УДК 539.3:534.1

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Н. А. Таранухa, Г. С. Лейзерович

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет

Рассматривается задача о вынужденных изгибных колебаниях тонкой бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки (тонкого кругового кольца, находящегося в условиях плоской деформации) с большими амплитудами. Уравнения движения кольца получены из уравнений нелинейной теории гибких пологих оболочек. Предлагается новый подход к построению нелинейной конечномерной модели кольца. Сформулированы и доказаны три утверждения, которые позволяют уточнить ряд фундаментальных представлений о нелинейных изгибных колебаниях круговых цилиндрических оболочек конечной длины.

Круговая цилиндрическая оболочка, кольцо, нелинейные колебания, конечномерная модель, взаимодействие форм колебаний.

Введение

Нелинейные динамические характеристики круговых цилиндрических оболочек, как правило, определяются в рамках теории пологих оболочек [1, 2]. Геометрическая нелинейность делает невозможным их точное аналитическое определение. Это побуждает искать приближённое решение, которое, с одной стороны, было бы достаточно простым, а с другой стороны, – правильно отображало особенности движения оболочки, проявляющиеся при её больших прогибах. Заметим, что разумно строить приближения лишь до того уровня точности, который соответствует точности исходной математической модели.

При построении нелинейной конечномерной модели очень важно максимально уменьшить число степеней свободы оболочки, так как многомерные системы не допускают применения ряда качественных и наглядных приемов. Традиционный подход к её построению предполагает обнаруженное в экспериментах взаимодействие сопряжённых изгибных форм (форм сдвинутых в окружном направлении на угол $\ /2$), а также некоторые геометрические модельные представления о деформировании оболочки при конечных прогибах. В этом случае прогиб $w(x,y,t)$ свободно опёртой по торцам оболочки длиной l, радиусом R и толщиной h, совершающей колебания вблизи зоны главного резонанса, представляется в виде [2-4]:

$$w=[a_1\sin\ \ y+a_2\cos\ \ y]\sin\ \ x+a_3\sin^2\ \ x, \quad (1)$$

где

$\sin\ \ y\sin\ \ x,\ \cos\ \ y\sin\ \ x\ (\ \ = \ /l,\ \ \ =n/R)$ – сопряжённые изгибные формы, являющиеся формами собственных колебаний оболочки, которым соответствует одна и та же собственная частота (n – число окружных волн);

a_i $(i=1,2,3)$ – обобщённые координаты, зависящие от времени t.

Из (1) видно, что традиционный подход приводит к неразрешимым проблемам, связанным с удовлетворением граничных условий свободного опирания по изгибающему моменту. Поэтому он может быть рекомендован только для относительно длинных оболочек [5-8].

Отметим также, что традиционный подход не объясняет механизма взаимодействия сопряжённых изгибных форм.

Для уточнения ряда фундаментальных представлений об особенностях нелинейного динамического поведения круговой цилиндрической оболочки ниже рассматривается более простая, но близкая задача о вынужденных колебаниях бесконечно длинной оболочки (кругового кольца, находящегося в условиях плоской деформации) с большими амплитудами.

Математическая модель

Уравнения движения. Уравнения, описывающие вынужденные колебания кольца с большими амплитудами, могут быть получены из уравнений теории гибких пологих оболочек [1]. При устремлении длины оболочки к бесконечности они принимают вид [9]:

$$\frac{\partial N_2}{\partial y}=0;\ \ D\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{N_2}{R}+\frac{\partial}{\partial y}\left[N_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]-\ h\ddot{w}+q, \quad (2)$$

где

$w(y,t)$ – упругий прогиб;

$D=Eh^3/\left[12\left(1-\ \ ^2\right)\right]$ – цилиндрическая жёсткость;

E – модуль Юнга;

– коэффициент Пуассона;

– массовая плотность;

$q(y,t)$ – вынуждающая нагрузка;

точками обозначено дифференцирование по времени *t*.

Из первого уравнения (2) следует, что окружное усилие N_2 зависит только от времени:

$$N_2=\frac{Eh}{1-\ \ ^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]=\frac{Eh}{1-\ \ ^2}\ \ (t). \quad (3)$$

Условие "возврата". Все величины, определяющие напряжённо-деформированное состояние кольца, должны возвращаться к своим прежним значениям после обхода его контура. В частности, условие "возврата" для окружного перемещения $v(y,t)$ имеет вид:

$$\int_0^{2\ R}\frac{\partial v}{\partial y}dy=\int_0^{2\ R}\left[\frac{w}{R}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\ \ (t)\right]dy=0. \quad (4)$$

Вынуждающая нагрузка. Пусть круговое кольцо подвержено действию нагрузки, находящейся "в резонансе" с одной из его форм собственных изгибных колебаний:

$$q(y,t)=q\sin\ \ y\cos\ \ t, \quad (5)$$

где

q – амплитуда;

– частота вынуждающей нагрузки.

Новая нелинейная конечномерная модель кругового кольца. Будем полагать, что нагрузка (5), генерирующая изгибные колебания кольца с большими амплитудами, неизбежно приводит к возникновению радиальных колебаний, а радиальные колебания, в свою очередь, приводят к смещению узлов возбуждаемой изгибной формы в окружном направлении на угол $\ \ (t)$. Прогиб кольца, согласно такому подходу, аппроксимируем выражением

$$w(y,t)=a(t)\sin[\ \ y+\ \ (t)]+\Psi(t). \quad (6)$$

Первое слагаемое в (6) представляет собой бегущую в окружном направлении изгибную волну, а второе слагаемое соответствует радиальным колебаниям. Смещение узлов возбуждаемой изгибной формы на угол $\ \ (t)$ описывает, по существу, возникновение дополнительной сопряжённой изгибной формы. Обозначив

$a_1(t)=a(t)\cos\ \ (t)$ и

$a_2(t)=a(t)\sin\ \ (t)$,

прогиб (6) можно представить в виде:

$$w(y,t)=a_1(t)\sin\ \ y+a_2(t)\cos\ \ y+\Psi(t). \quad (7)$$

Допущение о нерастяжимости контура кругового кольца.

Очень часто [9] при изучении нелинейных изгибных колебаний кольца делается допущение о том, что длина его контура практически не изменяется, то есть $N_2\approx 0$. Тогда в (4) следует принять $\ \ (t)=0$.

Утверждения об особенностях нелинейных колебаний кругового кольца.

__**Утверждение 1.**__ *Возбуждение изгибных колебаний кругового кольца с большими амплитудами всегда приводит к возникновению радиальных колебаний. Механизмом, запускающим это взаимодействие, является геометрическая нелинейность кругового кольца.*

Доказательство. Воспользуемся допущением о нерастяжимости контура кольца. Тогда подстановка (6) в (4) позволяет установить зависимость между координатами $\Psi(t)$ и $a(t)$:

$$\Psi = {}^{0,5}a^2/4, \qquad (8)$$

где

$= \left(n^2 h/R\right)^2$ – безразмерный параметр, малый для тонкого кругового кольца.

Из (8) следует, что *возбуждение изгибных колебаний кругового кольца с большими амплитудами всегда приводит к возникновению радиальных колебаний. Механизмом, запускающим это взаимодействие, является геометрическая нелинейность кругового кольца, что и требовалось доказать*. Заметим, что в линейной постановке упомянутые колебания кругового кольца происходят независимо друг от друга.

Ортогонализация уравнения движения (2) к форме прогиба (7) приводит к системе модальных уравнений, подтверждающих связанность сопряженных изгибных форм [9]:

$$\begin{aligned} &\ddot{a}_1 + a_1 + \ a_1\left(\ddot{a}_1 a_1 + \ddot{a}_2 a_2 + \dot{a}_1^2 + \dot{a}_2^2\right)/2 = \bar{q}\cos\Omega \ ; \\ &\ddot{a}_2 + a_2 + \ a_2\left(\ddot{a}_1 a_1 + \ddot{a}_2 a_2 + \dot{a}_1^2 + \dot{a}_2^2\right)/2 = 0. \end{aligned} \qquad (9)$$

В (9) $\bar{q} = q/\ h^2\ ^2$; $\Omega = \ /\ $, а точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени $= \ t$ (– собственная частота).

Утверждение 2. *Возбуждение изгибных колебаний кругового кольца с большими амплитудами по одной из собственных изгибных форм приводит к возникновению радиальных колебаний. Радиальные колебания, в свою очередь, генерируют сопряжённую изгибную форму. Таким образом, радиальные колебания выступают в качестве своеобразной инерционной связи между сопряжёнными изгибными формами или, иными словами, являются механизмом, запускающим взаимодействие сопряжённых изгибных форм.*

Доказательство. Опустим допущение о нерастяжимости контура кольца. Подстановка (7) в (4) позволяет найти функцию (t), а затем по формуле (3) и окружное усилие N_2. Процедура метода Бубнова – Галёркина приводит к трем связанным модальным уравнениям:

$$\begin{aligned} &\ddot{a}_1 + a_1 + \ {}^{0,5}a_1\ddot{\Psi} = \bar{q}\cos\Omega \ ; \\ &\ddot{a}_2 + a_2 + \ {}^{0,5}a_2\ddot{\Psi} = 0; \\ &\ddot{\Psi} + 12\Psi/\ - 3\left(a_1^2 + a_2^2\right)/\ {}^{0,5} = 0. \end{aligned} \qquad (10)$$

Из первого уравнения (10) видно, что *возбуждение нелинейных изгибных колебаний кольца по одной из собственных форм приводит к возникновению радиальных колебаний*. Из второго и третьего уравнений (10) следует, что именно *радиальные колебания генерируют дополнительную сопряжённую изгибную форму. Таким образом, радиальные колебания выступают в качестве своеобразной инерционной связи между сопряжёнными изгибными формами или, иными словами, являются механизмом, запускающим взаимодействие сопряжённых изгибных форм, что и требовалось доказать.*

Утверждение 3. *Колебания кругового кольца с большими амплитудами происходят практически без растяжения его контура.*

Доказательство. Анализ третьего уравнения (10) показывает, что его первое инерционное слагаемое намного меньше двух остальных. Это объясняется, в частности, тем, что квадрат безразмерной радиальной парциальной частоты, равный $12/\ $, значительно превышает квадрат безразмерной изгибной парциальной частоты, равный 1.

Тогда, пренебрегая первым слагаемым в третьем уравнении (10), найдём, что

$$\Psi \approx \ {}^{0,5}\left(a_1^2 + a_2^2\right)/4 = \ {}^{0,5}a^2/4. \qquad (11)$$

Определив вторую производную $\ddot{\Psi}$ по выражению (11) и подставив её значение в первые два уравнения (10), придём к системе модальных уравнений (9).

Полное совпадение модальных уравнений, а также выражений (8) и (11) свидетельствует о том, что *колебания кругового кольца с большими амплитудами* *происходят практически без растяжения его контура, что и требовалось доказать.*

Важно отметить, что пренебрежение малым первым слагаемым в третьем уравнении (10) не означает, что и в первых двух уравнениях следует принять $\ddot{\Psi} = 0$, как это, по существу, делается, например, в [1, 3]. На неточность такой процедуры, часто используемой для упрощения нелинейных модальных уравнений, описывающих колебания оболочки конечной длины с большими амплитудами, обращено внимание в [6-8].

Выводы

Доказанные выше утверждения свидетельствуют о том, что колебания кругового кольца с большими амплитудами напоминают описанное еще Х. Гюйгенсом явление самосинхронизации двух маятников, установленных на общем податливом основании, когда колебания одного маятника вызывают некоторое движение основания, а последнее, в свою очередь, возбуждает колебания второго маятника.

Можно предположить, что подобная физическая картина будет иметь место и при колебаниях оболочки конечной длины с большими амплитудами. Это предположение позволяет сформулировать новый подход к построению нелинейной конечномерной модели оболочки любой длины. Согласно этому подходу, аппроксимирующее выражение для динамического прогиба должно предполагать взаимодействие изгибных колебаний оболочки с радиальными колебаниями, а также инерционную связанность сопряжённых изгибных форм, обусловленную радиальными колебаниями [5-8].

Работа выполнена в рамках гранта 2.1.2/3046 Министерства образования и науки РФ по целевой программе "Развитие научного потенциала высшей школы. Проведение фундаментальных исследований".

Библиографический список

1. Вольмир, А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек [Текст] / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.

2. Кубенко, В. Д. Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (Обзор) [Текст] / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук // Прикл. механика. – 1998. – 34. – № 8. – С. 3–31.

3. Кубенко, В. Д. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек [Текст] / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Т. С. Краснопольская. – Киев: Наук. думка, 1984. – 220 с.

4. Варадан, Т. К. Нелинейные свободные изгибные колебания тонкостенных круговых цилиндрических оболочек [Текст] / Т. К. Варадан, Дж. Пратхап, Х. В. Рамани // Аэрокосмическая техника. – 1990. – № 5. – С. 21–24.

5. Лейзерович, Г. С. О нелинейных формах движения тонких круговых цилиндрических оболочек [Текст] / Г. С. Лейзерович // ПМТФ. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 161–164.

6. Тарануха, Н. А. Динамика "неправильных" оболочек [Текст] / Н. А. Тарануха, Г. С. Лейзерович. – Владивосток: Дальнаука, 2005. – 423 с.

7. Тарануха, Н. А. Новые решения в динамике "неправильных" оболочек [Текст] / Н. А. Тарануха, Г. С. Лейзерович. – Владивосток: Дальнаука, 2007. – 203 с.

8. Лейзерович, Г. С. Неочевидные особенности динамики круговых цилиндрических оболочек [Текст] / Г. С. Лейзерович, Н. А. Тарануха // Изв. РАН МТТ. – 2008. – № 2. – С. 96–105.

9. Evensen, D. A. Nonlinear flexural vibrations of thin circular rings [Text] / D. A. Evensen // Trans ASME. J. Appl. Mech. E. – 1965. – Vol. 33. – No 3. – PP. 553–560.

References

1. Volmir, A. S. Nonlinear dynamics of plates and shells / A. S. Volmir. – M.: Nauka, 1972. – 432 p.

2. Kubenko, V. D. Nonlinear problems of oscillations of thin shells (Survey) / V. D. Kubenko, P. S. Kovalchuk // Appl. Mech. – 1998. – 34. – No. 8. – PP. 3-31.

3. Kubenko, V. D. Nonlinear interaction of modes of flexural vibrations of cylindrical shells / V. D. Kubenko, P. S. Kovalchuk, T.

S. Krasnopolskaya. – Kiev: Naukova. dumka, 1984. – 220 p.

4. Varadan, T. K. Nonlinear free flexural vibrations of thin-walled circular cylindrical shells / T. K. Varadan, G. Prathap, H. V. Ramani // AIAA J. – 1990. – No. 5. – PP. 21–24.

5. Leyzerovich, G. S. Nonlinear modes of motion of thin circular cylindrical shells // J. of Appl. Mech. and Techn. Physics. – 2001. – Vol. 42. – No. 4. – PP. 161-164.

6. Taranukha, N. A. Dynamics of "irregular" shells / N. A. Taranukha, G. S. Leyzerovich. – Vladivostok: Dalnauka, 2005. – 423 p.

7. Taranukha, N. A. New solutions in the dynamics of "irregular" shells / N. A. Taranukha, G. S. Leyzerovitch. – Vladivostok: Dalnauka, 2007. – 203 p.

8. Leyzerovich, G. S. Non-obvious features of the dynamics of circular cylindrical shells / G. S. Leyzerovich, N. A. Taranukha // Bulletion of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of rigid bodies. – 2008. – No. 2. – PP. 96-105.

9. Evensen, D. A. Nonlinear flexural vibrations of thin circular rings / D. A. Evensen // Trans ASME. J. Appl. Mech. E. – 1965. – Vol. 33. – No 3. – PP. 553-560.

SOME FEATURES OF NONLINEAR INTERACTION OF VIBRATION MODES OF THIN CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS

© 2010 N. A. Taranukha, G. S. Leyzerovich

Komsomolsk-na-Amure State Technical University

The paper deals with the problem on forced flexural vibrations of a thin infinitely long circular cylindrical shell (thin circular ring under plane deformation) with large amplitudes. The equations of ring motion are obtained from equations of the nonlinear theory of flexible shallow shells. A new approach to the construction of a nonlinear finite-dimensional model of a ring is proposed.

Three statements that make it possible to specify a series of fundamental notions of nonlinear flexural vibrations of circular cylindrical shells of finite length are formulated and proved.

Circular cylindrical shell, ring, nonlinear vibrations, finite-dimensional model, interaction of vibration modes.

Информация об авторах

Тарануха Николай Алексеевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой кораблестроения. Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет. Область научных интересов: статика и динамика сложных тонкостенных конструкций, численные методы. E-mail: taranukha@knastu.ru.

Лейзерович Григорий Самуилович, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры механики и анализа конструкций и процессов. Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет. Область научных интересов: устойчивость и колебания пластин оболочек. E-mail: yahad@kmscom.ru.

Taranukha Nikolay Alekseevich, doctor of technical sciences, professor, head of the department of shipbuilding. Komsomolsk-na-Amure State Technical University. Area of research: statics and dynamics of complex thin-wall structures, numerical methods. E-mail: taranukha@knastu.ru.

Leyzerovich Grigoriy Samuilovich, candidate of technical sciences, assistant professor, professor of the department of mechanics and analyses of processes and structures. Komsomolsk-na-Amure State Technical University. Area of research: stability and dynamics of plates and shells. E-mail: yahad@kmscom.ru.