

ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ МАЛОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ТЯГОЙ ПРИ ПЕРЕЛЁТЕ МЕЖДУ НЕКОМПЛАНАРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ И ГЕОСТАЦИОНАРНОЙ ОРБИТАМИ

© 2011 П. В. Фадеенков, С. А. Ишков

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Рассматривается задача формирования оптимальной программы управления космическим аппаратом с двигателями малой тяги при перелёте между некомпланарными сильновытянутой эллиптической и геостационарной орбитами. Предлагается схема совместного изменения элементов орбиты в рамках простой структуры управления вектором тяги на витке.

Космический аппарат, двигатель малой тяги, эллиптическая орбита, геостационарная орбита, оптимальная программа управления.

Для построения номинальных программ управления исследователями использовались методы теории оптимального управления, прежде всего принцип максимума Понтрягина, для систем точных или усреднённых уравнений движения. Построение усреднённых уравнений во многих случаях позволяет упростить поиск оптимального управления, а иногда получить аналитическое решение задачи, что является очень важным для формирования номинальных программ управления движением.

Задача оптимального управления космическим аппаратом (КА) с малой тягой (МТ) при межорбитальном переходе между круговыми некомпланарными орбитами рассмотрена в классической работе В. Н. Лебедева [1]. Применение метода усреднения позволило получить аналитические решения данной задачи как для частных, более простых схем управления вектором тяги на витке, так и для общего случая.

Совместное изменение большой полуоси, эксцентриситета и наклона при перелёте с эллиптической орбиты на геостационарную орбиту (ГСО) подробно рассмотрено в [2]. В этой работе показано, что угол отклонения вектора тяги от плоскости орбиты на витке меняется по закону, близкому к

релейному. Структура ориентации вектора тяги в плоскости орбиты содержит разгонные и тормозные участки или, в частном случае, только разгонный или тормозной участки.

В [3] рассмотрены задачи управления тягой, располагающейся в плоскости местного горизонта. Такое управление при допущении постоянства ширины активных и пассивных участков позволяет получить аналитические зависимости элементов орбиты.

В данной работе рассматривается задача определения оптимального изменения параметров программы управления КА с двигателями МТ при перелёте между некомпланарными высокоэллиптической и геостационарной орбитами при заданной структуре управления вектором тяги.

Эта задача возникает при оптимизации выведения полезной нагрузки на ГСО с последовательным использованием разгонных блоков с двигателями большой тяги (ДБТ) и малой тяги. Во многих работах было показано, что оптимальной является схема перелёта через эллиптическую орбиту, сформированную после первого разгонного импульса ступени с ДБТ. Как показывают расчёты, эксцентриситет такой орбиты составит величину от 0,6...0,7, а радиус апогея – 50000...150000 км.

Для перехода с такой орбиты на ГСО необходимо изменить как минимум три элемента орбиты: большую полуось, эксцентриситет и наклонение. Последовательное изменение этих элементов по сравнению с совместным изменением, как показывают расчёты, приводит к большим затратам характеристической скорости. Предлагается схема совместного изменения указанных элементов в рамках простых схем управления вектором тяги на витке в плоскости местного горизонта:

$$v = [v_1 - v_2 + (v_1 + v_2) \text{sign}(\cos(u))] \cdot 0,5. \quad (1)$$

Здесь v, v_1, v_2 - углы отклонения вектора тяги двигательной установки от плоскости орбиты, u - аргумент широты. На витке v_1, v_2 остаются постоянными.

Примем, что возмущения от несферичности Земли, атмосферы и других факторов отсутствуют, оси апсид начальной и конечной орбит совпадают с линиями узлов и лежат в плоскости экватора ($\omega_0 = 0$ и $u = \vartheta$).

Используя замену $\frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{A^3}} (1 - e \cdot \cos E)^{-1}$, перейдём в дифференциальных уравнениях движения [4] к новой независимой переменной – эксцентрисической аномалии E :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dE} &= 2 \cdot a \cdot \cos(v) \cdot \frac{A^3}{\mu} \cdot \sqrt{1-e^2}, \\ \frac{de}{dE} &= a \cdot \cos(v) \cdot \frac{A^2}{\mu} \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot (2 \cdot \cos E - e \cdot \cos^2 E - e), \\ \frac{di}{dE} &= a \cdot \sin(v) \cdot \frac{A^2}{\mu} \cdot \frac{\cos E \cdot (1+e^2) - e \cdot \cos^2 E - e}{\sqrt{1-e^2}}, \\ \frac{d\Omega}{dE} &= a \cdot \frac{\sin(v)}{\sin i} \cdot \frac{A^2}{\mu} \cdot \left(\sin E - \frac{1}{2} e \cdot \sin 2E \right), \\ \frac{d\omega}{dE} &= a \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{A^2}{\mu} \times \\ &\quad \times \left(\cos(v) \cdot (1-e^2) \sin E + \right. \\ &\quad \left. + \sin E \cdot (1-e \cdot \cos E) \cdot (\cos(v) - e \cdot \sin(v) \cdot \text{ctgi}) \right), \\ \frac{dV_x}{dE} &= a \cdot \sqrt{\frac{A^3}{\mu}} \cdot (1 - e \cdot \cos E), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $A, e, i, \Omega, \omega, v$ - элементы орбиты; V_x – характеристическая скорость; a – модуль ускорения; μ - гравитационная постоянная.

Выражение (1) примет вид:

$$v = \left[v_1 - v_2 + (v_1 + v_2) \text{sign}\left(\frac{\cos E - e}{1 - e \cdot \cos E}\right) \right] \cdot 0,5. \quad (3)$$

Моменты изменения ориентации тяги $u = \pm \pi / 2$ соответствуют эксцентрисической аномалии точек переключения E_{nep} :

$$E_{nep} = \arccos(e) = \arcsin \sqrt{1-e^2}. \quad (4)$$

После усреднения на витке получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dE} &= \frac{1}{\pi} \cdot a \cdot \frac{A^3}{\mu} \cdot \sqrt{1-e^2} \times \\ &\quad \times \left(2 \cdot \arccos(e) \cdot (\cos v_1 - \cos v_2) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \pi \cdot \cos v_2 \right), \\ \frac{de}{dE} &= \frac{1}{2\pi} \cdot a \cdot \frac{A^2}{\mu} \cdot \sqrt{1-e^2} \times \\ &\quad \times \left(\left[\cos v_1 - \cos v_2 \right] \times \right. \\ &\quad \times \left[4\sqrt{1-e^2} - e \cdot (e \cdot \sqrt{1-e^2} + 3 \cdot \arccos(e)) \right] - \\ &\quad \left. - 3 \cdot \pi \cdot e \cdot \cos v_2 \right), \\ \frac{di}{dE} &= \frac{-1}{2\pi} \cdot a \cdot \frac{A^2}{\mu \cdot \sqrt{1-e^2}} \times \\ &\quad \times \left(\left[\sin v_1 + \sin v_2 \right] \cdot \left[(2+e^2) \sqrt{1-e^2} - 3 \cdot e \cdot \arccos(e) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot \pi \cdot e \cdot \sin v_2 \right), \\ \frac{d\Omega}{dE} &= 0, \\ \frac{d\omega}{dE} &= 0, \\ \frac{dV_x}{dE} &= a \cdot \sqrt{\frac{A^3}{\mu}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Согласно (5), аргументы перицентра ω и восходящего узла Ω остаются постоянными. Система не зависит от эксцентрисической аномалии и может быть уменьшена на три уравнения. Перейдём к новой независимой переменной V_x :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dV_x} &= \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{A^3}{\mu}} \cdot \sqrt{1-e^2} \times \\ &\quad \times (2 \cdot \arccos(e) \cdot (\cos v_1 - \cos v_2) + 2 \cdot \pi \cdot \cos v_2), \\ \frac{de}{dV_x} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \sqrt{1-e^2} \times \\ &\quad \times \left([\cos v_1 - \cos v_2] \cdot [4\sqrt{1-e^2} - e \cdot (\sqrt{1-e^2} + 3 \cdot \arccos(e))] - \right. \\ &\quad \left. - 3 \cdot \pi \cdot e \cdot \cos v_2 \right), \\ \frac{di}{dV_x} &= \frac{-1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{A}{\mu \cdot (1-e^2)}} \times \\ &\quad \times \left([\sin v_1 + \sin v_2] \cdot [(2+e^2)\sqrt{1-e^2} - 3 \cdot e \cdot \arccos(e)] + \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot \pi \cdot e \cdot \sin v_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Определим оптимальную программу изменения углов v_1, v_2 .

В соответствии с принципом максимума Понтрягина составим гамильтониан системы:

$$H = \frac{dA}{dV_x} \psi_A + \frac{di}{dV_x} \psi_i + \frac{de}{dV_x} \psi_e - \psi_{V_x}, \quad (7)$$

где $\psi_A, \psi_e, \psi_i, \psi_{V_x}$ - сопряжённые множители.

Уравнения для сопряжённых множителей имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_i &= -\frac{\partial H}{\partial i} = 0, \\ \dot{\psi}_{V_x} &= -\frac{\partial H}{\partial V_x} = 0, \\ \dot{\psi}_A &= -\frac{\partial H}{\partial A}, \\ \dot{\psi}_e &= -\frac{\partial H}{\partial e}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

После нормировки получим

$$H = \frac{dA}{dV_x} \psi_A + \frac{di}{dV_x} \psi_i + \frac{de}{dV_x} \psi_e - 1 = 0. \quad (9)$$

Из (8) следует, что два сопряжённых множителя постоянны на всей оптимальной траектории, а уравнения для третьего и четвертого множителей представляются сложными зависимостями. Если учесть, что на оптимальной траектории гамильтониан ав-

тономной системы остается постоянным и равным нулю, то из уравнения для сопряжённого множителя большой полуоси можно получить интеграл

$$A \cdot \psi_A = A_0 \cdot \psi_{A0} - \frac{V_x}{2}, \quad (10)$$

где A_0, ψ_{A0} - соответственно большая полуось и соответствующий сопряжённый множитель в начальный момент времени.

Сопряжённый множитель ψ_e можно определить из гамильтониана.

Управление определится в явном виде

$$\text{из условия: } \frac{\partial H}{\partial v_1} = 0, \frac{\partial H}{\partial v_2} = 0. \text{ Для удобства}$$

перепишем (9) в виде

$$\begin{aligned} H &= H_1 \cdot \cos v_1 + H_2 \cdot \cos v_2 + \\ &+ H_3 \cdot \sin v_1 + H_4 \cdot \sin v_2 - 1 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{A^3}{\mu}} \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot 2 \cdot \arccos(e) \cdot \psi_A + \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot [4\sqrt{1-e^2} - e \cdot (\sqrt{1-e^2} + 3 \cdot \arccos(e))] \cdot \psi_e, \\ H_2 &= 2 \cdot \sqrt{\frac{A^3}{\mu}} \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot \psi_A - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot e \cdot \psi_e - H_1, \\ H_3 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{A}{\mu \cdot (1-e^2)}} \cdot [(2+e^2)\sqrt{1-e^2} - 3 \cdot e \cdot \arccos(e)] \cdot \psi_i, \\ H_4 &= \frac{-3}{2} \cdot \sqrt{\frac{A}{\mu \cdot (1-e^2)}} \cdot e \cdot \psi_i + H_3. \end{aligned}$$

Тогда выражения для управления имеют вид:

$$\operatorname{tg} v_1 = \frac{H_3}{H_1}, \quad \operatorname{tg} v_2 = \frac{H_4}{H_2}. \quad (12)$$

Граничные условия перелёта между произвольной эллиптической орбитой и ГСО запишем в виде

$$\begin{aligned} V_x = 0 : & A = A_0, e = e_0, i = i_0, \\ V_x = V_{xк} : & A = 42160 \text{ км}, e = 0, i = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение краевой задачи заключается в поиске начальных значений сопряжённых множителей, обеспечивающих выполнение граничных условий в конечный момент времени. Предложим процедуру поиска сопряжённых множителей с использованием начальных углов отклонения вектора тяги от плоскости орбиты.

Из (11) с учётом (12) следует:

$$\frac{H_3}{\sin v_1} + \frac{H_4}{\sin v_2} - 1 = 0. \quad (14)$$

Тогда выражение для ψ_i имеет вид

$$\psi_i = \frac{1}{H'_3 / \sin v_1 + H'_4 / \sin v_2} = const, \quad (15)$$

где

$$H'_3 = \frac{H_3}{\psi_i} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{A_0}{\mu \cdot (1 - e_0^2)}} \cdot \left[(2 + e_0^2) \sqrt{1 - e_0^2} - \right. \\ \left. - 3 \cdot e_0 \cdot \arccos(e_0) \right],$$

$$H'_4 = \frac{H_4}{\psi_i} = \frac{-3}{2} \cdot \sqrt{\frac{A_0}{\mu \cdot (1 - e_0^2)}} \cdot e_0 + H'_3.$$

Из (12) получим систему двух уравнений относительно ψ_{A_0}, ψ_{e_0} :

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= k_1 \cdot \psi_{A_0} + k_2 \cdot \psi_{e_0} = H_3 \cdot \operatorname{ctg} v_1, \\ H_2 &= k_3 \cdot \psi_{A_0} + k_4 \cdot \psi_{e_0} = H_4 \cdot \operatorname{ctg} v_2, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{A_0^3}{\mu}} \cdot \sqrt{1 - e_0^2} \cdot 2 \cdot \arccos(e_0),$$

$$k_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{A_0}{\mu}} \cdot \sqrt{1 - e_0^2} \cdot \left[4\sqrt{1 - e_0^2} - e_0 \cdot (e_0 \cdot \sqrt{1 - e_0^2} + \right. \\ \left. + 3 \cdot \arccos(e_0)) \right],$$

$$k_3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{A_0^3}{\mu}} \cdot \sqrt{1 - e_0^2} - k_1,$$

$$k_4 = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{A_0}{\mu}} \cdot \sqrt{1 - e_0^2} \cdot e_0 - k_2.$$

Решим краевую задачу для перелёта КА начальной массы 780 кг с начальной орбиты, имеющей радиус перигея 6595 км, ради-

ус апогея 34000 км, наклонение $63,17^\circ$ и нулевые аргумент перигея и долготу восходящего узла. Тяга ЭРД КА принимается равной 0,166 Н, удельный импульс 1500с [3].

В результате решения краевой задачи найдены начальные значения параметров $v_1=82,28^\circ$, $v_2=3,89^\circ$, которые обеспечивают затраты характеристической скорости $V_x = 4,51 \text{ км/с}$. При моделировании межорбитального перелёта на исходной модели движения в оскулирующих элементах [4] с управлением (12) подтверждается хорошая точность расчётов на усреднённой модели – расхождение составляет менее одного процента.

Зависимости радиусов перигея R_p , апогея R_a , эксцентриситета e , наклонения i и программы управления от затрат характеристической скорости V_x приведены на рис. 1 и 2.

Анализируя рис. 1, на графиках зависимостей радиусов апогея, перигея и эксцентриситета можно выделить по два характерных участка: первый – почти одинаковое увеличение радиусов апогея, перигея и незначительное падение эксцентриситета; второй – уменьшение радиуса апогея и увеличение радиуса перигея, а эксцентриситет меняется более значительно по сравнению с первым участком.

На рис. 2 для угла v_2 отклонения вектора тяги в перигее можно выделить три участка: на первом участке при затратах характеристической скорости $V_x \leq 2,5 \text{ км/с}$ отклонение вектора тяги близко к нулю; в диапазоне затрат характеристической скорости $2,5 \text{ км/с} < V_x \leq 3,5 \text{ км/с}$ угол меняется существенно и становится больше 90° , что приводит к появлению торможения в перигее; на конечном участке при $V_x > 3,5 \text{ км/с}$ угол слабо возрастает от 150° до 154° . Средний участок существенного изменения угла v_2 соответствует изменению характера зависимостей радиусов апогея, перигея и эксцентриситета (рис. 1). Угол v_1 отклонения вектора тяги в апогее меняется почти синхронно наклонению.

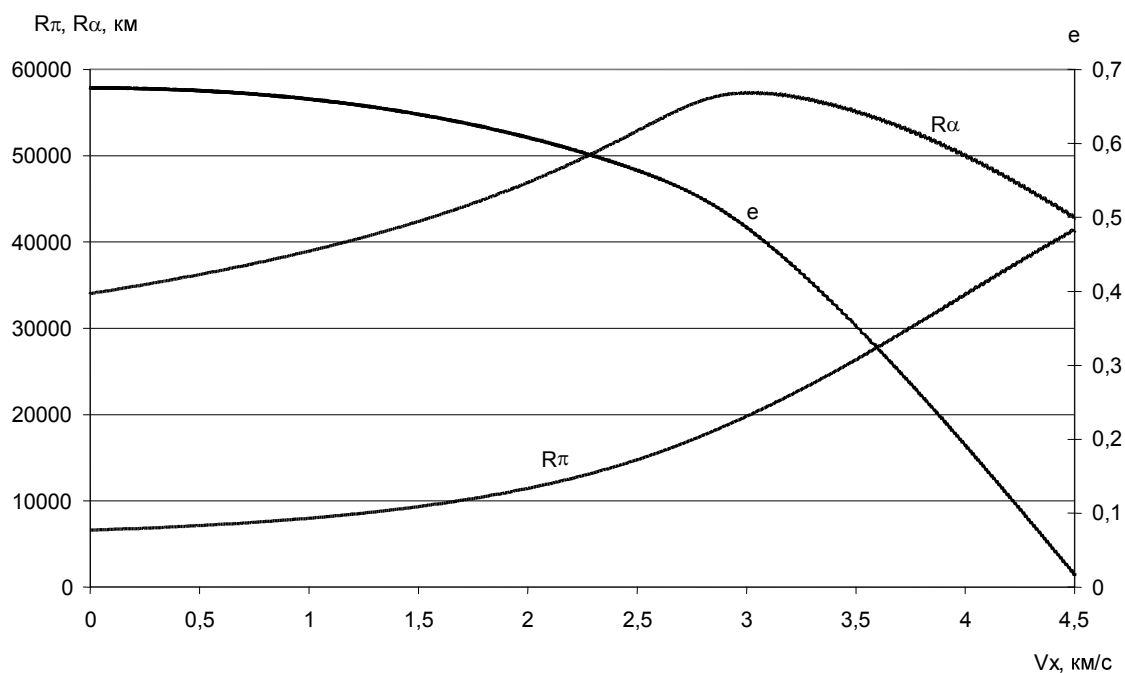


Рис. 1. Зависимости радиусов перигея R_π , апогея R_α , эксцентриситета e от затрат характеристической скорости V_x

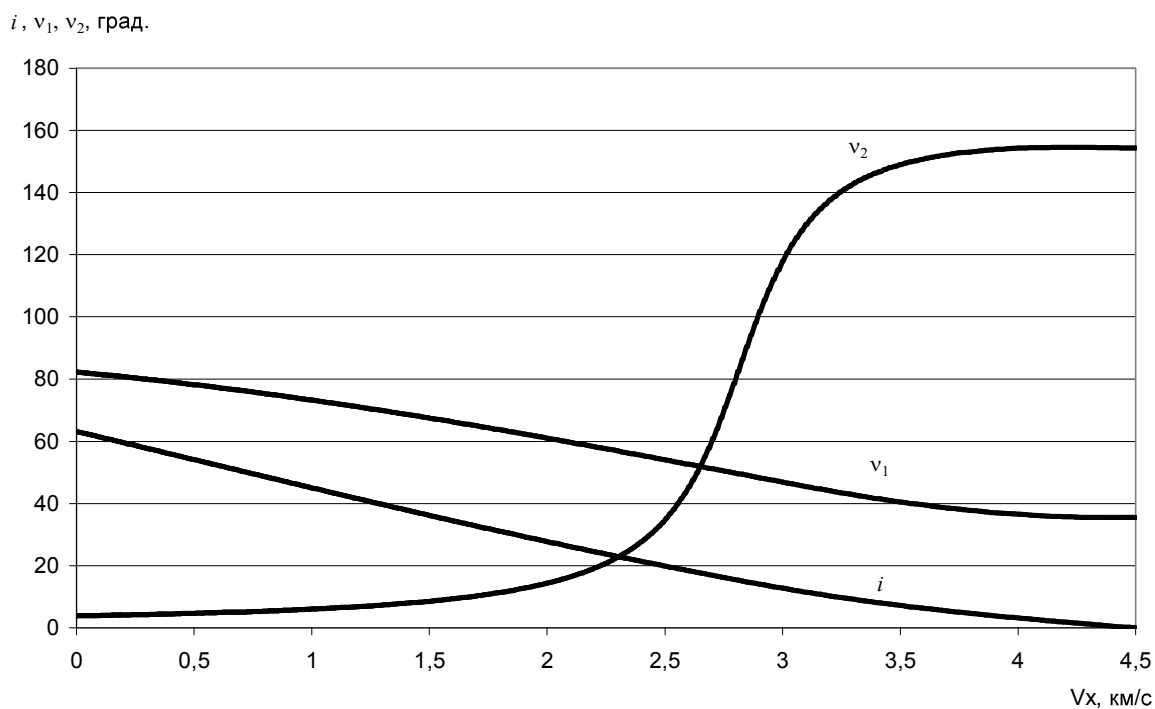


Рис. 2. Зависимости наклона i и углов отклонения вектора тяги от плоскости орбиты v_1, v_2 от затрат характеристической скорости V_x

Для более простого управления, когда угол v_1 остается постоянным на протяжении всего перелёта, а угол v_2 равен нулю до некоторого момента переключения и 180° после переключения, затраты характеристической скорости составляют $V_x = 4,75 \text{ км/с}$, что на 6 % превышает затраты при оптимальном управлении.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что полученная оптимальная программа управления обладает достаточной простотой, что позволит осуществить техническую реализацию управления с контуром обратной связи.

Библиографический список

1. Лебедев, В. Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой [Текст] / В. Н. Лебедев. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – 106 с.
2. Петухов, В. Г. Оптимизация многовитковых перелётов между некомпланарными эллиптическими орбитами [Текст] / В. Г. Петухов // Космические исследования. – 2004. – Т.42, № 3, – С. 260-279.
3. Салмин, В. В., Ишков, С. А., Старина, О. Л. Методы решения вариационных

задач механики космического полета с малой тягой [Текст] / В. В. Салмин, С. А. Ишков, О. Л. Старина. – Самара: Изд-во Самарского научного центра РАН. 2006. – 164 с.

4. Охоцимский, Д. Е., Сихарулидзе, Ю. Г. Основы механики космического полёта [Текст]: Учеб. пособие. / Д. Е. Охоцимский, Ю. Г. Сихарулидзе – М.: Наука. 1990. – 448 с.

References

1. Lebedev, V. N. Calculation of motion of a low-thrust space vehicle [Text] / V.N. Lebedev. - M.: Computer center of the Academy of Sciences, USSR, 1968. - 106 p.
2. Petukhov, V. G. Optimization of multi-orbit transfers between noncoplanar elliptic orbits [Text] / V. G. Petukhov // Kosmicheskie issledovaniya. - 2004. - Vol.42, №3, - PP. 260-279.
3. Salmin, V. V. Methods of solving variational problems of mechanics of low-thrust space flight [Text] / V. V. Salmin, S. A. Ishkov, O. L. Starinova. - Samara: Publishing house of the Samara center of science, RAS. 2006. - 164 p.
4. Okhotsimsky, D. Ye. Basics of space flight mechanics [Text] / D. Ye. Okhotsimsky, Yu. G. Sikharulidze. - M.: Nauka. 1990. - 448 p.

OPTIMAL PROGRAM OF CONTROLLING CONTINUOUS LOW THRUST IN THE FLIGHT BETWEEN NONCOPLANAR ELLIPTICAL AND GEOSTATIONARY ORBITS

© 2011 P. V. Fadeenkov, S. A. Ishkov

Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov
(National Research University)

The paper deals with the problem of creating an optimal program of controlling low-thrust spacecraft in the flight between noncoplanar elliptical and geostationary orbits. A scheme for the joint change of orbital elements within the simple structure of the thrust vector control on the orbit turn is suggested.

Spacecraft, low thrust engine, elliptical orbit, geostationary orbit, optimal control program.

Информация об авторах

Фадеев Павел Васильевич, ассистент кафедры динамики полета и систем управления, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: dinpol@ssau.ru. Область научных интересов: оптимальные законы управления космическими аппаратами.

Ишков Сергей Алексеевич, доктор технических наук, профессор, директор института дополнительного профессионального образования, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: ishkov@ssau.ru. Область научных интересов: оптимальные законы управления космическими аппаратами.

Fadeenkov Pavel Vasilyevich, assistant of the department of flight dynamics and control systems, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), dinpol@ssau.ru. Area of research: laws of optimum control of spacecraft.

Ishkov Sergey Alexeyevitch, professor, doctor of technical science, head of the Institute of supplementary professional education, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), ishkov@ssau.ru. Area of research: laws of optimum control of spacecraft.