

УДК 532.527:536.42

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ С ГРАДИЕНТОМ ПЛОТНОСТИ

© 2013 Д. А. Анчиков, В. А. Гусев, И. П. Завершинский,
В. Г. Макарян, С. С. Сугак

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Исследована устойчивость аксиально симметричного стационарного несжимаемого закрученного течения с радиальным скачком плотности относительно малых спиральных возмущений. Получены зависимости частоты и инкремента возмущений от параметра закрутки, аксиального волнового числа и скачка плотности газа. Показано, что частота возмущения увеличивается, а его инкремент уменьшается с увеличением градиента плотности среды.

Закрученный поток, дисперсия, неустойчивость.

Исследованию устойчивости вихревых течений различного типа посвящено весьма значительное число работ, что связано как с наличием большого количества прикладных задач, так и с фундаментальными проблемами, так как развитие неустойчивостей приводит к формированию сложной нелинейной структуры потока, в частности, к формированию крупномасштабных структур, например, прецессирующего вихревого ядра [1–3]. Известно, что в вихревых течениях могут развиваться три основных типа неустойчивостей: Кельвина–Гельмгольца, связанная с наличием градиента скорости потока; центробежная, связанная с наличием скачка азимутальной скорости; Релея–Тейлора, возникающая при наличии скачка плотности течения. Устойчивость гомогенных вихревых течений исследована довольно подробно. В работах [4, 5] были получены и численно проанализированы дисперсионные соотношения для бесконечно малых возмущений вихря Рэнкина с аксиальными течениями в радиально-неограниченной несжимаемой невязкой среде постоянной плотности. Показано, что дисперсионные кривые имеют вид, характерный для волн отрицательной энергии [6], так что при ненулевой закрутке в докритической области значений волновых чисел существуют две

нейтрально устойчивые волны, а в сверхкритической области – неустойчивая волна. В частности, показано, что частота возмущений растёт с ростом массового расхода и параметра закрутки потока. При этом закрутка имеет стабилизирующий эффект. В работах [7–9] исследовалась устойчивость вихря с квазитвёрдым вращением с осевым течением в радиально-ограниченной несжимаемой невязкой среде с постоянной плотностью. Показано, что увеличение аксиального числа Рейнольдса уменьшает параметр закрутки, необходимый для дестабилизации потока. Построены кривые нейтральной устойчивости, определены критические значения чисел Рейнольдса и параметра закрутки, проведено сравнение с экспериментами. Так же, как и для течений типа свободного вихря, наиболее неустойчивой оказалась мода при $m = -1$. В ряде работ, в частности в [10, 11], исследована устойчивость непрерывных вихревых потоков. Для вихря Бетчелора было показано, что инкремент для отрицательных спиральных мод намного больше, чем для положительных мод с тем же значением $|m|$. Влияние крутки на устойчивость является немонотонным, и для каждой азимутальной моды предельное значение инкремента достигается при определённых значениях параметра S . Другим важным выво-

дом этих работ является то, что вихрь Бэтчелора устойчив относительно линейных возмущений при достаточно сильной закрутке. Тем самым вихрь Бэтчелора отличается от вихря Рэнкина с аксиальным потоком, неустойчивым при любых значениях крутки.

Значительно меньшее внимание уделялось исследованию устойчивости закрученных потоков с непостоянной плотностью, которые обычно возникают в технических устройствах с источниками тепловыделения, таких как авиационные двигатели, плазмодинамические установки, вихревые камеры с горением и т.д. [1–3]. В работе [12] изучалась устойчивость вихря Рэнкина со скачком азимутальной скорости в несжимаемой невязкой радиально-неограниченной среде со скачком плотности. Найдено дисперсионное соотношение для осесимметричной и спиральных мод. Это соотношение исследовано в коротковолновом и длинноволновом пределах. Найдены условия неустойчивости возмущений. Рассмотрен ряд частных случаев для профилей основного потока, а также волны Кельвина, для которых показано, что инкремент стремится к нулю при нулевой плотности во внутренней области (полый вихрь), что соответствует результатам работ [1–3]. В работе [13] найдены дисперсионные соотношения для малых гармонических возмущений вихря Рэнкина со скачком угловой скорости и кусочно-потенциального вихря в несжимаемой невязкой радиально-ограниченной среде со скачком плотности. Найдено дисперсионное соотношение. Дальнейшие исследования, проведенные в [13], касались в основном осесимметричной моды при $m = 0$. Для осесимметричной и высших мод были получены выражения для границ абсолютной и конвективной неустойчивостей. В работе [14] рассмотрена устойчивость уединённого вихря Бэтчелора с градиентом плотности потока.

В связи с этим в данной работе проведено детальное исследование устойчивости радиально-симметричного стационарного

состояния закрученного течения Рэнкина:

$$\begin{aligned} v_{r0} &= 0, \quad v_{j0} = v_j(r), \quad v_{z0} = v_{z0}(r), \\ r_0 &= r_0(r), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} v_{r0} &= 0, \quad v_{j0} = \begin{cases} Wr, & r < R_0 \\ \frac{WR_0^2}{r}, & r > R_0 \end{cases}, \\ v_{z0} &= \begin{cases} v_1, & r < R_0 \\ v_2, & r > R_0 \end{cases}, \quad r_0 = \begin{cases} r_1, & r \leq R_0 \\ r_2, & r > R_0 \end{cases}. \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что аппроксимация реального профиля тангенциальной скорости с использованием модели квазитвёрдого вращения также даёт неплохое согласие с экспериментальными данными.

Используя в пределе малых чисел Маха ($M \ll 1$) модель несжимаемого течения для возмущений течения (1), (2) вида $\hat{v}_{rj;z} = \hat{v}_{rj;z0} e^{i(kz+mj-wt)}$, $P = \hat{P} e^{i(kz+mj-wt)}$ и т.д., из уравнений Эйлера в невязком приближении во внутренней области $0 < r < R_0$ приходим к уравнению Бесселя:

$$r^2 \hat{P}'' + r \hat{P}' + (b_1^2 r^2 - m^2) \hat{P} = 0. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид $\hat{P} = A_1 J_m(b_1 r) + A_2 N_m(b_1 r)$, где J_m и N_m – функции Бесселя и Неймана, $w_1 = w - mW - kv_1$ – частота возмущения, k – волновое число, $b_1^2 = k^2(4W^2 w_1^{-2} - 1)$. Собственные функции уравнения (3) имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{v}_r &= \frac{iA_1 k^2}{r_1 w_1 b_1^2} \left(b_1 J_m'(b_1 r) - \frac{2mW}{r w_1} J_m(b_1 r) \right) + \\ &+ \frac{iA_2 k^2}{r_1 w_1 b_1^2} \left(b_1 N_m'(b_1 r) - \frac{2mW}{r w_1} N_m(b_1 r) \right) \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$J_m'(b_1 r) = dJ_m(x)/dx|_{x=b_1 r},$$

$$N_m'(b_1 r) = dN_m(x)/dx|_{x=b_1 r}.$$

Во внешней области ($R_0 < r < R$) поток незакрученный, и можно определить потенциал j , так что $\dot{v} = \nabla j$ при $j = j e^{i(kz+mj-wt)}$. Собственные функции описываются уравнением Гельмгольца ($Dj = 0$), которое для радиальной части возмущений $j(r)$ сводится к виду:

$$r^2 j'' + r j' - (k^2 r^2 + m^2) j = 0. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид $j = B_1 I_m(kr) + B_2 K_m(kr)$, где I_m и K_m – модифицированные функции Бесселя. Возмущения давления и радиальной скорости в этой области имеют вид:

$$\begin{aligned} p &= i r_2 \left(w - \frac{m \Omega R_0^2}{r^2} - k v_2 \right) \times \\ &\times (B_1 I_m(kr) + B_2 K_m(kr)) \\ v_r &= B_1 I'_m(kr) + B_2 K'_m(kr). \end{aligned} \quad (6)$$

Эти решения должны быть сшиты при $r = R_0$. Соответствующие кинематическое и динамическое граничные условия имеют вид [1, 4, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{v_r(R_0-0)}{w_1} &= \frac{v_r(R_0+0)}{w_2} = i h, \\ h \left(\frac{dp_0}{dr} \Big|_{R_0+0} - \frac{dp_0}{dr} \Big|_{R_0-0} \right) &+ p(R_0+0) - p(R_0-0) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме того, возмущения должны быть ограничены на оси потока, а на стенке должно выполняться условие прилипания: $j'(R) = 0$.

Соотношения (4), (6), (7) приводят к дисперсионному соотношению вида:

$$S^2(1-Q) + \frac{w_2^2}{k} \frac{K_m(k) - a I_m(k)}{K_m'(k) - a I_m'(k)} + Q \frac{w_1^2 b_1^2}{X k^2} = 0, \quad (8)$$

где

$$X = b_1 J_m'(b_1) / J_m(b_1) - 2mS / w_1,$$

$$a = K_m(Kk) / I_m(Kk),$$

$$K_m'(x) = dK_m(x) / dx|_{x=kr},$$

$$k = kR_0,$$

$$b = bR_0,$$

$$w = R_0 w / v_2,$$

$$S = R_0 W / v_2 \quad - \text{ параметр закрутки,}$$

$$a = v_1 / v_2 \quad - \text{ отношение аксиальных скоростей,}$$

$$Q = r_1 / r_2 > 0 \quad - \text{ отношение плотностей,}$$

$$K = R / R_0 > 1 \quad - \text{ параметр конфайнмента,}$$

$$w_2 = w - mW - k v_2.$$

На рис. 1 приведена используемая далее классификация различных типов аксиальных потоков в зависимости от величины параметра $a = v_1/v_2$. Наибольшее внимание далее уделялось исследованию устойчивости сильнозакрученных потоков, соответствующих значениям параметра $a < 0$, когда формируется течение типа следа с осевым противотоком. Слабозакрученным течениям соответствует область $0 < a < 1$, где формируется след со спутным потоком. При $a > 1$ реализуется прямое течение.

Для получения явных зависимостей действительной и мнимой частей частоты возмущений от волнового числа уравнение (8) решалось численно. Значения величин, используемые при расчётах, в основном соответствовали экспериментальным данным [15].

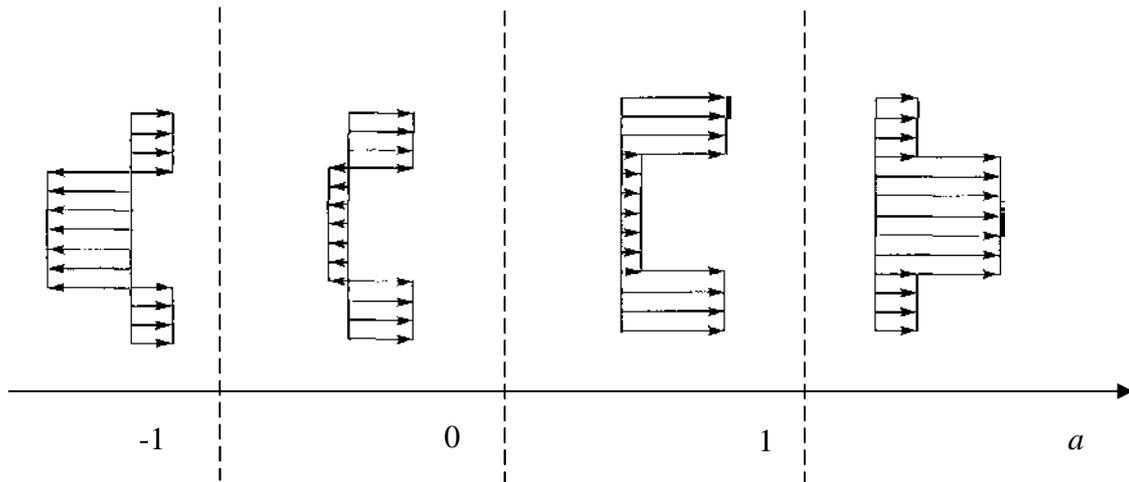


Рис. 1. Характерные профили осевой скорости, типичные для закрученных течений в зависимости от параметра $a = v_1/v_2$

На рис. 2 представлены зависимости действительной и мнимой частей частоты возмущения от волнового числа $Re[w(k)]$ и $Im[w(k)]$ для вихревых мод для различных значений азимутальных волновых чисел m при фиксированном параметре закрутки $a = -0,4$, параметре конфинмента $K = 2,5$ и значениях параметра Q в диапазоне $0,2 < Q < 1,0$. Полученные зависимости по форме совпадают с известными [4, 5, 13]. Анализ дисперсионных соотношений показывает, что в диапазоне значений волнового числа $k < k_c(Q)$ возможно существование двух типов нейтральных мод с $Im(w) = 0$, соответствующих верхней и нижней ветвям зависимости частоты от волнового числа, так называемых быстрой и медленной волн [1, 4, 5]. При $k > k_c(Q)$ существует неустойчивая мода с $Im(w) > 0$. Отметим, что приведённые зависимости по форме соответствуют полученным в [4, 5]. В частности, для коротких волн ($k \gg 1$) в пределе $b_l \gg 1$ при выполнении условия $k(K-1) \gg 1$ дисперсионное соотношение (8) для фазовой скорости возмущения $c = w/k$ редуцируется к виду:

$$c_{1;2} = \frac{1 + aQ}{1 + Q} \pm i(1 - a) \frac{\sqrt{Q}}{1 + Q}.$$

Из этого выражения видно, что в данном диапазоне отсутствует дисперсия спиральных волн, что полностью под-

тверждается результатами расчёта при $k \gg 1$.

Как следует из представленных рисунков, наибольшим инкрементом среди азимутальных мод обладает изгибная мода с азимутальным волновым числом $m = +1$. Этот результат существенно отличается от результатов [4, 5] для однородного течения, где наиболее неустойчивой азимутальной модой являлась изгибная мода с азимутальным волновым числом $m = -1$. Отметим, что идентификация наиболее неустойчивой моды в турбулентном закрученном потоке в прямой открытой трубе с аксиально симметричным источником тепловыделения проводилась в [16] с использованием системы Навье–Стокса. Снималась зависимость параметров потока от времени. К полученным данным применялось быстрое преобразование Фурье, реализованное в пакете Matlab, и строились спектры колебаний газодинамических величин. Наличие колебаний тангенциальной скорости на оси трубки показало, что наблюдаемая прецессия вихревого ядра связана с развитием неустойчивости изгибной моды с $|m|=1$, так как только она возмущает тангенциальную скорость на оси потока. Наконец, расчёты показали, что направление вращения ядра совпадает с направлением вращения основного потока, а ось винта закручена против основного течения.

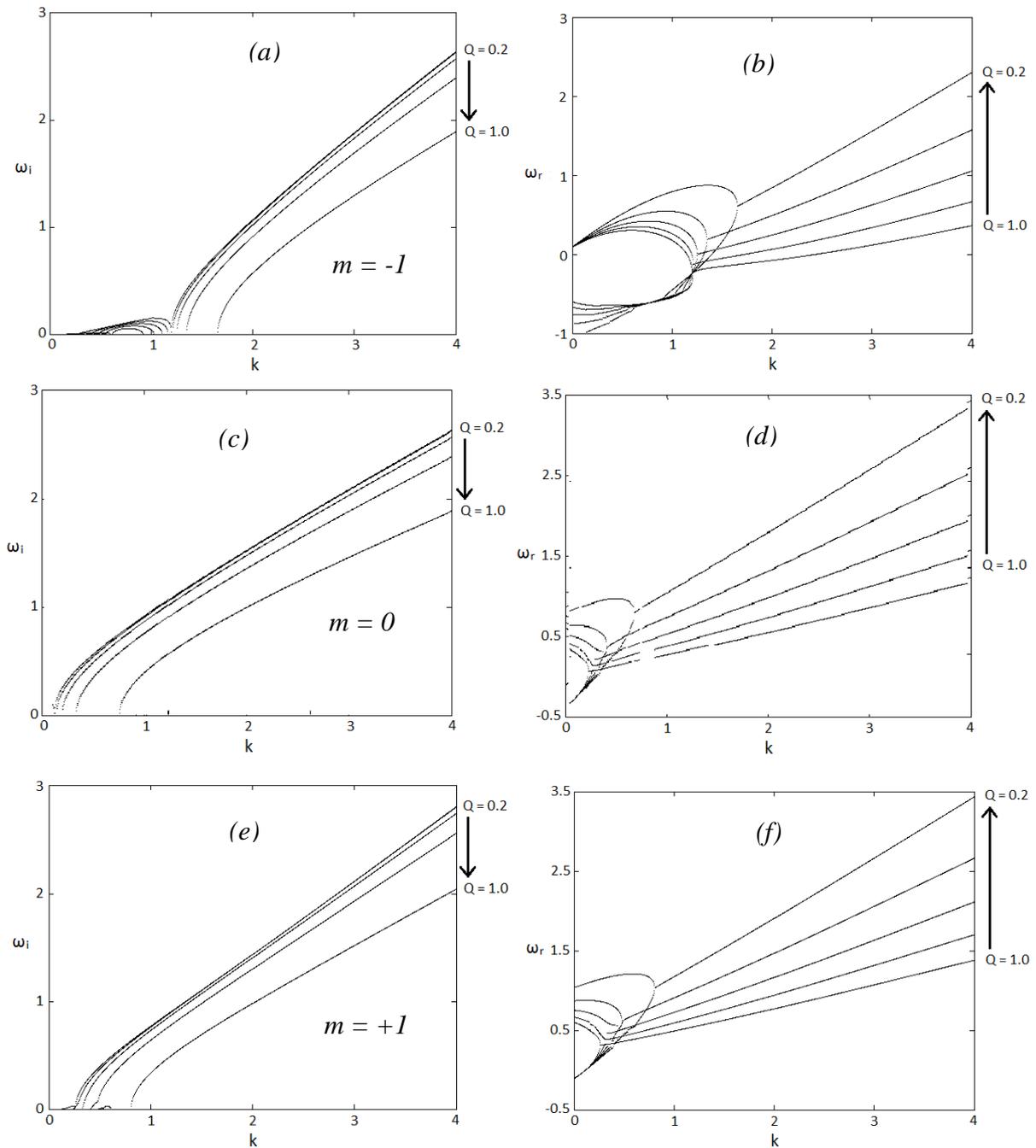


Рис. 2. Мнимая (a), (c), (e) и действительная (b), (d), (f) части частоты возмущений в зависимости от волнового числа k для параметра закрутки $S=0,6$ при различных азимутальных волновых числах m и значениях параметра Q

Важно отметить, что частота возмущения растёт, а инкремент возмущений падает с уменьшением параметра Q . Этот результат также качественно совпадает с результатами работы [16], где было показано, что частота возмущения растёт, а инкремент возмущений падает с ростом мощности источника нагрева. Заметим, что уменьшение параметра Q , соответ-

ствующее в реальных условиях увеличению мощности нагрева, вызывает нелинейное уменьшение инкремента и уширение области нейтральной устойчивости при малых значениях Q , но в любом случае течение остается неустойчивым. Уменьшение амплитуды колебаний вихревого ядра с ростом мощности источника также наблюдалось в [16]. Явление подав-

ления ПВЯ горением в ряде режимов известно давно [1]. Интересно отметить, что полученные в данной работе зависимости частоты прецессии от мощности источника подобны зависимостям частоты прецессии от массового расхода газовой фазы для газожидкостных потоков [17].

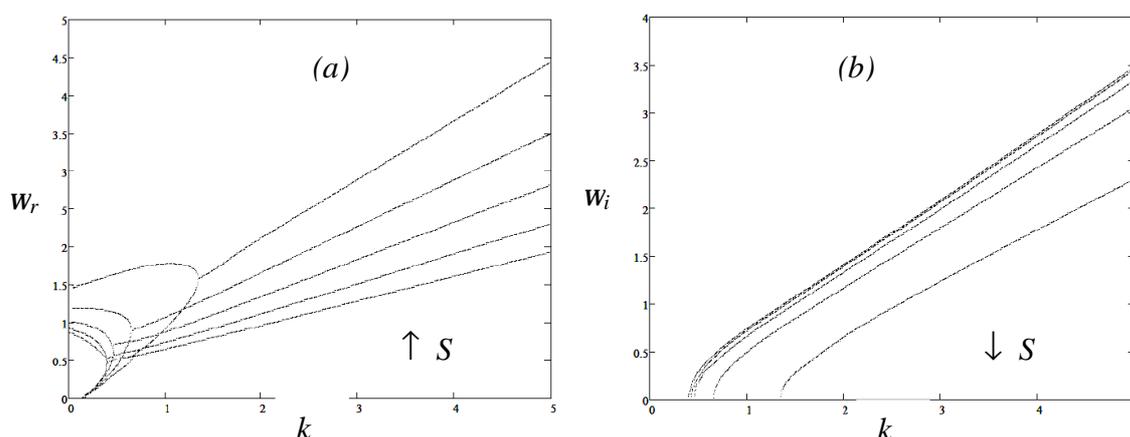


Рис. 3. Действительная (а) и мнимая (б) части частоты возмущений в зависимости от волнового числа k при различных значениях параметра закрутки S

Таким образом, в работе исследована устойчивость вихревых потоков в открытых трубках с радиальными скачками плотности среды. Найдены зависимости частоты возмущений от параметра закрутки, азимутального волнового числа и скачка плотности газа. Показано качественное соответствие результатов работы с экспериментальными результатами [15, 17] и с результатами численных расчётов [16]. Получено, что наиболее неустойчивой в рассмотренных условиях является изгибная левовинтовая мода $m = +1$. Частота возмущений растёт с ростом скачка плотности, а инкремент падает, то есть радиальный градиент плотности оказывает стабилизирующее влияние.

Работа частично поддержана Минобрнауки РФ, государственное задание на выполнение работ на 2012-2014 годы, шифр 2.560.2011 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., ГК № 14.740.11.0999 и соглашение №14.В37.21.0767, а также грантами

Влияние параметра закрутки на дисперсионные характеристики изгибной моды $m = +1$ при $a = -0,4$, $K = 2,5$ показано на рис. 3. Видно, что закрутка имеет стабилизирующее значение, что отличается от результатов работы [4], где при сверхкритических значениях параметра закрутки поток становился неустойчивым.

РФФИ 13-01-97001 р_поволжье_а и 13-01-97005 р_поволжье_а.

Библиографический список

1. Алексеенко, С.В. Введение в теорию концентрированных вихрей [Текст] / С.В. Алексеенко, П.А. Куйбин, В.Л. Окулов. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003. – 504 с.
2. Гупта, А. Закрученные потоки [Текст] / А. Гупта, Д. Лилли, Н. Сайред. – М.: Мир, 1987. – 588 с.
3. Syred, N. A review of oscillation mechanisms and the role of the precessing vortex core (PVC) in swirl combustion systems [Text] / N. Syred // Prog. Energy. Combust. Sci. – 2006. – V.32. – P. 93-161.
4. Loiseleux, T. The effect of swirl on jets and wakes: Linear instability of the Rankine vortex with axial flow [Text] / T. Loiseleux, J.-M. Chomaz, P. Huerre // Phys. Fluids. – 1998. – V.10. – N.5. – P. 1120-1134.

5. Gallaire, F. Instability mechanisms in swirling flows [Text] / F. Gallaire // Phys. Fluids. – 2003. – V.15. – N.9. – P. 2622-2639.
6. Cairns, R.A. The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows [Text] / R.A. Cairns // J. Fluid Mech. – 1979. – V. 92. – P. 1-14.
7. Mackrodt, P.A. Stability of Hagen-Poiseuille flow with super-imposed rigid rotation [Text] / P.A. Mackrodt // J. Fluid Mech. – 1976. – V.73. – N.1. – P. 163-164.
8. Fernandez-Feria, R. The onset of absolute instability of rotating Hagen-Poiseuille flow: A spatial stability analysis [Text] / R. Fernandez-Feria // Phys. Fluids. – 2002. – V.14. – P. 133-141.
9. Batchelor, G.K. Analysis of the stability of axisymmetric jets [Text] / G.K. Batchelor // J. Fluid Mech. – 1962. – V.14. – P. 529-551.
10. Olendraru, C. Inviscid instability of the Batchelor vortex: Absolute/convective transition and spatial branches [Text] / C. Olendraru, A. Sellier, P. Huerre // Phys. Fluids. – 1999. – V.11. – P. 1805-1811.
11. Absolute and convective instability character of slender viscous vortices [Text] / X. Yin, D. Sun, M. Wei, J. Wu // Phys. Fluids. – 2000. – V.12. – P. 1062-1071.
12. Uberoi, M. Stability of Coaxial Rotating Jet and Vortex of Different Densities [Text] / M. Uberoi, Yen Chow Chuen, J. Narain // Phys. Fluids. – 1972. – V.15. – P. 1718-1727.
13. Lim, D. Absolute instability conditions for variable density, swirling jet flows [Text] / D. Lim, L. Redekopp // Eur. J. Mech. B/Fluids. – 1998. – V.17. – P. 165-185.
14. Dipierro, B. Instabilities of variable-density swirling flows [Text] / B. Dipierro, M. Abid // Phys Rev E. – 2010. – V. 82. – P. 046312-1 - 046312-6.
15. Study of a Longitudinal Plasmoid Created by Capacity Coupled HF Discharge in Vortex Airflow [Text] / A. Klimov, V. Bitiurin, B. Tolkunov, I. Moralev, M. Plotnikova, K. Minko, N. Molevich, I. Zavershinsky // Paper AIAA 2009-1046.
16. Численное моделирование прецессии вихревого ядра в присутствии локализованных источников тепловыделения [Текст] / И.П. Завершинский, Е.Я. Коган, В.Г. Макарян, Н.Е. Молевич, Д.П. Порфирьев, С.С. Сугак // Письма в ЖТФ. – 2013. – Т.39. – №7. – С. 34-43.
17. Numerical simulation of unsteady cavitating turbulent flow in water turbine [Text] / A.A. Dekterev, A.A. Gavrilov, A.V. Minakov, K.A. Finnikov // Proc. of 6th International Symposium On Turbulence, Heat and Mass Transfer, Rome, Italy, 14-18 September. – 2009. – P. 835-838.

STABILITY OF SWIRL FLOWS WITH RADIAL DENSITY GRADIENT

© 2013 D. A. Anchikov, V. A. Gusev, I. P. Zavershinskii,
V. G. Makaryan, S. S. Sugak

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov
(National Research University)

The stability of an axially symmetrical stationary incompressible swirl flow with radial density jump in relation to infinitesimal spiral perturbations is investigated in the paper The dependences of perturbation frequency and increment on the swirl parameter, axial wave number and density jump are obtained. It is shown that perturbation frequency increases while its increment decreases with the increase in the medium density gradient.

Swirl flow, dispersion, instability.

Информация об авторах

Анчиков Дмитрий Александрович, аспирант, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: нелинейная динамика.

Гусев Владимир Анатольевич, доктор педагогических наук, профессор кафедры физики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: газодинамика.

Завершинский Игорь Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: zav@smr.ru. Область научных интересов: нелинейная неравновесная газодинамика, нелинейная акустика.

Макарян Владимир Георгиевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики. Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: нелинейная неравновесная газодинамика, нелинейная акустика.

Сугак Семен Сергеевич, аспирант, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: неравновесная газодинамика.

Anchikov Dmitry Alexandrovich, postgraduate student, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). Area of research: nonlinear dynamics.

Gusev Vladimir Anatolyevich, doctor of education, professor of the department of physics, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). Area of research: gas dynamics.

Zavershinskii Igor Petrovich, doctor of physics and mathematics, professor, head of the department of physics, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: zav@smr.ru. Area of research: nonlinear non-equilibrium gas dynamics, nonlinear acoustics.

Makaryan Vladimir Georgyevich, candidate of physics and mathematics, associate professor of the department of physics, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). Area of research: nonlinear non-equilibrium gas dynamics, nonlinear acoustics.

Sugak Semyon Sergeevich, postgraduate student. Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). Area of research: nonlinear non-equilibrium gas dynamics.