

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ТРИБОСИСТЕМЫ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ РАВНОВЕСНОЙ ШЕРОХОВАТОСТИ ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА

© 2022

- И. В. Колесников** член-корреспондент Российской академии наук; заведующий научно-исследовательской лабораторией «Нанотехнологии и новые материалы»; Ростовский государственный университет путей сообщения; [ooedt@rambler.ru](mailto:ooedt@rambler.ru)
- П. А. Коропец** кандидат технических наук; старший научный сотрудник НИЧ кафедры «Теоретическая механика»; Ростовский государственный университет путей сообщения; [pkoropets@gmail.com](mailto:pkoropets@gmail.com)
- Д. С. Мантуров** кандидат технических наук; старший научный сотрудник НИЧ кафедры «Теоретическая механика»; Ростовский государственный университет путей сообщения; [manturovds@rgups.ru](mailto:manturovds@rgups.ru)
- Е. В. Шахматов** академик Российской академии наук, заведующий кафедрой автоматических систем энергетических установок; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [shakhm@ssau.ru](mailto:shakhm@ssau.ru)

Представлена инновационная методология мониторинга жизненного цикла поверхностных слоёв с покрытием, нанесённым методом вакуумной ионно-плазменной обработки. Предложена динамическая модель, основанная на гипотезе о том, что шероховатость является как фактором, возбуждающим механические колебания, так и следствием этих колебаний. При этом шероховатость изменяется в результате износа под воздействием локальных динамических сил. Показано, что пара трения представляет нелинейную систему со сложными обратными связями. Её стационарное движение может рассматриваться как странный аттрактор. Рандомность движения в окрестности предельного цикла обусловлена наличием в модели звена постоянного запаздывания, охваченного жёсткой положительной обратной связью. В результате происходит постоянная перенастройка амплитуды и фазы колебаний.

*Трибосистема; износостойкость покрытия; равновесная шероховатость; динамическая автоколебательная система; эволюционная модель изнашивания*

---

**Цитирование:** Колесников И.В., Коропец П.А., Мантуров Д.С., Шахматов Е.В. Математическое моделирование эволюции трибосистемы в процессе формирования равновесной шероховатости фрикционного контакта // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2022. Т. 21, № 3. С. 96-107. DOI: 10.18287/2541-7533-2022-21-3-96-107

### Введение

В настоящее время для повышения эксплуатационных характеристик узлов, содержащих пары трения, широко применяют покрытия специального назначения: антифрикционные, противоизносные, антикоррозионные, жаропрочные и др. Для получения в покрытии пространственной гетерофазной структуры типа 3D-композита была использована система CrAlSiN. Её выбор обусловлен тем, что фазовая диаграмма системы Cr-Al-Si-N содержит большое количество устойчивых бинарных соединений, которые не растворяются друг в друге, как, например, нитриды  $\text{Si}_3\text{N}_4$  и AlN. Выбор материалов и технология нанесения покрытия описаны в исследованиях [1; 2].

Жизненный цикл пары трения в составе механизма в условиях эксплуатации имеет три основных этапа: приработка, установившееся изнашивание и форсированное изнашивание – кривая Лоренца [3].

На этапе приработки происходит интенсивное изменение поверхностей трения и формируются такие их свойства (и в первую очередь – шероховатость), при которых начинается режим установившегося изнашивания. Форсированное или катастрофическое изнашивание наступает тогда, когда износ приводит к существенному изменению геометрии и шероховатости фрикционного контакта. В таком режиме фрикционный узел уже перестаёт выполнять свои назначенные функции и требует замены.

Режим установившегося изнашивания – основной и наиболее длительный этап работы узла трения. Этому режиму соответствует строго определённая шероховатость поверхностей трения.

подавляющее большинство исследований шероховатости равновесных поверхностей пар трения сводится к описательному обоснованию экспериментальных данных с приведением эмпирических зависимостей и аналитических соотношений, например [4; 5]. Но практически нет математического описания механизма самоорганизации при трении, в результате которой формируется равновесная шероховатость.

От шероховатости поверхности в значительной степени зависит коэффициент трения и интенсивность изнашивания [4]. В современном машиностроении чрезвычайно важно на стадии проектирования прогнозировать эти параметры на весь период эксплуатации при различных условиях нагружения. Для этого необходимо методами математического моделирования рассмотреть эволюцию трибосистемы и установить её основные закономерности [5]. Функционирующая по определённому алгоритму математическая модель позволяет целенаправленно формировать информативные признаки состояния трибосистемы, что, в свою очередь, позволяет при необходимости осуществлять её контроль.

В данной работе сделана попытка с позиций динамики механических систем на примере математической модели трибометра представить равновесный режим как предельный цикл (аттрактор) автоколебательной системы.

Цель исследования – методами математического моделирования установить основные закономерности формирования равновесной шероховатости при трении.

### **Математическая модель трибометра**

Износостойкость покрытий, полученных с помощью различных технологий, проверяют и сравнивают с помощью специализированных приборов – трибометров.

В данной работе рассматривается сертифицированный трибометр типа TRB (Anton Paar Tritec), предназначенный для испытаний упрочняющих покрытий на износостойкость [6]. Такой подход позволяет без создания дополнительных стендов экспериментально проверять результаты математического моделирования. Достаточно установить на прибор датчик ускорений, как показано на рис. 1. На рис. 2 показана расчётная схема динамической системы «индентор-покрытие».

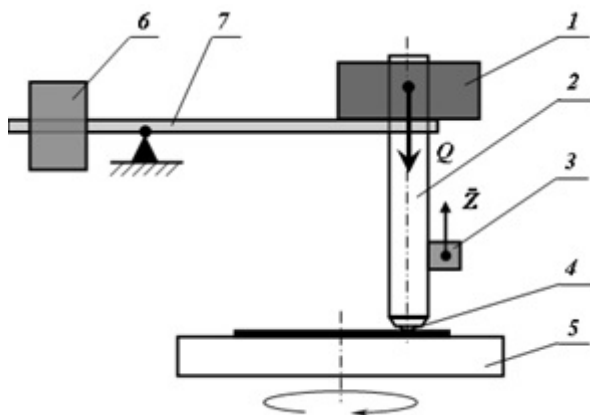


Рис. 1. Принципиальная схема установки:  
1 – груз; 2 – держатель; 3 – датчик нормальных ускорений; 4 – шарик; 5 – образец с покрытием; 6 – балансир; 7 – коромысло;  $Q$  – вес груза

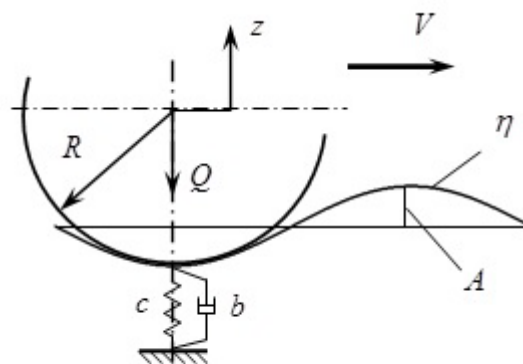


Рис. 2. Расчётная схема динамической системы:  
 $R$  – радиус шарика индентора;  $V$  – линейная скорость шарика индентора;  $z$  – вертикальная координата шарика;  $A$  – амплитуда геометрической неровности покрытия  $\eta$

Образец с покрытием вращается с постоянной угловой скоростью  $n_0$ . Жёстко зафиксированный в держателе шарик индентора смещён относительно оси вращения на расстояние, равное радиусу окружности, на которой происходит взаимодействие шарика с покрытием. Вертикальную нагрузку  $Q$  в контакте шарика с покрытием создаёт груз, устанавливаемый на держателе. В отсутствие груза нулевую нагрузку в контакте обеспечивает балансир, компенсирующий вес коромысла и индентора с датчиком.

Характерной особенностью динамической системы является то, что в процессе колебаний шарика участвуют все подвижные инерционные элементы конструкции, а сила прижатия шарика к покрытию определяется только массой груза:  $Q = mg$ .

Вертикальные перемещения шарика  $z$  (рис. 2) описываются дифференциальным уравнением:

$$(m + m_*)\ddot{z} = P - Q, \quad (1)$$

где  $\ddot{z}$  – вертикальное ускорение шарика;  $m$  и  $m_*$  – масса груза и приведённая масса индентора с коромыслом и балансиром соответственно;  $P$  – вертикальная реакция в контакте шарика и покрытия;  $Q = mg$  – вес груза.

Тот факт, что покрытие не может притягивать шарик, а только отталкивает его, делает динамическую систему нелинейной. Нелинейность может быть отражена следующим образом:

$$P = \begin{cases} b(\dot{\eta} - \dot{z}) + c(\eta - z), & \text{при } (\eta - z) > 0; \\ 0, & \text{при } (\eta - z) \leq 0, \end{cases}$$

где  $c, b$  – нормальная упругая и диссипативная характеристики контакта;  $\eta$  – геометрическая неровность (шероховатость) поверхности покрытия.

Контактную жёсткость образца определяем с помощью теории Герца [7] с учётом того, что в процессе испытаний уже после нескольких оборотов образца шарик будет двигаться не по плоскости, а по жёлобу, который сформируется в результате износа по-

крытия. При этом радиус поперечного сечения жёлоба будет незначительно отличаться от радиуса шарика.

При вдавливании шарика радиуса  $R = 0,003$  м силой  $Q = 0,5$  Н в упругое полупространство с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup> глубина его погружения  $h$  на основании [7] равна  $h = 0,0088$  мкм. Учитывая, что колебания шарика происходят в основном в окрестности положения статического равновесия, то при моделировании среднюю жёсткость можно в первом приближении принять линейной и определить из соотношения  $c = Q/h$ . Тогда жёсткость составит:  $c = 55,53 \cdot 10^6$  Н/м.

Коэффициент демпфирования определим из соотношения:

$$b = \delta 2 \sqrt{c(m + m_*)},$$

где  $\delta$  – коэффициент относительного демпфирования.

По данным источника [8] для металлов  $\delta$  составляет не более 0,01. Принимаем  $\delta = 0,01$ .

В качестве тестового расчёта рассмотрим «падение» индентора с некоторой высоты на вязко-упругое основание. Принимаем начальные условия:  $z(0) = 1 \cdot 10^{-6}$  м,  $\dot{z}(0) = 0$ . Моделирование системы проведено со следующими параметрами модели:  $m = 0,05$  кг,  $m_* = 0,04$  кг,  $c = 9,42 \cdot 10^6$  Н/м,  $\delta = 0,01$ ,  $b = 18,42$  Нс/м, что соответствует взаимодействию шарика с плоской поверхностью [7]. Моделирование выполнено с помощью программного комплекса «Моделирование в технических устройствах» (ПК МВТУ) [9]. Расчёт выполнен в замедленном времени с масштабом  $M = 1:100$ . Результаты расчёта показаны на рис. 3. Как следует из рис. 3, падение шарика в начальный период процесса происходит с ускорением  $a = -mg/(m + m_*) = -5,45$  м/с<sup>2</sup>. Период колебаний в этом процессе является величиной переменной и уменьшается с течением времени, так как уменьшается высота отскока. После третьей секунды при  $t > 3,36$  с отскок шарика прекращается и процесс переходит в затухающие гармонические колебания с постоянной частотой  $f_{45} = 1/(2\pi) \sqrt{c/(m + m_*)} = 1629$  Гц.

Для анализа особенностей моделируемого процесса необходимо рассмотреть амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) динамической системы (рис. 4). В данном случае для построения АЧХ системы был смоделирован генератор, формирующий гармонический сигнал постоянной амплитуды и переменной частоты, который подаётся на вход системы. Затем строилась огибающая амплитуда координаты  $z$ . При расчёте АЧХ принимались начальные условия:  $z(0) = k z_0$ ;  $\dot{z}(0) = 0$ , где  $z_0$  – статический прогиб основания под воздействием силы  $Q$ ,  $z_0 = 0,88 \cdot 10^{-8}$  м. Частота возмущения изменялась в пределах  $f_\eta = 20 \dots 60$  Гц.

Особенностью АЧХ большинства нелинейных системы является то, что при непрерывном возрастании частоты возмущения и при её уменьшении получаются различные огибающие.

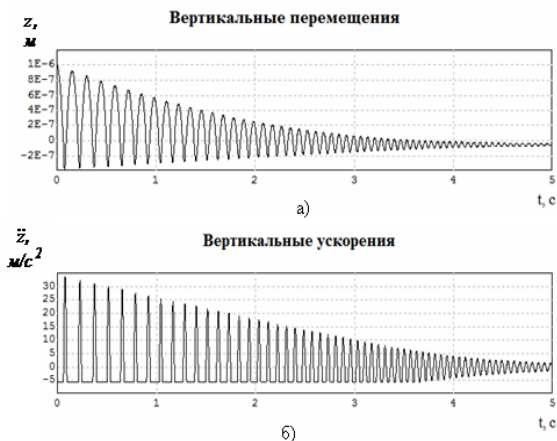


Рис. 3. Динамические характеристики процесса отскока шарика от вязко-упругой поверхности

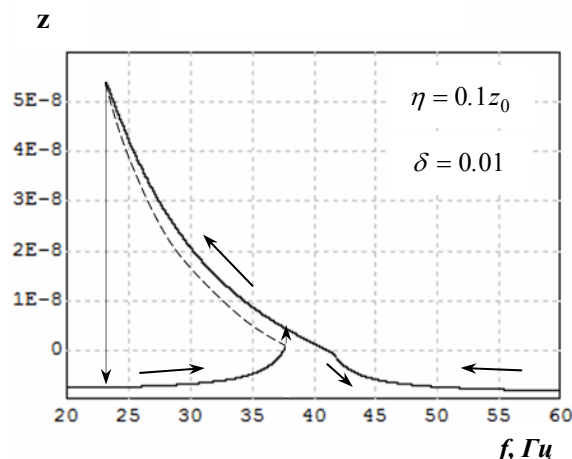


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика нелинейной системы

Как следует из рис. 4, в динамической системе в процессе колебаний возможны переключения (скачкообразные переходы) между ветвями АЧХ в зависимости от частоты и амплитуды. Такие переключения являются причиной появления в спектре координаты  $z$  и её ускорений  $\ddot{z}$  целого семейства как низших, так и высших гармоник. Указанные особенности АЧХ могут приводить к бифуркациям в процессах, протекающих в нелинейных системах.

### Эволюционная модель динамической системы

В основу построения эволюционной модели положены следующие гипотезы:

- при сухом трении без смазки происходят разрывы микроконтактов с последующим их восстановлением в новых точках контактирующих поверхностей;
- геометрическая неровность (шероховатость) контактирующей поверхности является не только причиной возмущения динамических процессов в паре трения, но и следствием этих процессов по причине износа;
- динамические процессы при трении описываются убывающей автокорреляционной функцией, т.е. с течением времени трибосистема «забывает» своё начальное состояние.

Изменение поверхности происходит в результате её износа от силового воздействия индентора. В момент взаимодействия происходит упругая и пластическая деформация поверхности и её износ. Поскольку износ является следствием взаимодействия, то именно в момент взаимодействия он не проявляется. Если бы движение индентора происходило по бесконечной (не повторяющейся) траектории, то влияние изменённой поверхности никогда бы не проявилось на текущем динамическом процессе – он бы определялся только исходной неровностью. Но в данном случае происходит циклическое повторение взаимодействия индентора с той поверхностью, которая сформировалась в ходе предыдущего оборота образца под индентором (см. рис. 1). Следовательно для геометрической неровности поверхности  $\eta(t)$  можно записать:

$$\eta(t) = \eta(t - \tau) + \Delta\eta(t - \tau),$$

где  $\tau$  – время одного предыдущего цикла (одного оборота образца);  $\Delta\eta(t)$  – изменение неровности в результате износа.

При скорости вращения образца  $n_0 = 600$  об/мин время одного оборота  $\tau = 0,1$  с. Принимая допущение о том, что при постоянной скорости скольжения износ пропорционален нормальной силе, его величину представим в виде:

$$\Delta\eta(t) = \varepsilon P(t),$$

где  $\varepsilon$  – коэффициент пропорциональности.

Известно, что скорость изнашивания нелинейно зависит от нормальной силы [10]. Но в данном случае этот факт не является принципиальным. Учитывая, что величина реального износа достаточно мала, можно ограничиться линейным приближением.

Из исходного уравнения движения индентора (1) следует, что вертикальная реакция в контакте имеет статическую составляющую, обусловленную весом груза  $Q$ . Это значит, что с каждым оборотом за счёт износа шарик будет ступенчато погружаться в образец с покрытием. На самом деле так и происходит. Но этот ступенчатый спуск не несёт дополнительной полезной информации, но существенно усложняет обработку данных о динамическом процессе. Поэтому целесообразно процесс ступенчатого погружения устранить за счёт компенсации статической составляющей реакции  $P$  путём вычитания из неё силы  $Q$ . Таким образом, в дальнейшем при формировании процесса износа учитывается только динамическая составляющая сил в контакте:

$$P_1 = \begin{cases} b(\dot{\eta} - \dot{z}) + c(\eta - z) - Q, & \text{при } (\eta - z) > 0; \\ -Q, & \text{при } (\eta - z) \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Пренебрегая слагаемым  $b(\dot{\eta} - \dot{z})$  в формировании силы  $P_1$  из-за его малости по сравнению со слагаемым  $c(\eta - z)$ , выражение (2) представим в виде:

$$\eta(t) = \eta(t - \tau) + \varepsilon P_1(t - \tau). \quad (3)$$

Эволюционная модель функционирует следующим образом. В начальный момент времени  $t = 0$  на вход модели начинает подаваться исходное возмущение  $\eta(t)$ . За период времени  $t = 0 - \tau$  формируется неровность в соответствии с выражением (3). Этот результат накапливается в памяти блока постоянного запаздывания сигнала на время  $\tau$ . Затем, начиная с момента времени  $t = \tau$ , исходная неровность отключается (навсегда) от входа и на вход подаётся уже видоизменённая неровность  $\eta(t)$ . Далее через время  $\tau$  (следующий оборот) на вход подаётся неровность, сформированная на предыдущем цикле с учётом износа. Этот процесс повторяется в дальнейшем на протяжении всего времени моделирования.

Таким образом, эволюционная модель представляет собой нелинейную динамическую систему с положительной обратной связью по возмущению и постоянным запаздыванием по времени  $\tau$  в цепи обратной связи. В качестве начального входного возмущения может быть задан как гармонический, так и случайный сигнал.

Рассмотрим вариант с синусоидальным возмущением. Полагаем, что при наличии возмущения сила воздействия на неровность будет увеличивать её амплитуду (за счёт износа), если направления амплитуды неровности и силы будут совпадать.

Если сила и амплитуда неровности будут находиться в противофазе, то сила со временем ликвидирует неровность. Так как при малых амплитудах в пределах только

упругого взаимодействия коэффициент усиления системы на резонансной частоте достигает 50, то основной вклад в формирование силы воздействия на покрытие вносит амплитуда  $z$ . Поэтому от соотношения фаз между функциями  $z$  и  $\eta$  будет зависеть формирование неровности.

Если у линейной колебательной системы с одной степенью свободы частота возмущения меньше собственной частоты, то колебания  $z$  и  $\eta$  будут синфазными.

Если частота возмущения оказывается больше собственной частоты, то координата  $z$  отстаёт по фазе от возмущения  $\eta$  на  $180^\circ$ . При равенстве указанных частот (резонансе)  $z$  отстаёт по фазе от  $\eta$  на  $90^\circ$ . Но в данной системе при изменении амплитуды  $z$  изменяется собственная частота. С учётом положительной обратной связи это приводит к сложным фазовым соотношениям между параметрами  $z$  и  $\eta$ , которые имеют фундаментальное значение для развития процесса.

Коэффициент пропорциональности  $\varepsilon$  определяет глубину обратной связи. Рассчитать его точно не представляется возможным. В первом приближении его можно определить из следующих соображений.

При нормальной статической нагрузке  $Q = 0,5 \text{ Н}$  индентор изнашивает покрытие толщиной в  $5 \text{ мкм}$  ( $5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ) приблизительно за 10 мин. При скорости вращения образца  $n_0 = 600 \text{ об/мин}$  за это время совершается 6000 оборотов. Следовательно за один оборот изнашивается слой покрытия толщиной  $\Delta\eta_1 = 5 \cdot 10^{-6} / 6 \cdot 10^3 = 0,833 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ . Полагая, что силы  $P$  и  $Q$  одного порядка, получим:  $\varepsilon = \Delta\eta_1 / Q = 1,67 \cdot 10^{-9} \text{ м/Н}$ . Но в дальнейшем коэффициент  $\varepsilon$  уточнялся при отладке модели. Окончательно в расчётах было принято  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-9} \text{ м/Н}$ .

Анализ спектра ускорений  $\ddot{z}$  в начале, в середине и в конце процесса показал, что, если процесс начинался с частотой, отличной от резонансной частоты, то и в середине и даже в конце процесса эта гармоническая компонента полностью сохраняет свою исходную интенсивность. Такая глубокая корреляционная связь между началом процесса и его дальнейшим развитием не характерна для реальных объектов. Следовательно принятая эволюционная модель требует доработки. С этой целью в выражение (3) вносим корректирующий коэффициент  $\alpha < 1$ :

$$\eta(t) = \alpha \eta(t - \tau) + \varepsilon P_1(t - \tau). \quad (4)$$

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\varepsilon$  в выражении (4) имеют вполне определённый физический смысл. Чем выше износостойкость покрытия, тем большим должно быть значение  $\alpha$  и меньшее значение должен иметь коэффициент  $\varepsilon$ , определяющий степень износа покрытия. Даже при существенном снижении доли предыстории в составе возмущения, например при  $\alpha = 0,7$ , дальнейшее возрастание  $\eta(t)$  до своего стационарного значения будет обеспечиваться за счёт положительной обратной связи.

Особого внимания заслуживает тот факт, что смена знака  $\varepsilon$  на противоположный не приводит к заметному качественному и количественному изменению результата. Объясняется это тем, что в правой части выражения (4) складываются две гармонические функции с одинаковой частотой, но различными амплитудами и фазами. Результатом сложения является тоже гармоническая функция, но с иной амплитудой и фазой. Фаза этой функции в конечном итоге устанавливается в результате самоорганизующегося процесса. Результаты расчётов, полученные с помощью откорректированной модели, при  $\alpha = 0,7$ ,  $\varepsilon = 10^{-9} \text{ м/Н}$  показаны на рис. 5 – 7 с учётом масштаба  $\tau = 10 \text{ с}$ .

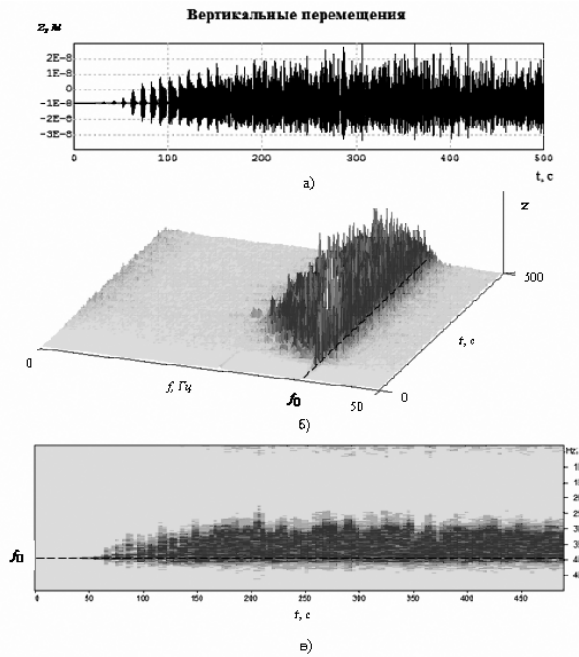


Рис. 5. Вертикальные перемещения индентора при гармоническом начальном возмущении

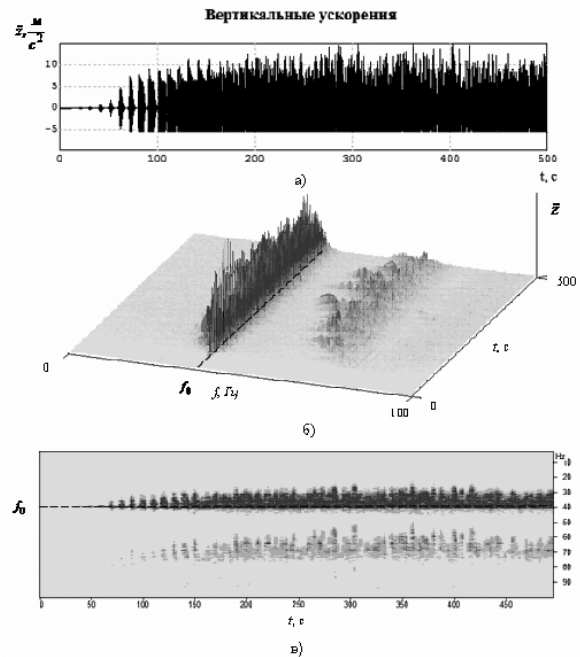


Рис. 6. Вертикальные ускорения индентора при гармоническом начальном возмущении

Из рис. 5 – 7 следует, что в системе устанавливается равновесный режим с мало отличающимися между собой средними амплитудами и частотами. При этом колебания имеют характер, близкий к гармоническому (рис. 7, а, б). Это объясняется доминирующим влиянием регулирующих функций самой системы. По своей природе они определяются её инерционными и упруго-диссипативными свойствами, от которых зависит, в частности, высшая частота колебаний.

Смещение процесса в область низких частот объясняется тем, что при отрыве индентора от поверхности покрытия проявляются нелинейные свойства системы, которые отражены на ее АЧХ – чем больше амплитуда, тем ниже частота гармоник её основного колебательного движения.

На рис. 8 представлены характеристики равновесной неровности поверхности покрытия, сформированной в результате динамического взаимодействия с индентором. Процесс запускается синусоидальным возмущением  $\eta$  с частотой  $f_\eta = 0,7 f_0$ , что заметно на рис. 8, б в виде убывающего внешнего воздействия. Тем не менее, этого оказалось достаточно для развития равновесного режима.

В построенной эволюционной модели присутствуют основные признаки автоколебательной системы [11]:

- колебательность, так как имеются аккумуляторы кинетической и потенциальной энергий и условия их взаимного преобразования;
- система неустойчива из-за наличия положительной обратной связи;
- присутствует фактор стабилизации динамического режима за счёт нелинейной (односторонней) жёсткости фрикционного контакта.



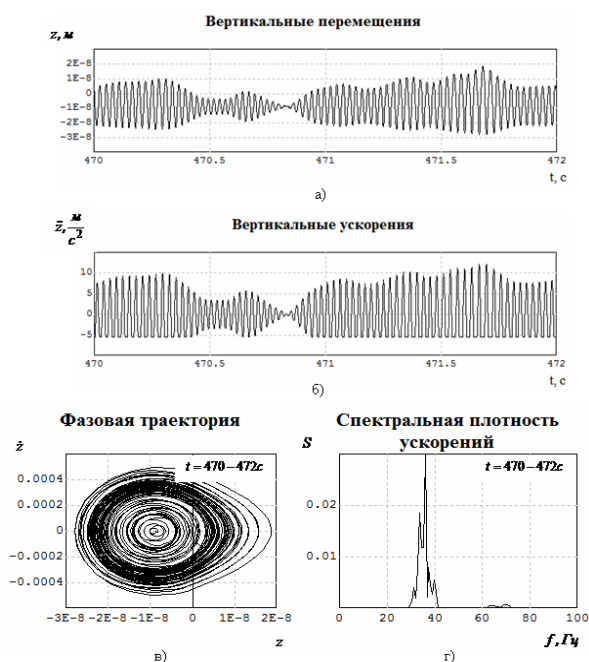


Рис. 7. Фрагмент процесса при начальном гармоническом возмущении ( $t = 470 - 472$  с)

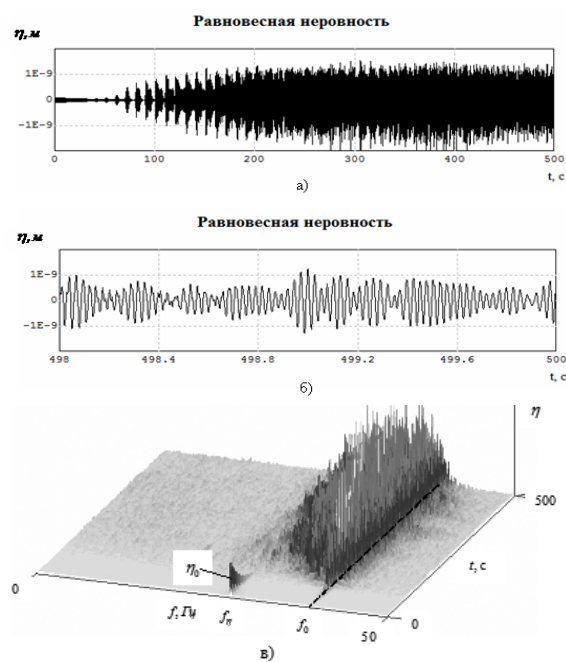


Рис. 8. Характеристики равновесной неровности

Основным параметром, определяющим характеристики установившегося режима, является коэффициент усиления в цепи обратной связи, зависящий от  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon < 0,25 \cdot 10^{-9}$  м/Н и  $\alpha = 0,7$  колебания в системе имеют затухающий характер независимо от величины начальной амплитуды возмущения. Это объясняется наличием в системе демпфирования. Следовательно эволюционная модель является автоколебательной системой с жёстким возбуждением. При  $\varepsilon > 8 \cdot 10^{-9}$  м/Н установившиеся колебания в системе переходят в режим динамического хаоса с непредсказуемым количеством предельных циклов [12].

### Заключение

Пара трения «индентор-покрытие» может быть идентифицирована как автоколебательная система с жёстким возмущением. Полученные результаты показывают, что математическое моделирование подтвердило справедливость гипотез, принятых при построении эволюционной модели динамической трибосистемы.

Движение динамической трибосистемы в установившемся режиме можно идентифицировать как странный аттрактор, так как фазовые траектории проходят в окрестности притягивающего множества, но не повторяются и не замыкаются, т.е. являются инфинитными.

Характеристики равновесной шероховатости при установившемся режиме зависят от коэффициента усиления обратной связи, который по физическому смыслу эквивалентен износостойкости покрытия: чем выше износостойкость, тем меньше коэффициент усиления и амплитуды неровностей поверхности. Частоты колебаний на установившемся режиме смещаются от резонансных в низкочастотную область, и чем выше средние амплитуды ускорений индентора, тем шире частотная полоса колебаний.

Причиной перехода в режим динамического хаоса являются нелинейные свойства системы, вызванные отрывом индентора от поверхности покрытия, которые отражены на АЧХ трибосистемы, а также блок постоянного запаздывания, охваченный жёсткой обратной связью.

Выполненные исследования позволяют в дальнейшем по вибросигналам акселерометров идентифицировать режим, протекающий в парах трения, определять момент разрушения покрытия, прогнозировать остаточный ресурс узлов трения. Разработанная эволюционная модель может быть принята за основу при создании более сложных моделей трибосистем путём введения в обратную связь дополнительных параметров, характеризующих особенности фрикционного контакта.

Исследование выполнено при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 21-79-30007)

### Библиографический список

1. Колесников И.В., Мотренко П.Д., Колесников В.И., Мантуров Д.С. Повышение износостойкости металлических и металлополимерных трибосистем путём формирования структуры и свойств их поверхностного слоя. М.: ВИНТИ РАН, 2021. 167 с.
2. Колесников И.В., Мотренко П.Д., Колесников В.И., Новиков Е.С. Теоретико-экспериментальные исследования закономерностей изменения структурно-фрикционных свойств поверхностных слоёв металлополимерных трибосистем. Разработка методов повышения износостойкости. М.: ВИНТИ РАН, 2022. 135 с.
3. Энциклопедия трибологии. Изнашивание твёрдых тел. [http://tribology.site/index/iznashivanie\\_tverdykh\\_tel/0-36](http://tribology.site/index/iznashivanie_tverdykh_tel/0-36)
4. Чичинадзе А.В., Браун Э.Д., Буше Н.А. и др. Основы трибологии (трение, износ, смазка). М.: Машиностроение, 2001. 664 с.
5. Беркович И.И., Громаковский Д.Г. Трибология. Физические основы, механика и технические приложения. Самара: Самарский государственный технический университет, 2000. 268 с.
6. Аналитика и приборы. Трибометр TRB. <https://labnznru/tribometr-trb/>
7. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.
8. Коэффициенты вязкостного демпфирования для различных систем и материалов. [https://help.solidworks.com/2018/russian/SolidWorks/Cworks/r\\_viscous\\_damping\\_ratios.htm](https://help.solidworks.com/2018/russian/SolidWorks/Cworks/r_viscous_damping_ratios.htm)
9. Программный комплекс «МВТУ» (Моделирование в технических устройствах). [http://rk5-lab.bmstu.ru/computing\\_center/software/index.php#mvtu](http://rk5-lab.bmstu.ru/computing_center/software/index.php#mvtu)
10. Крагельский В.И., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчёта на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
11. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. 272 с.
12. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.

## MATHEMATICAL MODELING OF THE EVOLUTION OF A TRIBOSYSTEM IN THE PROCESS OF FORMATION OF EQUILIBRIUM ROUGHNESS OF A FRICTIONAL CONTACT

© 2022

**I. V. Kolesnikov** Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Research Laboratory “Nanotechnologies and New Materials”; Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russian Federation; [ooedt@rambler.ru](mailto:ooedt@rambler.ru)

**P. A. Koropets** Candidate of Science (Engineering), Senior Researcher of the Research Laboratory of the Department “Theoretical Mechanics”; Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russian Federation; [pkoropets@gmail.com](mailto:pkoropets@gmail.com)

**D. S. Manturov** Candidate of Science (Engineering), Senior Researcher of the Research Laboratory of the Department “Theoretical Mechanics”; Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russian Federation; [manturovds@rgups.ru](mailto:manturovds@rgups.ru)

**Ye. V. Shakhmatov** Academician of the Russian Academy of Sciences, Head of the Department of Power Plant Automatic Systems; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; [shakhm@ssau.ru](mailto:shakhm@ssau.ru)

As the science of friction developed, tribologists showed that reliable operation of friction units is determined by the wear resistance of the surface layer, its ability to adapt to changing operating conditions. In this regard, there is a need not only to create structures on the surfaces of friction units that have the properties of self-regulation and self-organization, but also to monitor changes in the characteristics of the surface layer. This article presents an innovative methodology for monitoring the life cycle of surface layers coated by vacuum ion-plasma treatment. In this paper, we propose a dynamic model based on the hypothesis that roughness is both a factor that excites mechanical vibrations and a consequence of these vibrations, whereas roughness changes as a result of wear under the influence of local dynamic forces. It is shown that a friction pair is a nonlinear system with complex feedbacks. Its stationary motion can be considered as a strange attractor. The randomness of motion in the vicinity of the limit cycle is due to the presence of a link of constant delay with rigid positive feedback in the model. As a result, there is constant reconfiguration of the amplitude and phase of the oscillations.

*Tribosystem; coating wear resistance; equilibrium roughness; dynamic self-oscillating system; wear evolution model*

---

*Citation:* Kolesnikov I.V., Koropets P.A., Manturov D.S., Shakhmatov Ye.V. Mathematical modeling of the evolution of a tribosystem in the process of formation of equilibrium roughness of a frictional contact. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2022. V. 21, no. 3. P. 96-107. DOI: 10.18287/2541-7533-2022-21-3-96-107

### References

1. Kolesnikov I.V., Motrenko P.D., Kolesnikov V.I., Manturov D.S. *Povyshenie iznosostoykosti metallicheskih i metallopolimernykh tribosistem putem formirovaniya struktury i svoystv ikh poverkhnostnogo sloya* [Increasing the wear resistance of metal and metal-polymer tribosystems by forming the structure and properties of their surface layer]. Moscow: VINITI RAN Publ., 2021. 167 p.

2. Kolesnikov I.V., Motrenko P.D., Kolesnikov V.I., Novikov E.S. *Teoretiko-eksperimental'nye issledovaniya zakonomernostey izmeneniya strukturno-friktsionnykh svoystv poverkhnostnykh sloev metallopolimernykh tribosistem. Razrabotka metodov povysheniya iznosostoykosti* [Theoretical and experimental studies on the regularitiws of changes in the structure and properties of the surface layers in metal-polymer friction units. Methods for increasing wear resistance]. Moscow: VINITI RAN Publ., 2022. 135 p.

3. *Entsiklopediya tribologii. Iznashivanie tverdykh tel* [Encyclopedia of tribology – Wear of solids]. Available at: [http://tribology.site/index/iznashivanie\\_tverdykh\\_tel/0-36](http://tribology.site/index/iznashivanie_tverdykh_tel/0-36)
4. Chichinadze A.V., Braun E.D., Bushe N.A. et al. *Osnovy tribologii (trenie, iznos, smazka)* [Fundamentals of tribology (friction, wear, lubrication)]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 2001. 664 p.
5. Berkovich I.I., Gromakovskiy D.G. *Tribologiya. Fizicheskie osnovy, mekhanika i tekhnicheskie prilozheniya* [Tribology. Physical foundations, mechanics and engineering applications]. Samara: Samara State Technical University Publ., 2000. 268 p.
6. *Analitika i pribory. Tribometr TRB* [Analytics and instruments. Tribometer TRB]. Available at: <https://labnznru/tribometr-trb/>
7. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Handbook on Strength of Materials]. Kyiv: Naukova Dumka Publ., 1988. 736 p.
8. *Koeffitsienty vyazkostnogo dempfirovaniya dlya razlichnykh sistem i materialov* [Viscous damping coefficients for various systems and materials]. Available at: [https://help.solidworks.com/2018/russian/SolidWorks/Cworks/r\\_viscous\\_damping\\_ratios.htm](https://help.solidworks.com/2018/russian/SolidWorks/Cworks/r_viscous_damping_ratios.htm)
9. *Programmnyy kompleks «MVTU» (Modelirovanie v tekhnicheskikh ustroystvakh)* [MVTU PC (Software package «Modeling in technical devices»)]. Available at: [http://rk5-lab.bmstu.ru/computing\\_center/software/index.php#mvtu](http://rk5-lab.bmstu.ru/computing_center/software/index.php#mvtu)
10. Kragel'skiy V.I., Dobychin M.N., Kombalov V.S. *Osnovy rascheta na trenie i iznos* [Fundamentals of friction and wear calculation]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1977. 526 p.
11. Teodorchik K.F. *Avtokolebatel'nye sistemy* [Self-oscillating systems]. Moscow: Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Tekhniko-teoreticheskoy Literatury Publ., 1952. 272 p.
12. Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. New York: Springer, 2002. 462 p.