

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЁТА ИЗОБРАЖЕНИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ БЕЗДИФРАКЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ, НА ОСНОВЕ ВЫДЕЛЕНИЯ УЗКОГО СПЕКТРАЛЬНОГО КОЛЬЦА

© 2010 И. В. Мухаметгалеев¹, С. Н. Хонина²

¹Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва

(национальный исследовательский университет)

²Институт систем обработки изображений РАН

Рассмотрен итерационный алгоритм расчёта комплексного распределения, распространяющегося в свободном пространстве с сохранением структуры и являющегося аппроксимацией некоторого заданного изображения. Алгоритм основывается на том факте, что все бездифракционные распределения имеют пространственный спектр, сосредоточенный в узкой кольцевой области.

Бездифракционные пучки, разложение по функциям Бесселя, кольцевой пространственный спектр, итерационный алгоритм.

Введение

Самыми известными среди бездифракционных пучков являются моды Бесселя – решение уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах [1, 2]. Также недавно в оптическом сообществе были рассмотрены пучки Матье для эллиптической системы координат [3] и параболические – в параболической системе координат [4], а также обобщающее семейство – пучки Гельмгольца-Гаусса [5].

Повышенный интерес к разработке новых по сравнению с бесселевым решением волнового уравнения связан с огромным успехом бездифракционных пучков в различных приложениях. Значительное увеличение расстояния компактной концентрации пучка (увеличение глубины, протяжённости фокуса) у Бесселевых пучков по сравнению с Гауссовыми используется: при выравнивании и измерении прямолинейности на очень больших расстояниях, при этом бездифракционные пучки демонстрируют гораздо меньшую чувствительность к атмосферной турбулентности, чем другие типы пучков; при формировании изображений протяжённых или движущихся объектов, что особенно актуально в медицине, а также для неразрушающего исследования материалов и устройств; в метрологии – для сканирующих и интерференционных оптических

систем; для одновременного захвата и манипулирования несколькими микрообъектами, разделёнными небольшим расстоянием вдоль оси распространения пучка.

Формирование бездифракционных пучков исторически часто начиналось со спектра, который, как правило, имеет очень компактный вид: т.к. бездифракционные пучки имеют бесконечную поперечную протяжённость, то их спектр стремится к дельта-функции. Примерами могут служить плоские и бесселевы моды: именно с помощью кольцевой щели в спектральной плоскости был физически реализован в схеме Durnip'a бесселевый пучок нулевого порядка [6]. Такая схема является малоэффективной, т.к. через узкую кольцевую щель в экране проходит лишь незначительная часть энергии падающего пучка. Формирование бесселевых пучков с помощью аксиконов [7] или дифракционных оптических элементов (ДОЭ) [8, 9] энергетически значительно выгоднее.

В работах [10-12] был рассмотрен простой способ энергетически эффективно формирования различных бездифракционных лазерных пучков с помощью частичного диафрагмирования кольцевого пространственного спектра. Формировать такой спектр можно с помощью одного фазового ДОЭ [11, 12].

Известный итерационный алгоритм расчёта ДОО для формирования бездифракционных лазерных пучков [13] основан на использовании разложения эталонного изображения по ограниченному набору функций Бесселя.

В данной работе рассмотрен итерационный алгоритм расчёта, позволяющий рассчитывать бездифракционные аппроксимации заданного изображения на основе диафрагмирования пространственного спектра узким кольцом. За счёт варьирования комплексного распределения в спектральном кольце во время итерационного процесса достигается лучшая аппроксимация исходного изображения, чем в итерационном алгоритме, основанном на разложении по функциям Бесселя. Также разработанный алгоритм позволяет находить компромиссное решение между точностью аппроксимации эталона и расстоянием сопротивления сформированного пучка эффектам дифракции.

Описание итерационного алгоритма

В работе [13] был рассмотрен итерационный алгоритм расчёта ДОО для формирования бездифракционных лазерных пучков, основанный на использовании разложения эталонного изображения по ограниченному набору функций Бесселя. При разложении заданного изображения $A(r, \theta)$ по функциям Бесселя $J_m(r)$ с одинаковым параметром θ , который соответствует радиусу узкого кольца в Фурье-спектре, получается аппроксимация эталонного изображения $f(r, \theta)$. Затем используется следующий итерационный алгоритм:

$$C_m^{(k+1)}(r, \theta) = \arg \left\{ \sum_{m=-M}^M C_m^{(k)} J_m(r) \exp(-im\theta) \right\}, \quad (1)$$

$$C_m^{(k)} = A_m \int_0^R \int_0^{2\pi} f^{(k)}(r, \theta) J_m(r) \times \exp(im\theta) \cdot r dr d\theta, \quad (2)$$

где k – номер итерации, $k \in [0, K]$.

В таком алгоритме точность аппроксимации зависит от числа членов в конечной сумме (1) и выбранного параметра бесселевых функций θ , который определяет радиус узкого кольцевого пространственного спектра функций Бесселя. Свободными параметрами, обеспечивающими сходимость итерационного процесса, являются комплексные коэффициенты разложения.

В данной работе предлагается иной алгоритм итерационного расчёта, в котором аппроксимация некоторого изображения, заданного амплитудой $A(x, y)$, также зависит от радиуса выбираемого в спектре кольца, но не зависит от числа членов разложения.

Для расчёта бездифракционных распределений используется последовательность этапов расчёта, представленная в блок-схеме (рис. 1). На этапе 1 осуществляется считывание входных данных алгоритма. Входное распределение амплитуды $A(x, y)$ в объектной плоскости, представляющее собой заданное изображение, может задаваться как программно, так и считываться из файла. Значение фазы в объектной плоскости (x, y) на первом шаге выбирается либо случайным, либо задаётся из определенных соотношений, например, используется вихревая зависимость $(x, y) = m \arctg(y/x)$, m – целое. На следующих итерациях фаза в объектной плоскости, являясь свободным параметром, обеспечивает сходимость итерационного процесса. Также свободным параметром является распределение в узком кольце пространственного спектра. Очевидно, что в таком алгоритме число степеней свободы можно легко увеличивать за счёт увеличения числа отсчётов в объектной плоскости и в пространственном кольце. Это значительно проще, чем увеличивать число членов разложения в (1).

Блок-схема предлагаемого алгоритма приведена на рис. 1.

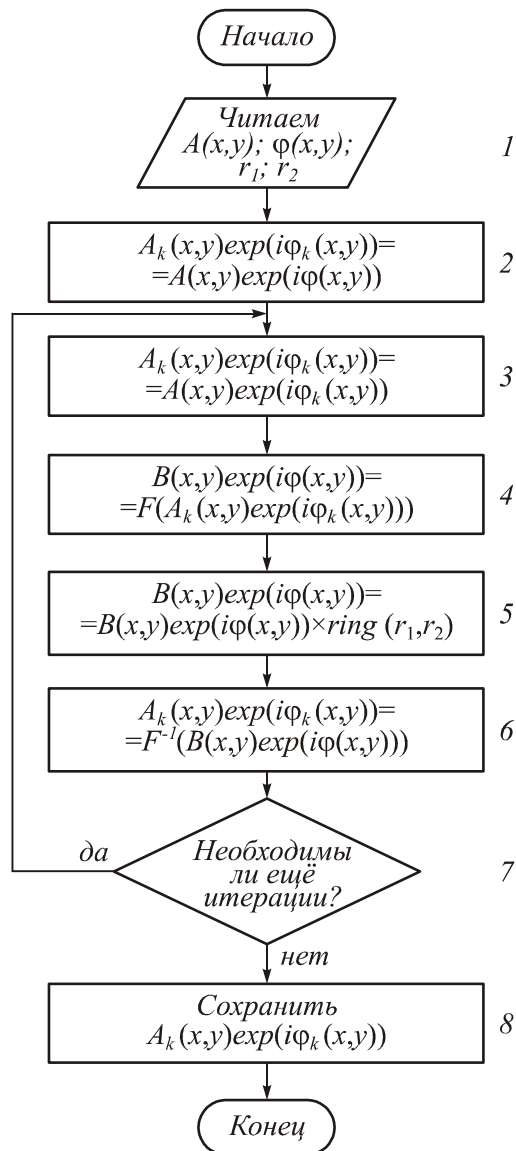


Рис. 1. Блок-схема алгоритма

Варьируемыми параметрами алгоритма являются радиусы спектрального кольца: внутренний (r_1) и внешний (r_2). На втором этапе осуществляется инициализация данных для начала работы итерационного процесса. Этап 3 является первым в итерационном процессе, на нём осуществляется замена амплитуды комплексного распределения в объектной плоскости эталонным значением амплитуды. На 4 этапе осуществляется переход в спектральную плоскость. На 5 этапе в спектральной плоскости вырезается кольцо с радиусами r_1 и r_2 , т.е. значения вне этого кольца обнуляются. 6 этап – последний этап в итерационной процедуре, который состоит в выполнении обратного преоб-

ращения Фурье вырезанного (кольцевого) спектра. Принятие решения об окончании процесса (7 на блок-схеме) может выполняться интерактивно, заданием числа итераций или достижением некоторого критерия, например, уровня среднеквадратичного отклонения.

Действие алгоритма основано на следующем факте: если вся энергия Фурье-спектра расположена на окружности, то распределение является бездифракционным [11]. Т.к. спектр «обычных» изображений как правило низкочастотный (основная энергия сосредоточена в нулевой частоте), то выбор того или иного радиуса спектрального кольца выполняется эмпирически: с одной стороны, чем больше радиус, тем больше степеней свободы для итерационного процесса, но с другой стороны, тем меньше корреляция с реальным спектром заданного изображения. Из приведённых рассуждений следует, что изображения, имеющие множество мелких деталей, будут более «удачными» для бездифракционной аппроксимации.

Очевидно, что алгоритм является затратным по времени ввиду многократных операций (их количество равно $2K$) преобразований Фурье. Но эта проблема решается использованием алгоритма БПФ.

Сравнение алгоритмов

В данном разделе проведено сравнение разработанного итерационного алгоритма, основанного на выделении кольцевого спектра, с алгоритмом разложения по функциям Бесселя (1)-(2).

Результаты аппроксимации изображения «квадрат» (рис. 2а) различными алгоритмами показаны на рис. 2.

Алгоритм (1)-(2) был использован дважды: для случая, когда количество итераций равно $K = 1$ (соответствует разложению эталона по функциям Бесселя), при этом в сумме (1) использовалось $2M + 1 = 141$ членов и был использован параметр $= 5 \text{ мм}^{-1}$ (рис. 2б). Также этот алгоритм был использован с количеством итераций $K = 30$, с тем же числом членов в сумме (1) и параметром бesselевых функций $= 54 \text{ мм}^{-1}$ (рис. 2в).

При расчёте комплексной функции пропускания бездифракционного изображения по алгоритму, использующему спектральное кольцо, было выполнено 100 итераций (рис. 2г). Из рис. 2 видно, что предлагаемый алгоритм позволяет получить более близкую аппроксимацию, чем разложение по бесселевым функциям.

При расчете использовались эталонные изображения размером 512×512 пикселей и производилось 30 итераций согласно алгоритму. Из табл. 1 видно, что алгоритм действительно позволяет получать аппроксимацию исходного распределения, при этом сходимость (графики на рис. 3) для изображений с более мелкими деталями лучше, чем для «обычных».

Исследование работы алгоритма

В табл. 1 представлены результаты применения алгоритма для различных

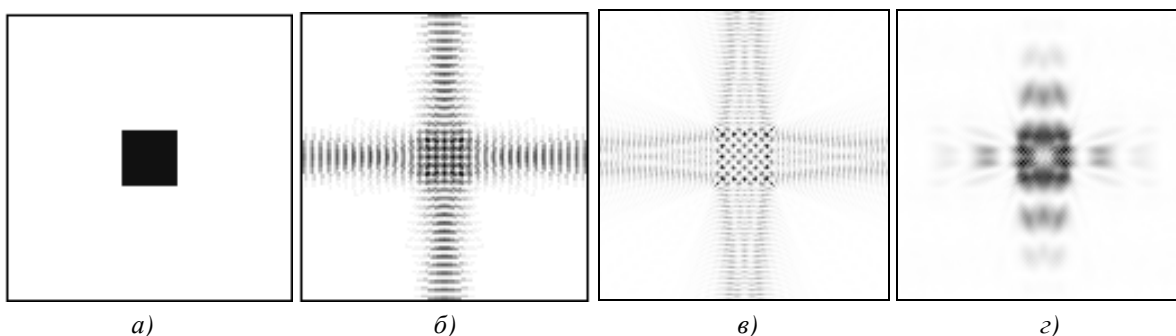


Рис. 2. Результаты аппроксимации заданного изображения (а) с помощью различных алгоритмов для расчёта бездифракционных пучков: при использовании разложения по функциям Бесселя (б) и (в), на основе выделения узкого спектрального кольца (г)

Таблица 1. Результат работы предлагаемого алгоритма над различными типами изображений

Эталон (интенсивность и фаза)		Спектр в конце итераций (интенсивность и фаза)		Бездифракционное изображение (интенсивность, фаза, СКО)	
					 =54,84%
					 =37,46%
					 =37,45%

В табл. 2 показано распространение рассчитанных бездифракционных пучков, аппроксимирующих в поперечном сечении заданное изображение. Видно, что до некоторого расстояния пучки сохраняют структуру заданного изображения, затем эта структура разрушается. В дальней зоне

($z = \infty$) интенсивность пучка принимает вид спектра.

Очевидно, что сходимость алгоритма улучшится при увеличении числа степеней свободы, в частности, при увеличении числа отсчётов, что подтверждают результаты расчётов, приведенные в табл. 3.

Таблица 2. Распространение бездифракционных изображений

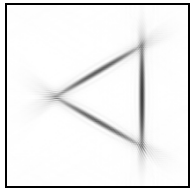
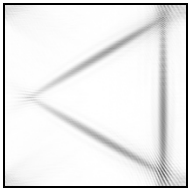
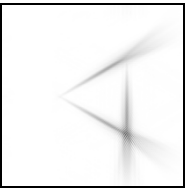
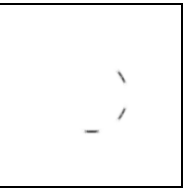
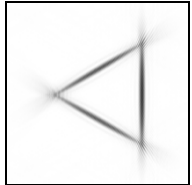
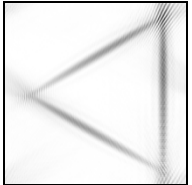
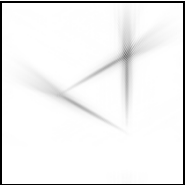
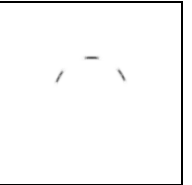
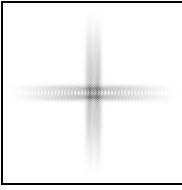
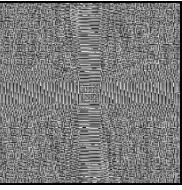
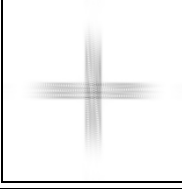
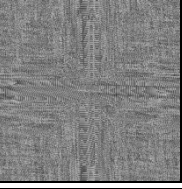
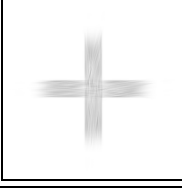
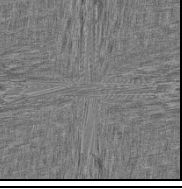
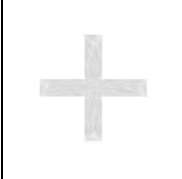
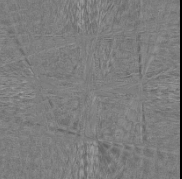
Начальная фаза	Интенсивность			
	$Z = 0$	$Z = 30$ мм	$Z = 65$ мм	$Z = \infty$
Случайная				
Сингулярная				

Таблица 3. Зависимость погрешности аппроксимации от размера эталонного изображения «крест»

Размер изображения	Бездифракционная аппроксимация (фаза, интенсивность)	Количество итераций, СКО
256×256	 	$K = 30;$ $=50\%$
512×512	 	$K = 60;$ $=31,6\%$
1024×1024	 	$K = 100;$ $=28,25\%$
2048×2048	 	$K = 100;$ $=23,08\%$

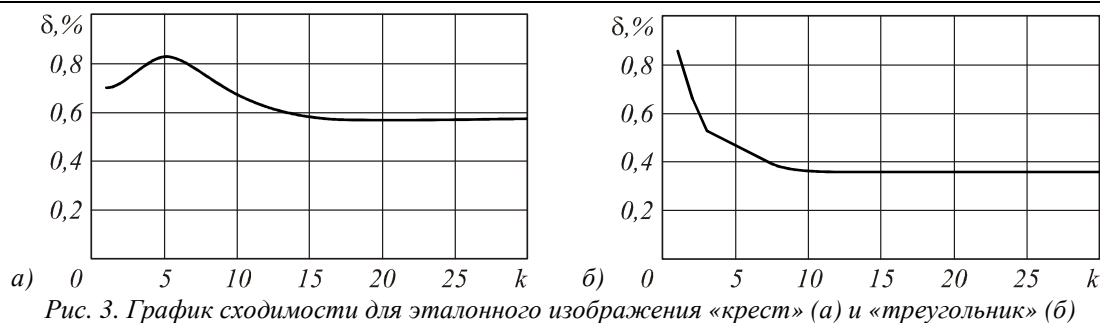
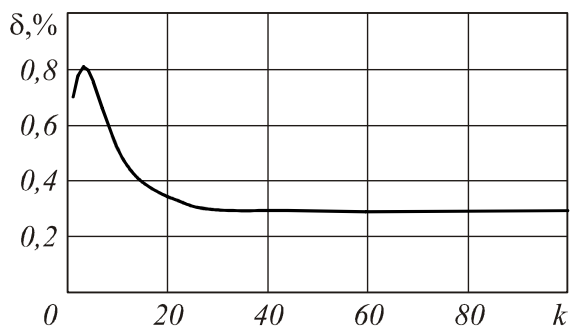


Рис. 3. График сходимости для эталонного изображения «крест» (а) и «треугольник» (б)

На рис. 4 показан график сходимости алгоритма при использовании эталонного изображения размером 2048×2048 – видно, что после 30 итераций алгоритм вошёл в стагнацию и для дальнейшего уменьшения погрешности аппроксимации эталонного изображения необходимо использовать другие возможности увеличения степени свободы, в частности, увеличение ширины спектрального кольца. При этом нужно иметь в виду ухудшение бездифракционных свойств формируемых пучков.

Рис. 4. Зависимость погрешности от номера итерации алгоритма для изображения «крест» размером 2048×2048 пикселей

Исследование зависимости погрешности от толщины кольца производилось для изображения «треугольник» размером 512×512 пикселей, со случайно сгенерированной фазой. При этом радиусы колец варьировались от 20 до 240 пикселей с шагом в 20 пикселей. Из рис. 5 видно, что чем больше размер кольца, тем меньше погрешность аппроксимации заданного изображения, что объясняется большим числом отсчётов, попадающих в кольцо, и как следствие, большим числом степеней свободы.

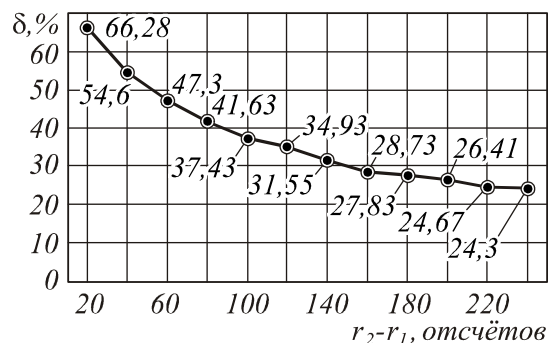


Рис. 5. График зависимости погрешности алгоритма от размера спектрального кольца

Заключение

В работе предложен итерационный алгоритм расчёта бездифракционных лазерных пучков, аппроксимирующих в поперечном сечении заданное амплитудное распределение, основанный на диафрагмировании пространственного спектра узким кольцом. Алгоритм отличается от существующих итерационных алгоритмов гибкостью в достижении компромисса между качеством аппроксимации эталонного изображения и бездифракционными свойствами сформированного изображения. При этом качество аппроксимации оказывается лучше, чем при использовании известного алгоритма разложения по функциям Бесселя. Такой результат достигается за счёт того, что фактически в итерационный процесс включаются всевозможные бездифракционные распределения, которые позволяют получить лучшее качество аппроксимации. Параметры спектрального кольца являются основными варьируемыми параметрами при использовании алгоритма. В работе были получены следующие закономерности:

- увеличение числа отсчётов обеспечивает увеличение степеней свободы, что

положительно сказывается на всех характеристиках алгоритма;

– увеличение толщины спектрального кольца при неизменном внутреннем радиусе позволяет получить лучшую аппроксимацию эталонного изображения, но при этом сокращается расстояние бездифракционного распространения сформированного пучка;

– увеличение радиуса кольца позволяет улучшать аппроксимацию исходного изображения без ухудшения бездифракционных характеристик пучка, если заданное изображение имеет много мелких деталей.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF PG08-014-1), грантов РФФИ 10-07-00109-а, 10-07-00438-а и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-7414.2010.9.

Библиографический список

1. **Durnin, J.** Diffraction-free beams [Text] / J. Durnin, J.J. Miceli, and J.H. Eberly // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – V. 58, N 15. – P. 1499-1501.
2. **Ziolkowski, R.W.** Aperture realizations of exact solutions to homogeneous-wave equations [Text] / R.W. Ziolkowski, I.M. Besieris and A.M. Shaarawi // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1993. – V. 10, N 1. – P. 75-87.
3. **Gutierrez-Vega, J.C.** Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams [Text] / J.C. Gutierrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo and S. Chavez-Cerda // *Opt. Lett.* – 2000. – V. 25, N 20. – P. 1493–1495.
4. **Bandres, M.A.** Parabolic nondiffracting optical wave fields [Text] / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega and S. Chavez-Cerda // *Opt. Lett.* – 2004. – V. 29, N 1. – P. 44–46.
5. **Gutierrez-Vega, J.C.** Helmholtz-Gauss waves [Text] / J.C. Gutierrez-Vega and M.A. Bandres // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2005. – Vol. 22, N 2. – P. 289-298.
6. **Durnin, J.** Exact solutions for non-diffracting beams. I. The scalar theory [Text] / J. Durnin // *J. Opt. Soc. Am. A.* – V. 4, N 4. – P. 651–654.
7. **McLeod, J.H.** The axicon: a new type of optical element [Text] / J.H. McLeod // *J. Opt. Soc. Am.* – 1954. – V. 44. – P. 592-597.
8. **Vasara, A.** Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms [Text] / A. Vasara, J. Turunen and A.T. Friberg // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1989. – V. 6. – P. 1748-1754.
9. **Khonina, S.N.** The phase rotor filter [Text] / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, M.V. Shinkaryev, V.A. Soifer and G.V. Uspleniev // *J. Mod. Opt.* – 1992. – V. 39. – P. 1147-1154.
10. **Anguiano-Morales, M.** Different field distributions obtained with an axicon and an amplitude mask [Text] / M. Anguiano-Morales, A. Martinez, M.D. Iturbe-Castillo, S. Chavez-Cerda // *Optics Communications.* – 2008. – V. 281. – P. 401-407.
11. **Хонина, С.Н.** Простой способ эффективного формирования различных бездифракционных лазерных пучков [Текст] / С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика.* – 2009. – V. 33, N 1. – С. 70-78.
12. **Хонина, С.Н.** Экспериментальное формирование различных бездифракционных лазерных пучков на основе дифрагирования вихревого кольцевого пространственного спектра [Текст] / С.Н. Хонина, Р.В. Скиданов, А.А. Морозов // *Известия Самарского научного центра РАН.* – 2009. – V. 11, N 3. – С. 103-110.
13. **Kotlyar, V.V.** Calculation of phase formers of non-diffracting images and a set of concentric rings [Text] / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Optik.* – 1996. – V. 102(2). – P. 45-50.

References

1. **Durnin, J.** Diffraction-free beams [Text] / J. Durnin, J.J. Miceli and J.H. Eberly // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 58, N 15. – P. 1499-1501.
2. **Ziolkowski, R.W.** Aperture realizations of exact solutions to homogeneous-wave equations [Text] / R.W. Ziolkowski, I.M. Besieris and A.M. Shaarawi // J. Opt. Soc. Am. A. – 1993. – V. 10, N 1. – P. 75-87.
3. **Gutierrez-Vega, J.C.** Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams [Text] / J.C. Gutierrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo and S. Chavez-Cerda // Opt. Lett. – 2000. – V. 25, N 20. – P. 1493-1495.
4. **Bandres, M.A.** Parabolic nondiffracting optical wave fields [Text] / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega and S. Chavez-Cerda // Opt. Lett. – 2004. – V. 29, N 1. – P. 44-46.
5. **Gutierrez-Vega, J.C.** Helmholtz-Gauss waves [Text] / J.C. Gutierrez-Vega and M.A. Bandres // J. Opt. Soc. Am. A. – 2005. – Vol. 22, N 2. – P. 289-298.
6. **Durnin, J.** Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory [Text] / J. Durnin // J. Opt. Soc. Am. A. – V. 4, N 4. – P. 651-654.
7. **McLeod, J.H.** The axicon: a new type of optical element [Text] / J.H. McLeod // J. Opt. Soc. Am. – 1954. – V. 44. – P. 592-597.
8. **Vasara, A.** Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms [Text] / A. Vasara, J. Turunen and A.T. Friberg // J. Opt. Soc. Am. A. – 1989. – V. 6. – P. 1748-1754.
9. **Khonina, S.N.** The phase rotor filter [Text] / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, M.V. Shinayev, V.A. Soifer and G.V. Uspleniev // J. Mod. Opt. – 1992. – V. 39. – P. 1147-1154.
10. **Anguiano-Morales, M.** Different field distributions obtained with an axicon and an amplitude mask [Text] / M. Anguiano-Morales, A. Martinez, M.D. Iturbe-Castillo, S. Chavez-Cerda // Optics Communications. – 2008. – V. 281. – P. 401-407.
11. **Khonina, S.N.** Simple way for effective formation various nondiffractive laser beams [Text] / S.N. Khonina // Computer optics. – 2009. – V. 33, N 1. – P. 70-78. – [in Russian].
12. **Khonina, S.N.** Experimental generation various nondiffractive laser beams by masking the vortical ring spatial spectrum [Text] / S.N. Khonina, R.V. Skidanov, A.A. Morozov // Izvest. SNC RAS. – 2009. – V. 11, N 3. – P. 103-110. – [in Russian].
13. **Kotlyar, V.V.** Calculation of phase formers of non-diffracting images and a set of concentric rings [Text] / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // Optik. – 1996. – V. 102(2). – P. 45-50.

ITERATIVE ALGORITHM FOR CALCULATION OF THE NON-DIFFRACTIVE IMAGES USING OF THE NARROW SPECTRAL RING

© 2010 I.V. Mukhametgaleev¹, S.N. Khonina²

¹Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov
(National Research University)

²Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences

The iterative algorithm of calculation of the complex distribution propagating in free space with preservation of structure and being approximation of a given image is considered. The algorithm is based on that fact, that all non-diffractive distributions have the spatial spectrum concentrated in narrow ring area.

Nondiffractive beams, expansion by Bessel functions, annular spatial spectrum, iterative algorithm.

Информация об авторах

Мухаметгалеев Ильдар Вазыхович, студент. Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: im@itv.ru.

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник. Институт систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений. E-mail: khonina@smr.ru.

Mukhametgaleev Ildar Vazykhovich, student. Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: im@itv.ru.

Khonina Svetlana Nikolaevna, doctor of physical and mathematical Sciences, professor, leading researcher. Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences. Area of research: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: khonina@smr.ru.