^{-5}$ ;  $c_4 = 0,850$ ;  $c_5 = 5,153$ . Анализ численных результатов и графиков на рис. 5, 6 свидетельствует о приемлемой точности решения задачи параметрической идентификации при разной структуре входных данных. Заметим, что рекомендуется, чтобы минимальная величина шага между данными в таблице результатов эксперимента была кратна величине шага интегрирования дифференциального уравнения (6).

Таблица 2. Значения модуля упругости  $E_{\text{exp}}(n)$  и относительного модуля упругости  $\hat{E}_{\text{exp}}(n)$  в примере 2

Испытание 1 $E_{\text{exp}}(n)$ , МПа	$n$ , цикл	$\hat{E}_{\text{exp}}(n)$
Этап 1		
129000,000	0	1
65709,834	100	0,509
65604,082	200	0,508
65495,427	300	0,507
65180,246	400	0,505
64866,658	500	0,503
64592,172	600	0,501
64287,241	700	0,498
64012,955	800	0,496
63625,718	900	0,493
63315,839	1000	0,491
Этап 2		
62258,764	2000	0,483
61201,774	3000	0,474
60555,836	4000	0,469
59734,105	5000	0,463
59189,988	6000	0,459
58569,628	7000	0,454
58094,456	8000	0,450
56872,521	9000	0,441
53494,404	10000	0,415
Этап 3		
51598,459	20000	0,399
50776,617	30000	0,393
50909,072	40000	0,395
50810,299	50000	0,394
50384,099	60000	0,391
49939,150	70000	0,387
49319,933	80000	0,382
49442,662	90000	0,383
49472,992	100000	0,384

Испытание 2 $E_{\text{exp}}(n)$ , МПа	$n$ , цикл	$\hat{E}_{\text{exp}}(n)$
Этап 1		
129000,000	0	1
112373,663	100	0,871
110650,722	200	0,858
109471,919	300	0,849
108688,799	400	0,843
107893,932	500	0,836
107215,625	600	0,831
106400,916	700	0,825
105799,669	800	0,820
105445,094	900	0,817
99634,292	1000	0,772
Этап 2		
98648,137	2000	0,765
97918,113	3000	0,759
97346,847	4000	0,755
96919,881	5000	0,751
96484,944	6000	0,748
96030,324	7000	0,744
95811,503	8000	0,743
95246,403	9000	0,738
92924,305	10000	0,720
Этап 3		
90660,037	20000	0,703
91560,592	30000	0,709
91641,729	40000	0,710
91655,822	50000	0,711
91333,389	60000	0,708
91270,905	70000	0,707
90766,943	80000	0,704
90506,832	90000	0,702
90685,510	100000	0,703

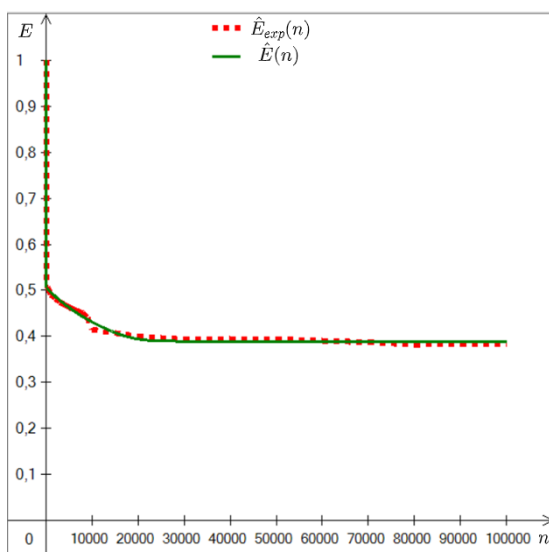


Рис. 5. Результаты решения примера 2 (испытание 1)

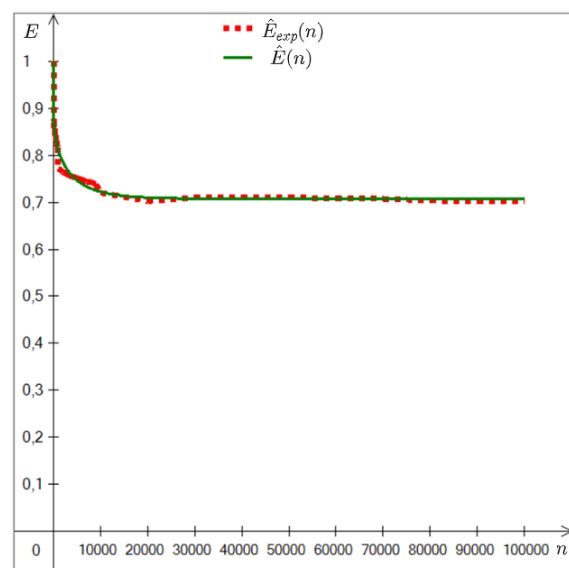


Рис. 6. Результаты решения примера 2 (испытание 2)

## Заключение

В статье сформулированы техническая и математическая постановки задачи параметрической идентификации коэффициентов модели усталостной деградации жёсткости композиционного материала. Предложен алгоритм решения задачи на основе численного моделирования процесса изменения относительного модуля упругости материала и применения метаэвристических методов глобальной оптимизации. Полученные результаты определения параметров тестовых композиционных материалов подтвердили применимость и достаточную точность предложенной методики. Математическая модель материала, для которой предложена данная схема оптимизации коэффициентов, применима для расчёта текущей жёсткости элементарного образца из полимерного композиционного материала, обусловленной накоплением микродефектов в матрице при действии циклической нагрузки. Расчётное уравнение, представленное в работе, описывает процесс снижения жёсткости тремя этапами, за каждый из которых отвечает свое слагаемое и ряд коэффициентов. На всём протяжении испытания образец, либо конструкция принимаются едиными до момента  $D=1$ , где  $D$  – текущая повреждаемость.

## Библиографический список

1. Shokrieh M.M., Lessard L.B. Progressive fatigue damage modeling of composite materials, Part I: Modeling // Journal of Composite Materials. 2000. V. 34, Iss. 13. P. 1056-1080. DOI: 10.1177/002199830003401301
2. Van Paeppegem W. Development and finite element implementation of a damage model for fatigue of fibre-reinforced polymers. Ghent University Architectural and Engineering Press, 2002. 395 p.
3. Turbin N.V., Shelkov K.A. Numerical study of fatigue damage accumulation in composite wing panels of prospective supersonic transport aircraft // Aerospace Systems. 2023. V. 6. P. 481-490. DOI: 10.1007/s42401-023-00200-1
4. Shramko K.K., Kononov N.O., Lutoshkina A.E., Shadrinov A.V. Computational estimate of the initial damage effect on the fatigue strength of composite materials // Journal of Composites Science. 2023. V. 7, Iss. 10. DOI: 10.3390/jcs7100438
5. Brunbauer J., Arbeiter F., Stelzer S., Pinter G. Stiffness based fatigue characterisation of CFRP // Advanced Materials Research. 2014. V. 891-892. P. 166-171. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.891-892.166
6. Пантелеев А.В., Кудрявцева И.А. Численные методы. Практикум: учеб. пособие. М.: ИНФРА-М, 2017. 512 с.
7. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. СПб.: Изд-во «Лань», 2015. 448 с.
8. Mirjalili S. Moth-flame optimization algorithm: A novel nature – inspired heuristic paradigm // Knowledge-Based Systems. 2015. V. 89. P. 228-249. DOI: 10.1016/j.knosys.2015.07.006
9. Пантелеев А.В., Скавинская Д.В. Метаэвристические стратегии и алгоритмы глобальной оптимизации. М.: Факториал, 2023. 564 с.
10. Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Мультиагентные и биоинспирированные методы оптимизации технических систем. М.: Изд-во «Доброе слово и Ко», 2024. 336 с.
11. Whitworth H.A. A stiffness degradation model for composite laminates under fatigue loading // Composite Structures. 1997. V. 40, Iss. 2. P. 95-101. DOI: 10.1016/s0263-8223(97)00142-6

12. Mirzaei A.H., Shokrieh M.M. Progressive fatigue damage modeling of laminated composites using strain-based failure criteria // *Journal of Composite Materials*. 2024. V. 58, Iss. 4. P. 519-531. DOI: 10.1177/00219983241227098

## PARAMETRIC IDENTIFICATION OF COEFFICIENTS FOR A MODEL OF FATIGUE STIFFNESS DEGRADATION OF A COMPOSITE MATERIAL

© 2024

- A. V. Panteleev** Doctor of Science (Phys. & Math.), Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute of Computer Science and Applied Mathematics; Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation; [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)
- N. V. Turbin** Leading Engineer, Advanced Engineering School; Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation; [turbinnv@mai.ru](mailto:turbinnv@mai.ru)
- I. S. Nadorov** Undergraduate Student, Institute of Computer Science and Applied Mathematics; Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation; [nnadorovivan@gmail.com](mailto:nnadorovivan@gmail.com)
- N. O. Kononov** Engineer, Advanced Engineering School; Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation; [nkonon@gmail.com](mailto:nkonon@gmail.com)

The problem of finding the fatigue characteristics of a composite material based on test results is considered. The results of endurance tests of unidirectional polymer composite materials with different initial stiffness, breaking stress and working cycle stress were used as the initial data. As a mathematical model of stiffness degradation, a nonlinear ordinary differential equation with five unknown parameters is used, reflecting characteristic changes in the properties of the material. It is required to find such parameter values that the solution of the differential equation should describe the available test results with sufficient accuracy. The solution procedure is reduced to the problem of optimizing the objective function, the value of which characterizes the achieved accuracy. As optimization methods, a method simulating the behavior of a flock of moths and a method of sequential reduction of the search set were used. A step-by-step algorithm for finding unknown model parameters is proposed, and numerical results of processing input data containing information on changing the elasticity modulus of the composite material in the course of applying load cycles are presented.

*Composite material; stiffness degradation model; parameter identification; numerical integration methods; optimization methods*

---

**Citation:** Panteleev A.V., Turbin N.V., Nadorov I.S., Kononov N.O. Parametric identification of coefficients for a model of fatigue stiffness degradation of a composite material. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2024. V. 23, no. 3. P. 119-131. DOI: 10.18287/2541-7533-2024-23-3-119-131

## References

1. Shokrieh M.M., Lessard L.B. Progressive fatigue damage modeling of composite materials, Part I: Modeling. *Journal of Composite Materials*. 2000. V. 34, Iss. 13. P. 1056-1080. DOI: 10.1177/002199830003401301

2. Van Paepegem W. Development and finite element implementation of a damage model for fatigue of fibre-reinforced polymers. Ghent University Architectural and Engineering Press, 2002. 395 p.
3. Turbin N.V., Shelkov K.A. Numerical study of fatigue damage accumulation in composite wing panels of prospective supersonic transport aircraft. *Aerospace Systems*. 2023. V. 6. P. 481-490. DOI: 10.1007/s42401-023-00200-1
4. Shramko K.K., Kononov N.O., Lutoshkina A.E., Shadrinov A.V. Computational estimate of the initial damage effect on the fatigue strength of composite materials. *Journal of Composites Science*. 2023. V. 7, Iss. 10. DOI: 10.3390/jcs7100438
5. Brunbauer J., Arbeiter F., Stelzer S., Pinter G. Stiffness based fatigue characterisation of CFRP. *Advanced Materials Research*. 2014. V. 891-892. P. 166-171. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.891-892.166
6. Panteleev A.V., Kudryavtseva I.A. *Chislennyye metody. Praktikum: ucheb. posobie* [Numerical methods. Workshop]. Moscow: INFRA-M Publ., 2017. 512 p.
7. Kireev V.I., Panteleev A.V. *Chislennyye metody v primerakh i zadachakh* [Numerical methods in examples and problems]. St. Petersburg: Lan' Publ., 2015. 448 p.
8. Mirjalili S. Moth-flame optimization algorithm: A novel nature – inspired heuristic paradigm. *Knowledge-Based Systems*. 2015. V. 89. P. 228-249. DOI: 10.1016/j.knsys.2015.07.006
9. Panteleev A.V., Skavinskaya D.V. *Metaevristicheskie strategii i algoritmy global'noy optimizatsii* [Metaheuristic strategies and algorithms of global optimization]. Moscow: Factorial Publ., 2023. 564 p.
10. Panteleev A.V., Karane M.M.S. *Mul'tiagentnye i bioinspirirovannyye metody optimizatsii tekhnicheskikh system* [Multi-agent and bio-inspired optimization methods for optimizing technical systems]. Moscow: Dobroe Slovo i Ko Publ., 2024. 336 p.
11. Whitworth H.A. A stiffness degradation model for composite laminates under fatigue loading. *Composite Structures*. 1997. V. 40, Iss. 2. P. 95-101. DOI: 10.1016/s0263-8223(97)00142-6
12. Mirzaei A.H., Shokrieh M.M. Progressive fatigue damage modeling of laminated composites using strain-based failure criteria. *Journal of Composite Materials*. 2024. V. 58, Iss. 4. P. 519-531. DOI: 10.1177/00219983241227098