УДК 539.3+517.938

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ

© 2010 А. И. Данилин

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

С единых позиций показана физическая суть энергетических критериев оптимальности, их взаимосвязь с равнопрочностью. Показан дуализм условия постоянства упругого потенциала. Дано теоретическое обоснование доказательства А.А.Комарова сходимости алгоритмов оптимизации на основе энергетических критериев оптимальности. Обозначены проблемы, возникающие при практической реализации теории.

Критерии оптимальности, энергия деформации, упругий потенциал.

Рассмотрим задачу отыскания тонкостенной конструкции, выполненной из заданного объёма материала и обладающей минимальной энергией деформации в единственном случае нагружения.

Энергия деформации представляет собой работу внутренних сил в процессе деформирования и в общем случае для ***единичного*** объёма произвольной конструкции может быть вычислена [1] как

$$\overline{U} = \int_{{}_{ij}=0}^{{}_{ij}} {}_{ij}\, d\, {}_{ij}, \qquad (1)$$

где

${}_{ij}$ и ${}_{ij}$ – компоненты тензора напряжений и деформаций;

$\overline{U}$ – удельная потенциальная энергия деформаций.

Если процесс деформации обратимый, то поведение материала упругое. Работа внутренних сил не зависит от пути интегрирования, поэтому величину $\overline{U}$ можно истолковывать как упругий потенциал в точке конструкции. Полная энергия деформаций получается интегрированием величины $\overline{U}$ по объёму исходной конструкции (до деформации):

$$U = \iiint_V \overline{U}\, dV. \qquad (2)$$

Из приведённых определений следует, что упругий потенциал элементарного объёма конструкции может быть вычислен как

$$\overline{U} = \frac{dU}{dV}. \qquad (3)$$

При упругом деформировании для элемента k конструкции, имеющего постоянное поле деформаций (напряжений) и работающего в плоском напряжённом состоянии в координатах xoy, удельная потенциальная энергия деформаций (упругий потенциал элемента) запишется в виде

$$\overline{\overline{U}}_k = \frac{1}{2}\left[\ {}_x\ {}_x + \ {}_y\ {}_y + \quad \right]_k, \qquad (4)$$

а полная энергия деформаций будет равна сумме упругих потенциалов всех элементов, умноженных на объёмы соответствующих элементов:

$$U = \sum_{k=1}^{m} \overline{\overline{U}}_k \cdot V_k. \qquad (5)$$

Здесь:

 , – нормальные напряжения и деформации в k–ом элементе;

 , – касательное напряжение и деформация сдвига;

V_k – объём материала элемента k;

m – количество элементов конструкции.

Уравнение (5) с учётом (4) примет вид:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left[\ {}_x\ {}_x + \ {}_y\ {}_y + \quad \right]_k \cdot V_k. \qquad (6)$$

Отсюда следует аналог уравнения (3) для дискретных конструкций с постоянным полем напряжений в каждом элементе:

$$\overline{\overline{U}}_k = \frac{dU}{dV_k} = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{m}} \left[\quad {}_x \, {}_x + \quad {}_y \, {}_y + \quad \right]_k . (7)$$

Таким образом, для тонкостенных конструкций, элементы которых работают в плоском напряжённом состоянии, имеем следующую задачу оптимального проектирования.

Найти распределение материала V_{k}, k = 1, 2,…, m, которое в единственном случае нагружения обеспечивает минимум энергии деформаций конструкции, выполненной из заданного объёма материала:

$$U = \sum_{k=1}^{m} \overline{\overline{U}}_k \cdot V_k \to \min, \quad \mathrm{k} = 1,2,...,\mathrm{m}; \; (8)$$

при

$$V = V_0. \qquad (9)$$

Здесь:

V_{k} – объём материала k-го элемента;

m – количество элементов в конструкции;

V_0 – заданный распределяемый объём материала.

Для решения поставленной задачи применим метод неопределённых множителей Лагранжа. Составим функцию

$$L = \sum_{k=1}^{m} \overline{\overline{U}}_k \cdot V_k + \quad \left(V_0 - \sum_{k=1}^{m} V_k \right), \qquad (10)$$

где   – множитель Лагранжа.

Условия минимума функции Лагранжа, которые обеспечивают решение задачи оптимизации (8)–(9), с учётом (7) запишутся в виде

$$\frac{\partial L}{\partial V_k} = \overline{\overline{U}}_k - \quad = 0, \quad k = 1,2,..., m; \qquad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \quad} = V_0 - \sum_{k=1}^{m} V_k = 0. \qquad (12)$$

Уравнение (11) представляет собой критерий оптимальности, который устанавливает, что в *конструкции, выполненной из заданного объёма материала, достигается минимум потенциальной энергии деформаций, если упругий потенциал (удельная энергия деформаций) каждого элемента имеет одинаковое значение*:

$$\overline{\overline{U}}_k = \quad = const, \quad k = 1,2,..., m; \qquad (13)$$

Для построения процедуры отыскания распределения материала V_{k}, k=1,2,…,m, которое обеспечивает выполнение критерия (13), выразим упругий потенциал элемента (4) через силовые факторы, действующие в элементе, а именно, через потоки внутренних сил $R = \quad \cdot \quad$, где   – толщина элемента,   – напряжение соответствующего направления. С учётом закона Гука для плоского напряжённого состояния упругий потенциал (4) элемента выразится в виде

$$\overline{\overline{U}}_k = \frac{1}{2E_k}\left[\quad {}_x^2 + \quad {}_y^2 - 2 \quad {}_k \quad {}_x \quad {}_y + 2(1 + \quad {}_k) \quad {}^2 \right]_k =$$

$$= \frac{S_k^2}{2E_k \quad {}_k^2 S_k^2}\left[R_x^2 + R_y^2 - 2 \quad {}_k R_x R_y + 2(1 + \quad {}_k) T^2 \right]_k =$$

$$= \frac{S_k^2}{2E_k V_k^2}\left[R_k \right] = \frac{1}{2V_k^2}\left[R_k^* \right], \qquad (14)$$

где

$$\left[R_k^*\right] = \frac{S_k^2}{E_k}\left[R_k\right] = \frac{S_k^2}{E_k}\left[R_x^2 + R_y^2 - 2 \quad {}_k R_x R_y + 2(1 + \quad {}_k) T^2\right]_k \qquad (15)$$

В формулах (14)–(15):

S_k – площадь k-го элемента в плане;

E_k, $_k$ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала k-го элемента;

T – поток касательных сил ($T = \quad \cdot \quad$).

Подставляя (14) в критерий оптимальности (13), получим

$$\quad = \frac{[R_k^*]}{2V_k^2} \; . \qquad (16)$$

Выражая V_k из (16) и подставляя его в (12), получим значение   – величины искомого, одинакового для всех элементов упругого потенциала, которое обеспечивается заданным объёмом материала V_0:

$$\quad = \overline{\overline{U}}_k = \frac{[R_k^*]}{2V_k^2} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{m} \sqrt{\frac{[R_k^*]}{2}} \right)^2}{V_0^2}. \qquad (17)$$

Из формулы (17) можно получить значение объёма материала каждого элемента V_k^{opt} в оптимальной по критерию (12) конструкции:

$$V_k^{opt} = \frac{V_0}{\sum\limits_{k=1}^{m}\sqrt{\frac{[R_k^*]}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{[R_k^*]}{2}}. \qquad (18)$$

С учётом выражения (15), а также того, что для плоского элемента V_k = $_k$ S_k, формулу (18) можно переписать в виде

$$_k^{opt} = \frac{V_0}{\sum\limits_{k=1}^{m} S_k \cdot \sqrt{\frac{[R_k]}{2E_k}}} \cdot \sqrt{\frac{[R_k]}{2E_k}}. \qquad (19)$$

Отметим, что здесь $[R_k]$ вычисляются для исходного распределения толщин элементов $_k$, k=1, 2, …, m.

Рассмотрим частный случай [2, 3], когда предполагается, что все элементы конструкции выполнены из одного материала, то есть $E_k = E = const$ для k = 1, 2, …, m. При этом формула (19) упрощается

$$_k^{opt} = \frac{V_0}{\sum\limits_{k=1}^{m} S_k \cdot \sqrt{[R_k]}} \cdot \sqrt{[R_k]}. \qquad (20)$$

Выразим $[R_k]$ через напряжения и подставим в уравнение (20):

$$[R_k] = {}_k^2 \left[{}_x^2 + {}_y^2 - 2 \; {}_x \; {}_y + 2(1+ \;) \; {}^2 \right]_k = {}_k^2 \left[\; {}_k^{экв} \right]^2; \qquad (21)$$

$$_k^{opt} = \frac{V_0}{\sum\limits_{k=1}^{m} V_k \cdot \; {}_k^{экв}} \cdot \; {}_k \cdot \; {}_k^{экв}. \qquad (22)$$

Введём понятие осреднённого напряжения в соответствии с выражением

$$_{осредн.}^{экв} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} V_k \cdot \; {}_k^{экв}}{V_0}. \qquad (23)$$

В силу решения задачи оптимизации это *осреднённое напряжение должно быть одинаковым для всех элементов конструкции*. Поэтому вместо задания объёма распределяемого материала V_0 и последующего анализа достигнутого уровня напряжений можно сразу назначить допускаемый уровень эквивалентных напряжений [ ] и получить известную формулу [2, 3] для алгоритма поиска равнопрочных конструкций:

$$_k^{opt} = \frac{{}_k^{экв}}{[\;\;]} \cdot \; {}_k. \qquad (24)$$

Равнопрочной называется конструкция, у которой в каждом элементе (точке) достигается одинаковый уровень напряжений.

Уровень напряжений оценивается эквивалентными напряжениями, которые связаны с теориями прочности. При минимизации энергии деформаций эквивалентные напряжения следует подсчитывать по IV–энергетической теории прочности.

Таким образом, *при действии единственного случая нагружения конструкция, изготовленная из одинакового материала, для которой в каждой точке выполняется требование постоянства упругого потенциала, будет* ***равнопрочной****, и будет иметь минимальный потребный объём силового материала при заданном уровне напряжений.*

Именно этот теоретический результат многими исследователями принимается за основу при построении алгоритмов инженерной оптимизации по условиям прочности. Зачастую формула (24) используется и для конструкций, состоящих из различных материалов. Последствия и корректный способ такого применения требует отдельного обсуждения.

Для полноты рассмотрим несколько иную по сравнению с формулировкой (8)–(9) постановку оптимизационной задачи.

Найти распределение материала V_k, k = 1,2, …, m, которое в единственном случае нагружения при заданном значении энергии деформаций U_0 обеспечивает минимум объёма материала конструкции:

$$V = \sum_{k=1}^{m} V_k \to \min, \quad k = 1,2,...,m \qquad (25)$$

при

$$U = \sum_{k=1}^{m} \overline{\overline{U}}_k \cdot V_k = U_0. \qquad (26)$$

Функция Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$L = \sum_{k=1}^{m} V_k + \;{}_1 \left(U_0 - \sum_{k=1}^{m} \overline{\overline{U}}_k \cdot V_k \right). \qquad (27)$$

Записывая условия её минимума, получим критерий оптимальности, совпадающий с критерием (13):

$$\overline{\overline{U}}_k=\frac{1}{{}_1}=const,\qquad k=1,2...m, \qquad (28)$$

который при учёте условия (26) преобразуется к виду:

$$\overline{\overline{U}}_k=\frac{\overline{\overline{U}}_0}{\sum\limits_{k=1}^{m}V_k}=const,\qquad k=1,2,...,m, \quad (29)$$

Отсюда следует, что выполнение условия постоянства упругого потенциала в каждой точке конструкции обеспечивает в единственном случае нагружения:

1) либо минимум потенциальной энергии деформаций при заданном объёме силового материала конструкции,

2) либо минимум объёма силового материала конструкции при заданном уровне потенциальной энергии деформаций.

Очень часто полученные выводы подвергаются сомнению, поскольку при выводе критерия оптимальности и расчётных формул не учитывается зависимость распределения напряжений в элементах конструкции, а значит и упругих потенциалов, от распределения материала. Дело в том, что определение упругого потенциала (1) – (5) вводится при неизменном распределении материала $_k$,
k = 1, 2, … , m.

Покажем, что все ранее приведённые рассуждения обладают необходимой общностью. Задачу оптимизации будем рассматривать в форме (25) – (27), но при записи необходимых условий минимума функции Лагранжа предположим, что упругий потенциал зависит от распределения материала. Так что производная от энергии деформаций запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial V_k}\left(\sum_{k=1}^{m}\overline{\overline{U}}_k\cdot V_k\right)=\frac{\partial}{\partial V_k}\left(\overline{\overline{U}}_k\cdot V_k\right)+\sum_{i\neq k}^{m-1}\frac{\partial}{\partial V_k}\left(\overline{\overline{U}}_i\cdot V_i\right)=$$

$$=\frac{\partial\overline{\overline{U}}_k}{\partial V_k}V_k+\overline{\overline{U}}_k\frac{\partial V_k}{\partial V_k}+\sum_{i\neq k}^{m-1}\left(\frac{\partial\overline{\overline{U}}_i}{\partial V_k}V_i+\overline{\overline{U}}_i\frac{\partial V_i}{\partial V_k}\right)=$$

$$=\frac{\partial\overline{\overline{U}}_k}{\partial V_k}V_k+\overline{\overline{U}}_k+\sum_{i\neq k}^{m-1}\left(\frac{\partial\overline{\overline{U}}_i}{\partial V_k}V_i\right)=\overline{\overline{U}}_k+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\overline{\overline{U}}_i}{\partial V_k}V_i\right). \quad (30)$$

Здесь временно вынесена энергия k-го элемента из–под знака суммирования и при дифференцировании учтён тот факт, что объёмы элементов варьируются независимо.

Условия минимума функции Лагранжа (27) с учётом (30) принимают вид:

$$\frac{\partial L}{\partial V_k}=1-{}_1\left[\overline{\overline{U}}_k+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\overline{\overline{U}}_i}{\partial V_k}V_i\right)\right]=0,\qquad k=1,2,...,m; \quad (31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\ {}_1}=U_0-\sum_{k=1}^{m}\overline{\overline{U}}_k\cdot V_k=0. \qquad (32)$$

Из уравнений (31) выразим $\overline{\overline{U}}_k$:

$$\overline{\overline{U}}_k=\frac{1}{\ }-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\overline{\overline{U}}_i}{\partial V_k}V_i\right);\qquad k=1,2,...,m \qquad (33)$$

и подставим в уравнение (32). Получим

$$\frac{1}{\ }=\frac{U_0}{\sum\limits_{k=1}^{m}V_k}+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\overline{\overline{U}}_i}{\partial V_k}V_i\right). \qquad (34)$$

Критерий оптимальности (33) с учётом (34) принимает окончательный вид:

$$\overline{\overline{U}}_k=\frac{U_0}{\sum\limits_{k=1}^{m}V_k}=const;\qquad k=1,2,...,m \qquad (35)$$

и полностью совпадает с критерием (29), полученным без явного учёта зависимости упругого потенциала от распределения материала. Конечно, такая зависимость существует, но опосредованно, через действующие напряжения в элементах конструкции.

Отсюда следует, что критерий оптимальности в виде требования одинаковой величины упругого потенциала в каждой точке конструкции обладает необходимой общностью и может быть применён для оптимизации любых типов конструкций. Более того, доказательство сходимости алгоритма поиска наиболее жёстких конструкций, предложенное А.А. Комаровым [2], получает необходимый теоретический базис. До сих пор не было уверенности, что переход к новому распределению материала на основании усилий в элементах конструкции, соответствующих предыдущему распределению материала, действительно уменьшит энергию деформаций. Теперь эта неуверенность устранена, и доказательство А.А.Комарова сходимости алгоритма оптимизации применимо к любым энергетическим критериям оптимальности и любым типам конструкций.

Естественный ход оптимизации выглядит следующим образом.

1. Назначим некоторое начальное распределение материала $_{k0}$ по элементам конструкции и подсчитаем его объём V_0.

2. Проведем расчёт напряжённо-деформированного состояния конструкции и вычислим эквивалентные напряжения $^{экв}_{k0}$ в каждом элементе конструкции k=1, 2, …, m.

3. На основании критериев оптимальности и с учётом специфики силовой компоновки и работы конструкции вычислим новые толщины элементов. Попутно подсчитаем значение упругого потенциала в каждом элементе k=1, 2 ,…, m.

4. Вычислим минимальное и максимальное значение критерия оптимальности: $_{min}$ и $_{max}$. Если расхождение невелико, то алгоритм свою работу заканчивает. В противном случае примем полученное распределение материала $_{k}$ в качестве начального и перейдём к пункту 2.

В теле алгоритма намеренно не приводятся расчётные формулы, так как практическая реализация этой очень несложной последовательности отличается большим авторским разнообразием. Причины тому в следующем.

1. Если начальная конструкция статически определима, то алгоритм сходится за одну итерацию, так как удельная энергия деформаций (упругий потенциал) не зависит от распределения материала (толщин элементов), а определяется только внешними нагрузками. Если начальная конструкция статически неопределима, то изменение распределения материала приводит к перераспределению внутренних потоков сил. Поэтому необходимо повторять итерационный процесс до выполнения критерия останова. В доступной литературе не встречалось использование упругого потенциала в качестве такого критерия, хотя он наиболее теоретически обоснован. Многие авторы принимают в качестве меры достижения оптимума малое изменение объёма материала конструкции.

2. Как быть, если конструкция подвержена спектру нагрузок? Некоторые исследователи [2, 3] понимают равнопрочность как непревышение напряжения от каждой из нагрузок величины допускаемого напряжения в соответствии с материалом элемента. В этом случае говорят, что толщина назначается как «огибающая по напряжениям». В строительстве, напротив, весь спектр нагрузок принято приводить к максимальной нагрузке (обычно векторным суммированием) и толщины назначать, исходя из такой максимальной нагрузки. В авиации такой подход недопустим, поскольку нагрузка на самолёт действует и вверх и вниз, тогда как вертикальная сила, действующая на здание, – это обычно сила гравитации (если не учитывается сейсмическая нагрузка). В этом случае толщина назначается исходя из «огибающей по нагрузкам». Но будет ли найденная конструкция оптимальной?

3. Как поступать, если изначально известно, что конструкция должна состоять из различных материалов? В приведённом алгоритме в этом случае считается правильным использование формул (19), (21). Однако типичным является другой подход. Материал считается одинаковым, проводится оптимизация с использованием формулы (24), а затем толщины элементов пересчитываются так, чтобы сохранить полученное значение жёсткости (E*), где E – модуль упругости, – толщина элемента. При этом может произойти нарушение условий прочности, что можно исправить пропорциональным увеличением толщин всех элементов. Но при этом неизбежна «утечка» оптимальности.

4. Какими элементами моделировать конструкцию? Как быть, если в пределах элемента имеется переменное поле напряжений, а толщина элемента по технологическим или иным причинам должна быть одинаковой во всех точках? Напря-

жение в какой точке элемента принять за расчётное?

Перечень вопросов можно продолжить, и конструктор, занимающийся реальным проектированием, решает возникающие проблемы с учётом специфики силовой работы разрабатываемой конструкции. Именно поэтому алгоритмы оптимального проектирования с учётом прочности разнообразны, их построение опирается на опыт и интуицию конструктора и находится на грани искусства. Вообще, методы оптимального проектирования конструкций – это обширная и творчески благодатная область науки и техники, в которой ещё много нерешённых проблем.

Библиографический список

1. 1. Хан, Х. Теория упругости: Основы линейной теории и её применения [Текст]: [пер. с нем.] / Х. Хан. – М.: Мир; 1988. – 344 с.
2. Комаров, А. А. Основы проектирования силовых конструкций [Текст] / А. А. Комаров. – Куйбышев: Куйбыш. книжн. изд-во, 1965. – 88 с.
3. Комаров, В. А. О рациональном распределении материала в конструкциях [Текст] / В. А. Комаров // Известия АН СССР, Механика. – 1965. – №5. – С. 85-88.

References

1. Hahn, H. G. Theory of elasticity: basics of linear theory and its applications [Text]: [translated from German] / H. Hahn. – Moscow: Mir, 1988. – 344 p.
2. Komarov, A. A. Basics of structural design [Text] / A. A. Komarov. – Kuibyshev: Kuibyshev’s publishing house, 1965. – 88 p.
3. Komarov, V. A. Rational material distribution in structures [Text] / V. A. Komarov // Proceedings of the Russian Academy of Sciences, Mechanics. – 1965. – No. 5. – PP. 85-88.

ENERGY OPTIMALITY CRITERIA

Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov
(National Research University)

The physical essence of the energy optimality criteria and their interrelation with the strength balance is shown from the common point of view. The dualism of the elastic potential constancy requirement is shown. A. A. Komarov’s proof of optimization algorithm convergence has been justified theoretically on the basis of energy optimality criteria. Problems arising in the practical realization of the theory are identified.

Optimality criteria, deformation energy, elastic potential.

Информация об авторах

Данилин Александр Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры эксплуатации авиационной техники. Самарский аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: теория и реализация методов оптимального проектирования авиационных и космических конструкций. E–mail: alexdan@ssau.ru.

Danilin Alexander Ivanovitch, doctor of technical sciences, professor, professor of the department of aircraft maintenance. Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). Area of research: theory and realization of optimality criteria methods for aircraft and spacecraft structures. E–mail: alexdan@ssau.ru.