

АСТИГМАТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, СОГЛАСОВАННЫХ С ФУНКЦИЕЙ ЭЙРИ

© 2010 О.В. Зотеева¹, С.Н. Хонина²

¹Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

²Институт систем обработки изображений РАН

Рассмотрены методы получения распределений, содержащих вихревые фазовые сингулярности. Особое внимание уделено применению дробного преобразования Фурье и преобразованию одномерных распределений, согласованных с функцией Эйри.

Вихревая фазовая сингулярность, астигматическое преобразование, распределение Эйри.

Введение

Как известно, лазерное излучение характеризуется высокой монохроматичностью и направленностью. Это позволяет для описания его свойств использовать понятие волнового фронта, во всех точках которого световые колебания имеют одинаковую фазу.

Иная картина складывается при возникновении в лазерном пучке оптических вихрей. Образование вихрей обусловлено появлением в волновом фронте особых точек, которые имеют сходство с известными в физике твёрдого тела двумерными дефектами кристаллической решётки – винтовыми дислокациями. В самой особой точке амплитуда световых колебаний обращается в нуль, а значение фазы не определено, поскольку скорость азимутального изменения фазы обращается в бесконечность. При математическом описании такой особенности принято говорить о наличии сингулярности.

Вихревые лазерные пучки или пучки с вихревыми фазовыми особенностями (оптические воронки) успешно применяются для решения очень широкого спектра задач, включая оптическое манипулирование микро- и нанообъектами (захват и управление движением вплоть до отдельных атомов), высокоточную метрологию, уплотнение записи информации и даже астрономические исследования, что объясняет большое количество работ и разнообра-

зие подходов для решения задачи генерации таких пучков.

В данной работе рассматривается формирование вихревых пучков с помощью средств астигматической оптики и цилиндрических непериодических дифракционных решёток, в том числе согласованных с функциями Эйри. Для моделирования астигматических лазерных конвертеров в работе рассмотрено применение дробного Фурье-преобразования (ДФП).

1. Астигматическое преобразование одномерных распределений

В 1991 году Е. Абрамочкин и В. Волостников предложили получать моды Лагерра-Гаусса (ЛГ), имеющие вихревую сингулярную фазу, из мод Эрмита-Гаусса (ЭГ), фаза которых имеет бинарную структуру, с помощью цилиндрических линз [1]. Было найдено интегральное преобразование мод ЭГ в моды ЛГ и представлены результаты натуральных экспериментов. Преобразование одномерных распределений с помощью цилиндрической линзы было рассмотрено в [2] как частный случай астигматических модовых преобразований.

1.1. Астигматическое модовое преобразование

Астигматическое преобразование модовых пучков ЭГ $H_{n,m}(x, y)$ в пучки

ЛГ $L_{p,q}(x, y)$ выглядит следующим образом:

$$\iint_{R^2} \exp\left[-i(x + y) + \frac{2i}{2}\right] \times H_{n,m}\left(-, -\right) d d = \frac{2}{\sqrt{2}} (-1)^{n+m} \exp\left(-\frac{i^2 xy}{4}\right) \times \begin{cases} (2i)^n m! L_{m,n-m}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}, \frac{y}{2\sqrt{2}}\right), n \geq m, \\ (2i)^m n! L_{n,m-n}\left(\frac{y}{2\sqrt{2}}, \frac{x}{2\sqrt{2}}\right), m \geq n. \end{cases} \quad (1)$$

Его частный вариант:

$$\iint_{R^2} \exp\left[-i(x + y) + \frac{2i}{2}\right] \times H_{n,0}\left(-, -\right) d d = \frac{2}{\sqrt{2}} (-2i)^n \times \exp\left(-\frac{i^2 xy}{4}\right) L_{0,n}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}, \frac{y}{2\sqrt{2}}\right)$$

даёт возможность синтеза «спиральных пучков» $\exp(-z\bar{z})z^n$ и может быть обобщён следующим образом:

$$\iint_{R^2} \exp\left[-i(x + y) + \frac{2i}{2} - \frac{2}{2}\right] \times g\left(-\right) d d = \sqrt{-2} \exp\left(-\frac{i^2 xy}{4}\right) \times S\left((x+iy), (x-iy)\right), \quad (2)$$

где $g(x)$ – одномерное распределение.

Тогда спиральный пучок $S(z, \bar{z})$, полученный по формуле (2), имеет вид

$$S(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{1}{8}z\bar{z} + \frac{1}{8}z^2\right) \times \int_R \exp(-2 - iz) g(\) d . \quad (3)$$

Через декартовы координаты выражение (3) записывается следующим образом:

$$S(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}ixy\right) \times \int_R \exp(-2 - ix + y) g(\) d . \quad (4)$$

Как видно из выражения (4), выполнить такое астигматическое преобразование можно с помощью одной цилиндрической линзы.

1.2. Преобразование функций Эйри

Интерес к функциям Эйри, возникший в конце семидесятых годов прошлого века в контексте квантовой механики [3], был реанимирован в последнее время в связи с новыми возможностями, которые предлагает дифракционная оптика в физической реализации математических абстракций. Среди других сопротивляющихся дифракции мод пучки Эйри выделяются особым «баллистическим» свойством, а именно параболическим отклонением от прямолинейной траектории основного лепестка при распространении в свободном пространстве [4].

Аналогично модам ЭГ, двумерные пучки Эйри синтезируются из произведения одномерных распределений, однако основная проблема связана с усечением [4-7] этих пространственно бесконечных решений параксиального волнового уравнения.

Основное приложение пучки Эйри получили в оптическом манипулировании [8, 9], но, как и моды ЭГ, такие пучки не обладают орбитальным угловым моментом, связанным с наличием вихревых фазовых особенностей.

Создать на основе одномерных пучков Эйри комплексные распределения, содержащие оптические вихри, можно с помощью астигматического конвертора и бинарных дифракционных оптических элементов (ДОЭ), согласованных с функциями Эйри [9].

Функции Эйри являются решением одномерного дифференциального уравнения:

$$A''(x) - xA(x) = 0, \quad (5)$$

и для действительных значений аргумента могут быть записаны в виде

$$A(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{it^3}{3} + ixt\right) dt. \quad (6)$$

В случае простейшего бинарного фазового кодирования [9] комплексная функция пропускания ДОЭ, формирующего пучок Эйри, представляется следующим образом:

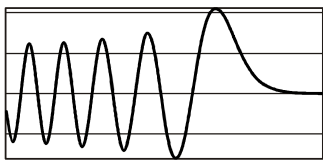
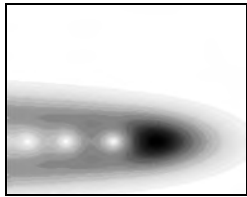
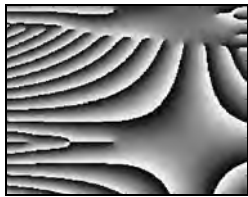
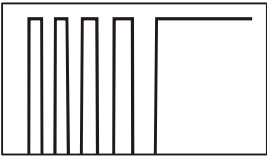
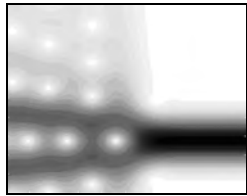
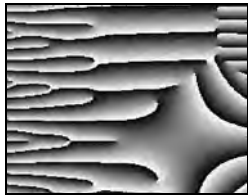
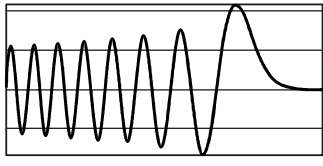
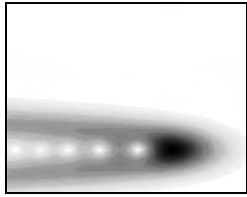
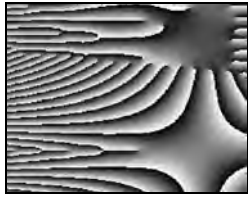
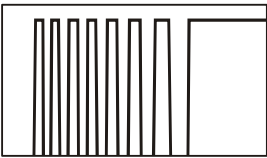
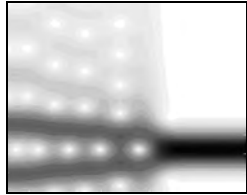
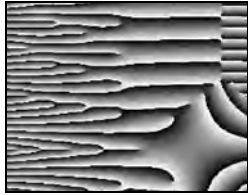
$$g(x) = \exp\{i \arg[A(x)]\}. \quad (7)$$

Численные эксперименты по астигматическому преобразованию как самой функции Эйри (6), так и фазовой функции, вычисляемой по формуле (7), приведены в

табл. 1. Усечение функций Эйри в (6) и (7) выполнялось как в работе [6], по n -му нулю.

Из табл. 1 видно, что имеется определенное сходство в получаемых на выходе распределениях. Однако в случае использования обычной усеченной функции Эйри формируется одномерная цепочка оптических воронок, а при подаче на вход согласованной бинарной фазовой функции – целая матрица оптических воронок. Проследить различие в положении вихревых фазовых сингулярных точек можно по фазовым картинкам выходных распределений.

Таблица 1. Астигматическое преобразование распределений, согласованных с функциями Эйри

Число нулей	Входная функция	Выходное распределение	
		Амплитуда	Фаза
$n = 10$			
			
$n = 15$			
			

2. Дробное преобразование Фурье

Рассмотренные астигматические преобразования можно выполнить с помощью астигматических оптических преобразователей, состоящих из различного числа цилиндрических линз и имеющих различные оптические характеристики.

Для компьютерного моделирования астигматических преобразователей применяются различные методы, но в данной работе отдаётся предпочтение использованию ДФП, благодаря его быстрдействию [10].

Классическое Фурье-преобразование (ФП) определяется, как

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-i\omega x] dx. \quad (8)$$

Интегральное соотношение (8) представляет собой преобразование функции f от пространственной координаты x в функцию от пространственной частоты ω , что в символической форме можно записать в виде $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$. В результате последовательного применения преобразования (8) получаются выражения:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]] &= f(-x), \\ \mathcal{F}[\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]]] &= \mathcal{F}[f(-x)] = F(-\omega), \quad (9) \\ \mathcal{F}[\mathcal{F}[\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]]]] &= f(x). \end{aligned}$$

Подобно тому, как ФП высокого порядка может быть представлено в виде последовательности степеней \mathcal{F}^1 , можно формально факторизовать и интеграл (8), т.е. разложить \mathcal{F}^1 на два (или более) преобразования с порядками меньше единицы. Например,

$$F(\omega) = \mathcal{F}^1[f(x)] = \mathcal{F}^a[\mathcal{F}^b[f(x)]], \quad (10)$$

где \mathcal{F}^a и \mathcal{F}^b называются дробными ФП, а a, b являются порядками ДПФ. Интегральная форма записи ДФП имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^a[f(x)] &= \frac{\exp(i\omega x/2)}{(i \sin \omega x/2)^{\frac{1}{2}}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left[i \frac{(x^2 + \omega^2) \cos \omega x - 2 \omega x}{\sin \omega x}\right] dx, \quad (11) \end{aligned}$$

где $\omega = a/2$, a – порядок дробного преобразования. Определённое ранее обыкновенное ФП (8) получается из (11) подстановкой $a = 1$. Соответственно при подстановке $a = \pm 2$ будет получено первое из соотношений (9). Существует несколько различных определений ДФП, включая определение, основанное на аналогии с описанием распространения оптического пучка по градиентному волокну.

Важное свойство ДФП состоит в том, что когда порядок a – иррациональное число, функция ЭГ является единственной функцией, которая может совпадать с собственным ДФП (быть собственной функцией):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^a \left[\exp(-x^2) H_n(x\sqrt{2}) \right] &= \\ = \exp\left(-i \frac{an}{2}\right) \exp(-x^2) H_n\left(\sqrt{2}x\right), \quad (12) \end{aligned}$$

где H_n – полином Эрмита порядка n , а комплексная экспонента – собственное значение ДФП. Таким образом, в применении к световым полям при действительном a , распределения интенсивности исходного собственного ЭГ-пучка и его ДФП совпадают.

Формальная аналогия между обычным ФП и ДФП может быть распространена на плоскость, заданную декартовыми осями x, y , где переход точки (x, y) к точке (x', y') задаётся оператором вращения \mathcal{R} :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (13)$$

На плоскости x, y последовательность (13) при целых порядках a соответствует вращению на углы, кратные $\pi/2$. При иррациональных порядках a вращение осуществляется на произвольный угол $\theta = a/2$ (возможны также комплексные значения a).

Для осуществления ДФП можно использовать простые линзовые оптические схемы из одной и двух цилиндрических линз (табл. 2) [11, 12].

Их $ABCD$ -матрицы имеют следующий вид:

$$T_{FFFT} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & f \sin \theta \\ -f^{-1} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где f – масштаб ДФП, выраженный в единицах длины. Стоит заметить, что комплексный аргумент в соотношении (9) есть просто накопленная фаза Гоуи (НФГ)

ϑ пучка. Фаза ϑ может быть найдены из соотношения

$$\tan \vartheta = \frac{B}{(A+B)^2} = \frac{f \sin}{(\cos + f \sin)^2}, \tag{15}$$

Таблица 2. Результат преобразования входного распределения одной цилиндрической линзой

Фаза входного распределения	Амплитуда результирующего распределения	Фаза результирующего распределения

где R и r_0 – кривизна волнового фронта пучка и его характерный размер, λ – длина волны. Ясно, что ЭГ-мода будет собственным пучком дробных преобразователей только в том случае, если $\beta = 0$ и рэлеевская длина пучка совпадает с f . С помощью асимметричной оптической схемы также можно осуществлять ДФП заданного порядка $a \in (0,1]$ ($0 < \beta \leq \lambda/2$). Для определения оптических параметров элементов схемы следует найти условия, при которых β в случае распространения пучка от входной опорной плоскости к выходной (или обратно) равно β .

Поскольку лазерные моды ЭГ являются функциями от разделяющихся независимых переменных, всё сказанное выше может быть легко обобщено для двух поперечных пространственных координат. Более того, порядки как ФП, так и ДФП по осям x и y могут быть заданы независимо. В результате имеется три основных «строительных» блока, которые могут быть использованы для построения различных схем $\lambda/2$ -конвертеров мод.

ДФП может применяться в самых различных областях, специализирующихся на обработке сигналов как одномерных, так и двумерных (изображения), в задачах восстановления фазового портрета, характеристик сигнала, пространственно-зависимой фильтрации, дешифровки, распознавании водяных знаков, создании нейронных сетей, голографии и многих других задачах.

Вычислять ДФП можно через алгоритм быстрого ФП, что даст наименьшие затраты времени и ресурсов, а также упростит моделирование задач.

3. Применение астигматических преобразователей

На практике для получения результатов, аналогичных приведённым в 1.2, часто используются астигматические преобразователи (рис. 1).

На рис. 1, б представлен наиболее простой – однолинзовый – астигматический преобразователь, который и будем

далее рассматривать. Здесь f – фокусное расстояние линзы, a – расстояние, на котором находится линза от входного пучка, b – расстояние, на котором отслеживается результирующее распределение.

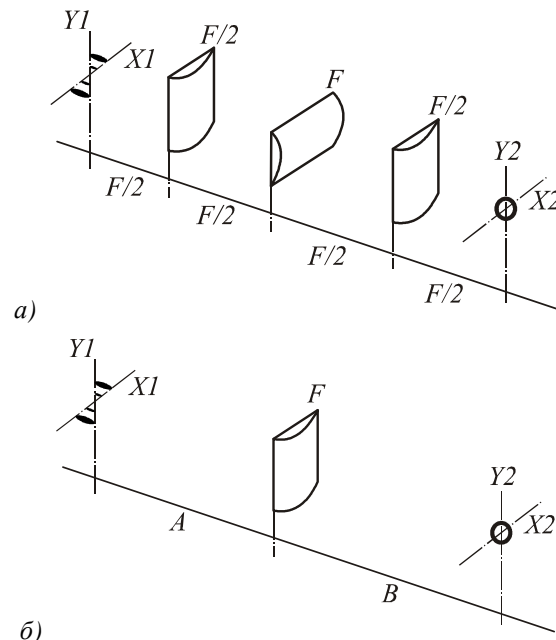


Рис. 1. Трёхлинзовый (а) и однолинзовый (б) преобразователи

На примере функций Эйри, содержащих различное количество нулей, рассмотрим результаты, получаемые с применением астигматического преобразователя, который моделировался на основе использования ДФП.

Как видно из полученных результатов, использование астигматического преобразования пучков позволяет получать распределения, схожие с теми, что были получены путём аналитических выражений в 1. Стоит также отметить, что применение в работе ДФП обеспечивает экономию как вычислительных, так и временных ресурсов.

Заключение

В работе рассмотрено преобразование одномерных распределений, в частности, согласованных с функциями Эйри. Результаты, полученные на основе аналитических выражений и моделирования действия астигматических оптических систем с применением ДФП, находятся в хорошем согласовании.

Таким образом, показано, что с помощью фазовых оптических элементов, представляющих собой апериодические одномерные (цилиндрические) решётки, можно формировать двумерные матрицы оптических вихрей различной конфигурации, что, в частности, расширяет возможности оптического микроманипулирования.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF PG08-014-1), грантов РФФИ 10-07-00109-а, 10-07-00438-а и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-7414.2010.9.

Литература

1. **Abramochkin, E.** Beam transformations and nontransformed beams [Text] / E. Abramochkin, V. Volostnikov // *Optics Communications*. – 1991. – No. 83. – P. 123-135.
2. **Абрамочкин, Е.Г.** Спиральные пучки света [Текст] / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников // *Успехи физических наук*. – 2004. – Вып. 12. – С. 1273-1300.
3. **Berry, M.V.** Nonspreeding wave packets [Text] / M.V. Berry, N.L. Balazs // *Am. J. Phys.* – 1979. – V. 47(3). – P. 264-267.
4. **Siviloglou, G.A.** Accelerating finite energy Airy beams [Text] / G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides // *Opt. Letters*. – 2007. – V. 32(8). – P. 979-981.
5. **Banders, M.A.** Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems [Text] / M.A. Banders,

References

1. **Abramochkin, E.** Beam transformations and nontransformed beams [Text] / E. Abramochkin, V. Volostnikov // *Optics Communications*. – 1991. – N. 83. – P. 123-135.

J.C. Gutierrez-Vega // *Opt. Express*. – 2007. – V. 15(25). – P. 16719-16728.

6. **Хонина, С.Н.** Ограниченные 1D пучки Эйри: лазерный веер [Текст] / С.Н. Хонина, С.Г. Волоотовский // *Компьютерная оптика*. – 2008. – Т. 32, № 2. – С. 168-174.

7. **Хонина, С.Н.** Зеркальные лазерные пучки Эйри [Текст] / С.Н. Хонина, С.Г. Волоотовский // *Компьютерная оптика*. – 2010. – Т. 34, № 2. – С. 203-213.

8. **Baumgartl, J.** Optically mediated particle clearing using Airy wavepackets [Text] / J. Baumgartl, M. Mazilu and K. Dholakia // *Nature Photonics*. – 2008. – Vol. 2. – P. 675-678.

9. **Хонина, С.Н.** Формирование лазерных пучков Эйри с помощью бинарно-кодированных дифракционных оптических элементов для манипулирования микрочастицами [Текст] / С.Н. Хонина, Р.В. Скиданов, О.Ю. Моисеев // *Компьютерная оптика*. – 2009. – Т. 33, № 2. – С. 138-146.

10. **Хонина, С.Н.** Расширение функциональных возможностей модовых астигматических конвертеров на основе применения дифракционных оптических элементов [Текст] / С.Н. Хонина, С.В. Карпеев, А.В. Устинов // *Известия Самарского научного центра РАН*. – 2009. – Т. 11, № 5. – С. 13-23.

11. **Малютин, А.А.** Использование дробного Фурье-преобразования в /2-конвертерах лазерных мод [Текст] / А.А. Малютин // *Квантовая электроника*. – 2004. – № 2. – С. 165-171.

12. **Hahn, J.** Optical implementation of iterative fractional Fourier transform algorithm [Text] / J. Hahn, H. Kim, B. Lee // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 14, N 23. – P. 11103-11112.

2. **Abramochkin, E.G.** Spiral light beams [Text] / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // *Usp. Phys. Nauk*. – 2004. – Vol. 12. – С. 1273-1300. – [in Russian].

3. **Berry, M.V.** Nonspreeding wave packets [Text] / M.V. Berry, N.L. Balazs //

Am. J. Phys. – 1979. – V. 47(3). – P. 264-267.

4. **Siviloglou, G.A.** Accelerating finite energy Airy beams [Text] / G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides // Opt. Letters. – 2007. – V. 32(8). – P. 979-981.

5. **Banders, M.A.** Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems [Text] / M.A. Banders, J.C. Gutierrez-Vega // Opt. Express. – 2007. – V. 15(25). – P. 16719-16728.

6. **Khonina, S.N.** Bounded one-dimensional Airy beams: laser fan [Text] / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // Computer optics. – 2008. – V. 32, N 2. – P. 168-174. – [in Russian].

7. **Khonina, S.N.** Mirror laser airy beams [Text] / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // Computer optics. – 2010. – V. 34, N 2. – P. 203-213. – [in Russian].

8. **Baumgartl, J.** Optically mediated particle clearing using Airy wavepackets [Text] / J. Baumgartl, M. Mazilu and

K. Dholakia // Nature Photonics. – 2008. – Vol. 2. – P. 675-678.

9. **Khonina, S.N.** Airy laser beams generation by binary-coded diffractive optical elements for microparticles manipulation [Text] / S.N. Khonina, R.V. Skidanov, O.Y. Moiseev // Computer optics. – 2009. – V. 33, N 2. – P. 138-146. – [in Russian].

10. **Khonina, S.N.** Functional enhancement of mode astigmatic converters on the basis of application of DOEs [Text] / S.N. Khonina, S.V. Karpeev, A.V. Ustinov // Izvest. SNC RAS. – 2009. – Vol. 11, N 5. – P. 13-23. – [in Russian].

11. **Malutin, A.A.** Use of fractional Fourier-transformation in $\sqrt{2}$ - converters of laser modes [Text] / A.A. Malutin // Quantum Electronics. – 2004. – N 2. – P. 165-171. – [in Russian].

12. **Hahn, J.** Optical implementation of iterative fractional Fourier transform algorithm [Text] / J. Hahn, H. Kim, B. Lee // Optics Express. – 2006. – Vol. 14, N 23. – P. 11103-11112.

ASTIGMATIC TRANSFORMATION OF AIRY MATCHED DISTRIBUTIONS

© 2010 O.V. Zoteeva¹, S.N. Khonina²

¹Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov
(National Research University)

²Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences

The methods of generation of distributions with vortical phase singularity are considered. Especially such topics were attended as using of the fractional Fourier transformation and transformation of Airy similar distributions.

Vortical phase singularity, astigmatic transformation, Airy distribution.

Информация об авторах

Зотеева Ольга Владимировна, магистрант. Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: компьютерное моделирование, модовые преобразования. E-mail: zoteeva_o@mail.ru.

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник. Институт систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений. E-mail: khonina@smr.ru.

Zoteeva Olga Vladimirovna, undergraduate. Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov (National Research University). Area of research: computer modeling, mode transformations. E-mail: zoteeva_o@mail.ru.

Khonina, Svetlana Nikolaevna, doctor of physical and mathematical sciences, professor, leading researcher. Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences. Area of research: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: khonina@smr.ru.