УДК 519.21

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕСМЕЩЁННЫЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛОВЫХ ИНДЕКСОВ ВОСПРОИЗВОДИМОСТИ ПРОЦЕССА

© 2011 В. А. Барвинок[1], В. И. Богданович[1], А. Н. Плотников[1],
В. А. Плотников[1], М. В. Рыжаков[2]

[1]Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королева (национальный исследовательский университет)
[2] Московский физико-технический институт

Установлены законы распределения и получены числовые характеристики выборочных числовых индексов воспроизводимости процесса. Выявлено и скомпенсировано положительное смещение оценок, принятых в действующих стандартах. Предлагаются несмещённые оценки с большей эффективностью.

Числовые индексы воспроизводимости процесса, выборочные оценки, законы распределения, несмещённость и эффективность выборочных оценок.

В литературе и нормативных документах, регламентирующих применение статистических методов в стандартизации и управлении качеством, в частности [1, 2], получила распространение методика квалиметрической оценки процесса посредством числовых индексов воспроизводимости:

$$C_p = \frac{2\Delta}{6\sigma},\ C_{pk} = \min\left\{\frac{\mu - a}{3\sigma}; \frac{b-\mu}{3\sigma}\right\},$$

где Δ - полуширина поля допуска, σ - среднеквадратичное отклонение (СКО) технологического рассеяния, μ - фактический номинал настройки процесса, a и b - соответственно нижняя и верхняя границы поля допуска. Смысл величин C_p, C_{pk} при таком определении вполне очевиден. Однако на практике числовые характеристики μ и σ неизвестны и заменяются выборочными оценками $\hat{\mu} = \bar{x}, \hat{\sigma} = s$. При этом объём выборки обычно невелик и составляет порядка 50 значений. В данной ситуации C_p, C_{pk} превращаются в выборочные статистики, и для того, чтобы оценка процесса посредством C_p, C_{pk} была корректной и адекватной, необходимо установить и исследовать их законы распределения.

Пусть $\lambda = \frac{2\Delta}{6\sigma}$ - точное значение индекса C_p. Выборочную оценку $\widetilde{C}_p = \frac{2\Delta}{6s}$ преобразуем к виду

$$\widetilde{C}_p = \frac{\Delta}{3\sigma\frac{s}{\sigma}} = \frac{\lambda}{\frac{s}{\sigma}}.$$

Таким образом, при любом значении σ $\widetilde{C}_p$ идентична величине $\frac{\lambda}{s}$, где s - выборочное СКО совокупности $N(0,1)$, плотность распределения (ПР) которого имеет вид [3-5]

$$f_{S_n}(x) = \frac{2(\frac{n-1}{2})^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} x^{n-2} e^{-\frac{n-1}{2}x^2}.$$

Искомую ПР величины $\widetilde{C}_p = \frac{\lambda}{s}$ получим путём последовательных преобразований вида $Y = \frac{1}{X}, Y = aX$:

$$f_{c_p}(z) = \frac{2(\frac{n-1}{2})^{\frac{n-1}{2}} \lambda^{n-1}}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) z^n} e^{-\frac{\lambda^2 (n-1)}{2z^2}}. \qquad (1)$$

Вид ПР (1) показан на рис. 3.

Вычислив подстановкой

$$\left[x = \frac{\lambda^2 (n-1)}{2z^2} \right]$$

интеграл $\int_0^\infty z f_{\tilde{C}_p}(z) dz$, получим среднее $\tilde{C}_p$:

$$M\left[\tilde{C}_p\right] = \lambda \frac{\sqrt{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, n \geq 3. \quad (2)$$

Вычислив той же подстановкой второй начальный момент, найдём дисперсию $\tilde{C}_p$:

$$D\left[\tilde{C}_p\right] = \lambda^2 \frac{n-1}{2\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right) - \frac{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right], n \geq 4. \quad (3)$$

Несмещённая оценка C_p после компенсации положительного смещения согласно (2) примет вид

$$\hat{C}_p = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot \frac{2\Delta}{6s}. \quad (4)$$

При этом её дисперсия уменьшится по сравнению с (3) и составит:

$$D\left[\hat{C}_p\right] = \lambda^2 \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)} - 1 \right]. \quad (5)$$

При выводе ПР выборочного C_{p_k}, совершив тождественное преобразование исходного определения $\tilde{C}_{p_k}$, представим его в виде

$$\tilde{C}_{p_k} = \frac{3\omega - \left|\frac{\overline{x}_0}{\sigma}\right|}{3\frac{s}{\sigma}},$$

где $\omega = \lambda - \frac{\mu}{3\sigma}$, а $\overline{x}_0$ - выборочное среднее центрированной совокупности $X - \mu$. Таким образом, исключив параметр σ и перейдя к стандартной совокупности $N(0,1)$, представим $\tilde{C}_{p_k}$ в виде

$$\tilde{C}_{p_k} = \frac{\omega}{s} - \frac{|t_n|}{3\sqrt{n}}, \quad (6)$$

где s - выборочное СКО, а t_n - Стьюдентово отношение выборки объёма n [3, 4].

Закон распределения выборочного C_{p_k} найдём как ПР функции от $\overline{X}$ и s. Сначала найдём $G(z) = P\left\{ \frac{3\omega - |\overline{X}|}{3s} < z \right\}$. Для этого придётся рассмотреть 2 случая: $z \leq 0$ и $z > 0$ (рис. 1, 2).

Плотность совместного распределения величин $\overline{X}$ и s, как следует из их независимости [3,4], равна произведению ПР компонент. Интегрируя ПР совместного распределения по области $D(z)$ (рис. 1), получаем

$$G(z)\big|_{z\leq 0} = P\left\{ s < \infty, \left|\overline{X}\right| > 3(\omega - sz) \right\} =$$
$$= \int_0^\infty f_S(t) \left[\int_{-\infty}^{-3(\omega - zt)} f_{\overline{X}}(x)dx + \int_{3(\omega - zt)}^{\infty} f_{\overline{X}}(x)dx \right] dt =$$
$$= \frac{\sqrt{n}(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\pi}\, 2^{\frac{n-2}{2}}\, \Gamma(\frac{n-1}{2})} \times$$
$$\times \int_0^\infty t^{n-2} e^{-\frac{(n-1)t^2}{2}} \left[\int_{-\infty}^{-3(\beta\omega - zt)} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx + \int_{3(\omega - zt)}^{\infty} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \right] dt. \quad (7)$$

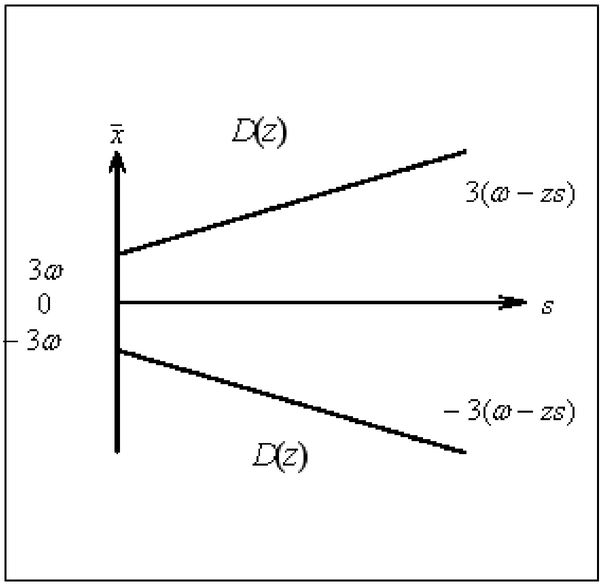

Рис. 1. Схема области интегрирования для определения $G(z)$ *в координатах* $(s,\bar{x})$ *при* $z \le 0$

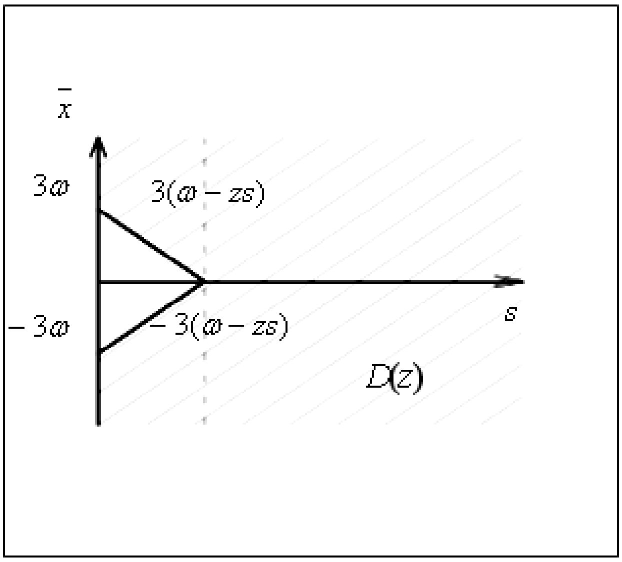

Рис. 2. Схема области интегрирования для определения $G(z)$ *в координатах* $(s,\bar{x})$ *при* $z > 0$

Дифференцируя (7) по z, находим

$$f_{c_{pk}}(z)\big|_{z\le 0} = \frac{12\sqrt{n}(\frac{n-1}{n})^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\times$$

$$\times\int_0^\infty t^{n-1}\exp\left[-\frac{(n-1)t^2}{2}-\frac{9n(\omega-tz)^2}{2}\right]dt. \quad (8)$$

При $z>0$ (рис. 2) $G(z)$ будет иметь вид

$$G(z)\big|_{z>0} = P\left\{s<\frac{\omega}{z},\left|\bar{X}\right|>3(\omega-sz)\right\}+P\left\{s\ge\frac{\omega}{z}\right\}. \quad (9)$$

После дифференцирования по z получим

$$f_{C_{pk}}(z)\big|_{z>0}=\frac{12\sqrt{n}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\times$$
$$\times\int_0^{\frac{\alpha}{z}}t^{n-1}\exp\left[-\frac{(n-1)t^2}{2}-\frac{9n(\omega-tz)^2}{2}\right]dt. \qquad (10)$$

Вид ПР, определяемой (8), (10), показан на рис. 3. Как видно из формул (8), (10), $f_{C_{pk}}(z)$ имеет, вообще говоря, особенность в точке $z=0$. Однако эта особенность является устранимой (непрерывность в точке $z=0$ не нарушается). При вычислении среднего и дисперсии $\tilde{C}_{p_k}$ воспользуемся его представлением (6). Произведя необходимые вычисления, получим:

$$M\left[\tilde{C}_{pk}\right]=\frac{\sqrt{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\times$$
$$\times\left[\omega\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{2}}-\frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{3(n-2)\sqrt{\pi n}}\right],n\geq 3\ , \qquad (11)$$

$$D\left[\tilde{C}_{pk}\right]=\frac{n-1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left\{\frac{\omega^2}{2}\left[\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)-\frac{\Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right]+\right.$$
$$+\frac{1}{9n}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{n-3}-\frac{4\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi(n-2)^2\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right]-$$
$$\left.-\frac{2\omega}{3\sqrt{\pi}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-2)\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right]\right\},\ n\geq 4\ . \qquad (12)$$

Разрешая (11) относительно ω, получим несмещённую оценку

$$\hat{C}_{pk}=\frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\times$$
$$\times\left[\min\left\{\frac{\overline{x}-a}{3s},\frac{b-\overline{x}}{3s}\right\}+\frac{2\sqrt{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{3(n-2)\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right],n\geq 3. \qquad (13)$$

Дисперсия оценки (13) уменьшится по сравнению с (12) в той же пропорции, что и (5) по сравнению с (3):

$$D\left[\hat{C}_{pk}\right]=\frac{2\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}D\left[\tilde{C}_{pk}\right]. \qquad (14)$$

Таким образом, переход на несмещённые оценки (4), (13) автоматически обеспечивает повышение их эффективности. Однако более рациональным представляется перейти к обратным величинам:

$$C'_p=\frac{6s}{2\Delta},\ C'_{pk}=\frac{3s}{\min\left\{\overline{x}-a,b-\overline{x}\right\}},$$
$$\lambda'=\frac{1}{\lambda},\omega'=\frac{1}{\omega}, \qquad (15)$$

которые в [1] фигурируют как «коэффициенты возможности процесса». Главным доводом в пользу этого является существенное повышение эффективности оценок. Причём относительная эффективность возрастает по мере совершенствования процесса, т.е. локализации рассеяния вблизи центра поля допуска. Кроме того, устанавливается единообразие с другими числовыми показателями качества (оценка вероятности выхода несоответствующей единицы продукции, оценка доли несоответствующих единиц продукции в партии, риски поставщика и потребителя и т.д.), где идеальному процессу соответствуют нулевые значения показателей. В предлагаемом варианте область значений удовлетворительного процесса составит ≤ 1, хорошего $\le \frac{3}{4}$ вместо $\ge \frac{4}{3} \approx 1{,}33$.

Плотности распределения оценок (15) вычисляются с помощью преобразования $f_{\frac{1}{X}}(y) = \frac{1}{y^2} f_X(\frac{1}{y})$ [4, 5], и возникающее отрицательное смещение компенсируется тем же приёмом, что и C_p, C_{pk}. Эффективная несмещённая оценка C'_p примет вид

$$\hat{C}'_p = \frac{\sqrt{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{6s}{2\Delta}. \qquad (16)$$

Коэффициент вариации оценки (16) составит:

$$v_{C_p} = \sqrt{\frac{n-1}{2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}\right]^2 - 1}\,.$$

Среднее и дисперсия величины $C'_{pk} = \frac{1}{\hat{C}_{pk}}$ являются нелинейными функциями точного параметра:

$$M\left[C'_{pk}\right] = \frac{3\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\frac{9nt^2}{2\omega^2(t+1)^2}}}{t+1} - \frac{e^{-\frac{9n(t+1)^2}{2\omega^2 t^2}}}{t}\right] dt\,,$$

$$D\left[C'_{pk}\right] = \frac{3\omega(n-1)\sqrt{n}\,\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_0^\infty \left[e^{-\frac{9nt^2}{2\omega^2(t+1)^2}} + e^{-\frac{9n(t+1)^2}{2\omega^2 t^2}}\right] dt - \left(M\left[C'_{pk}\right]\right)^2.$$

Однако при используемых на практике достаточно больших n на основании приближённых формул для числовых характеристик функций от случайных величин [3] с достаточной точностью можно принять

$$\hat{C}'_{pk} = \frac{1}{\hat{C}_{pk}}\,, \quad M\left[\hat{C}'_{pk}\right] \approx \omega' = \frac{1}{\omega}\,,$$

$$D\left[\hat{C}'_{pk}\right] \approx \frac{1}{\omega^4} D\left[\hat{C}_{pk}\right],$$

где $\hat{C}_{pk}$ определяется согласно (13). Сравнительный вид ПР величин $C_p, C_{pk}, C'_p, C'_{pk}$ приведён на рис. 3.

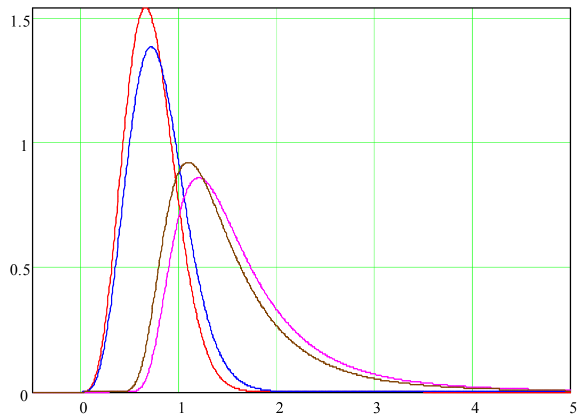

Рис. 3. Плотности распределения величин $\frac{1}{C_p}, \frac{1}{C_{pk}}, C_{pk}, C_p$ *(слева направо) при* $\lambda = \omega = \frac{4}{3}, n = 5$

Библиографический список

1. ГОСТ Р 51814.3 – 2001. Методы статистического управления процессами [Текст]. - М.: Изд-во стандартов, 2001.

2. Чекмарёв, А. Н. Статистические методы управления качеством [Текст] / А. Н. Чек-марёв, В. А. Барвинок, В. В. Шалавин. - М.: Машиностроение, 1999.

3. Смирнов, Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть) [Текст] / Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. - М.; Наука, 1965.

4. Крамер, Г. Математические методы статистики [Текст] / Г. Крамер. - М.: Мир, 1976.

5. Плотников, А. Н. Статистическое моделирование и системный анализ технологических процессов [Текст] / А. Н. Плотников. - Самара: Изд-во СГАУ, 2008.

References

1. GOST R 51814.3 - 2001. Methods of statistical process control [Text]. - M., 2001.

2. Chekmarev, A. N. Methods of statistical quality control [Text] / A. N. Chekmarev, V. A. Barvinok, V. V. Shalavin. - M.: Mashinostroenyie, 1999. - 319 p.

3. Smirnov, N. V. Probabilitiys theory and mathematical statistics in engineering (common part) [Text] / N. V. Smirnov, I. V. Dunin-Barkovskyi. - M.: Nauka, 1965. - 556 p.

4. Kramer, G. Methods of mathematical statistic [Text] / G. Kramer. - M.: Mir, 1976. - 648 p.

5. Plotnikov, A. N. Statistical modeling and system analysis of technological processes [Text] / A. N. Plotnikov. - Samara: SSAU publishing house, 2008. - 154 p.

LAWS OF DISTRIBUTION AND UNBIASED ESTIMATES OF NUMERICAL INDEXES FOR PROCESS REPRODUCIBILITY

© 2011 V. A. Barvinok[1], V. I. Bogdanovich[1], A. N. Plotnikov[1], V. A. Plotnikov[1], M. V. Ryzhakov[2]

[1]Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University)
[2]Moscow Physico-Technical Institute

Laws of distribution are established and numerical characteristics of selective numerical indexes for the process reproducibility are obtained. Positive displacement of the estimations accepted in the operating standards is revealed and compensated. More efficient unbiased are proposed.

Numerical indexes for the reproducibility of process, selective estimations, distribution laws, estimates unbiased and efficient selective estimates.

Информация об авторах

Барвинок Виталий Алексеевич, член-корреспондент РАН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: barvinok@ssau.ru. Область научных интересов: физика плазмы, математическое моделирование, тепловые процессы, деформационные процессы, газотермическое напыление, вакуумное напыление, надёжность, ресурс, авиа-космическая техника.

Богданович Валерий Иосифович, доктор технических наук, профессор кафедры производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: bogdanovich@ssau.ru. Область научных интересов: плазма, плазменные покрытия, скорость реакций, упорядоченные структуры с заданным свойством, гетерогенные процессы, математическое моделирование, надёжность.

Плотников Андрей Николаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: metatlas@yandex.ru. Область научных интересов: математическое моделирование, случайные процессы, прикладная статистика, теплопроводность и термоупругость растущих многослойных тел.

Плотников Владислав Андреевич, студент факультета летательных аппаратов, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: metatlas@yandex.ru. Область научных интересов: статистические методы в управлении качеством, менеджмент качества.

Рыжаков Михаил Викторович, старший преподаватель Московского физико-технического института (государственного университета). E-mail: barvinok@ssau.ru. Область научных интересов: системы управления космическими объектами, элементы нечеткой логики, искусственный интеллект.

Barvinok Vitaly Alekseevich, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, doctor of technical science, professor, head of the department of aircraft construction and quality management in engineering, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), barvinok@ssau.ru. Area of research: physics of plasma, mathematical modelling, thermal processes, deformation processes, gas-thermal spraying, vacuum spraying, reliability, resource, the avia-space technics.

Bogdanovich Valery Iosifovich, doctor of technical science, professor of the department of aircraft construction and quality management in engineering, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), bogdanovich@ssau.ru. Area of research: plasma, plasma coatings, speed of reactions, ordered structures with specified properties, heterogeneous processes, mathematical modelling, reliability.

Plotnikov Andrey Nikolaevich, candidate of technical science, senior lecturer of the department of aircraft construction and quality management in engineering, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), metatlas@yandex.ru. Area of research: mathematical modelling, random processes, applied statistics, heat conductivity and thermoelasticity of growing multilayered bodies.

Plotnikov Vladislav Andreevich, student of the faculty of aircraft construction, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), metatlas@yandex.ru. Area of research: statistical methods in quality management, quality management.

Ryzhakov Michael Victorovich, senior lecturer of the Moscow Physico-Technical Institute, barvinok@ssau.ru. Area of research: systems of space object, control elements of fuzzy logic, artificial intelligence.