

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС СПУСКАЕМОГО АППАРАТА С ТРИГАРМОНИЧЕСКОЙ МОМЕНТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ПРИ ВХОДЕ В АТМОСФЕРУ

© 2010 Е.В. Баринова, И.А. Тимбай

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королёва  
(национальный исследовательский университет)

Рассматривается пространственное движение относительно центра масс неуправляемого спускаемого аппарата, аэродинамический восстанавливающий момент которого описывается нечётным рядом Фурье по углу атаки с тремя первыми гармониками. Найдены аналитические выражения для интеграла действия, взятого вдоль сепаратрис, выраженные через элементарные функции и эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода. Определён момент перехода между различными областями фазовой плоскости. Найдены формулы для определения вероятности захвата в ту или иную область. Определён момент времени, когда на фазовом портрете появляется дополнительное положение равновесия. Найдено аналитическое условие, определяющее начальную угловую скорость, обеспечивающую отсутствие дополнительных положений равновесия по углу атаки на заданном интервале времени.

*Спускаемый аппарат, аэродинамический восстанавливающий момент, фазовый портрет, сепаратриса, интеграл действия, вероятность.*

Рассматривается пространственное движение неуправляемого осесимметричного спускаемого аппарата (СА) относительно центра масс на начальном участке траектории спуска в атмосферу, когда можно пренебречь изменением скорости центра масс и угла наклона траектории, а также гравитационным моментом и аэродинамическим демпфированием. Исследуется случай, когда в процессе спуска происходит изменение характера движения – колебательное движение «скачкообразно» переходит в колебательное движение с другими амплитудными характеристиками. В [1 – 3] рассмотрены переходные режимы движения СА с синусоидальной и бигармонической моментными характеристиками. В [4] исследовано плоское движение СА с тригармонической моментной характеристикой. В данной работе рассматривается пространственное движение СА с тригармонической моментной характеристикой. Такая зависимость характерна для аппаратов

сложной геометрической формы, например, типа «Викинг» [5].

Движение СА относительно центра масс при указанных выше допущениях описывается системой с медленно меняющимися параметрами вида [2]:

$$\ddot{\theta} + F(\theta) = 0, \quad F(\theta) = (G - R \cos \theta)(R - G \cos \theta) / \sin^3 \theta + a \sin \theta + b \sin 2\theta + c \sin 3\theta, \quad (1)$$

$$R = \frac{K_0 \cos \theta_{x0}}{I_n}, \quad G = \frac{K_0 \cos \theta_{n0}}{I_n},$$

$$K_0 = I_{x_{x0}} + I_{n_{n0}}, \quad a = a(\theta), \quad b = b(\theta), \quad c = c(\theta).$$

Здесь

– пространственный угол атаки (угол между продольной осью СА и вектором скорости центра масс);

$K_0$  – начальное значение кинетического момента;

$I_x, I_n$  – продольный и поперечный моменты инерции СА;

$\theta_{x0}, \theta_{n0}$  – начальные продольная и поперечная угловые скорости;

$R = const$ ,  $G = const$  – отнесённые к поперечному моменту инерции проекции вектора кинетического момента на продольную ось СА и на направление вектора скорости центра масс;

$\kappa$ ,  $\nu$  – углы, которые характеризуют соответственно положение продольной оси СА относительно вектора кинетического момента и вектора кинетического момента относительно вектора скорости центра масс на границе атмосферы, где влиянием аэродинамических моментов можно пренебречь [2];

$a(z)$ ,  $b(z)$ ,  $c(z)$  – коэффициенты моментной характеристики;

$z$  – медленно меняющийся параметр, переменность которого связана с медленным изменением плотности атмосферы в процессе спуска.

Начальные значения пространственного угла атаки  $\theta_0$  и угловой скорости  $\dot{\theta}_0$  на границе атмосферы определяются по формулам [2]:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \arccos(\cos \nu \cos \kappa - \sin \nu \sin \kappa \cos \theta_0), \\ \dot{\theta}_0 &= -\frac{K_0 \sin \nu \sin \kappa \sin \theta_0}{I_n \sin \theta_0}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$\theta_0$  – угол, определяющий положение продольной оси СА в конусе внеатмосферной прецессии, отсчитываемый в плоскости, перпендикулярной оси прецессии.

Коэффициенты уравнения движения (1), если зависимость плотности атмосферы от высоты аппроксимировать экспонентой, могут быть представлены в виде [3]:

$$\begin{aligned} a &= a_0 z, \quad b = b_0 z, \quad c = c_0 z, \\ a_0 &= -m_a S l_0 \frac{V_0^2}{2I_n}, \quad b_0 = -m_b S l_0 \frac{V_0^2}{2I_n}, \\ c_0 &= -m_c S l_0 \frac{V_0^2}{2I_n}, \end{aligned}$$

$$z = e^{-t}, \quad \dot{\theta} = V_0 |\sin \theta_0|,$$

где

$m_a, m_b, m_c$  – постоянные коэффициенты,  $S$  – характерная площадь,

$l$  – характерный размер СА,

$V_0$  – скорость,

$\theta_0$  – угол наклона траектории,

$\rho_0$  – плотность атмосферы в начальный момент времени  $t = 0$ ,

$\rho'$  – логарифмический градиент плотности атмосферы по высоте.

Для выяснения общих свойств движения СА, описываемого системой (1), воспользуемся методом фазовой плоскости. Интеграл энергии системы в случае невозмущённого движения, когда коэффициенты  $a, b, c$  постоянны ( $z = const$ ), имеет вид:

$$E = \dot{\theta}^2 / 2 + W(\theta) = h, \quad (3)$$

$$W(\theta) = W_g(\theta) + W_r(\theta),$$

$$W_g(\theta) = \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \theta}{2 \sin^2 \theta},$$

$$W_r(\theta) = -(a-c) \cos \theta - b \cos^2 \theta - \frac{4}{3} c \cos^3 \theta,$$

где

$W(\theta)$  – приведённая потенциальная энергия системы.

Экстремальные значения функции  $W(\theta)$  соответствуют состояниям равновесия уравнения (1), т.е. особым точкам на фазовой плоскости. В случае плоского движения ( $R=G=0$ ) в зависимости от значения коэффициентов  $a, b, c$  на отрезке  $[0; \pi]$  могут существовать две, три или четыре особые точки [4]. В случае пространственного движения в зависимости от соотношения величин  $a, b, c, R, G$  может существовать одна особая точка типа «центр», и при этом на фазовом портрете имеет место одна колебательная область (рис. 1а) или три особые точки: две типа «центр» и одна типа «седло», и при этом на фазовом портрете имеют место три колебательные области – одна внешняя и две внутренние (рис. 1б). Качественный анализ уравнения (1) показывает, что если седловая точка внутри интервала  $(0; \pi)$  отсутствует в плоском случае, то она отсутствует и в случае пространственных колебаний независимо от величин  $R$  и  $G$ . С другой стороны, если в плоском случае сед-

ловая точка существует (выполняется условие

$$|(-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4c^2}) / 4c| < 1),$$

то обеспечить её отсутствие можно только выбором достаточно больших по модулю конечных  $R$  и  $G$ . На границе атмосферы, где влиянием аэродинамических моментов можно пренебречь, определяющим в выражении для приведённой потенциальной энергии является

гироскопический член  $W_g(\alpha)$ , и фазовый портрет имеет вид, изображённый на рис. 1а. По мере роста плотности атмосферы растут аэродинамические коэффициенты, соответственно увеличивается влияние составляющей  $W_r(\alpha)$ , и на фазовом портрете могут появиться ещё одно устойчивое и одно неустойчивое положения равновесия.

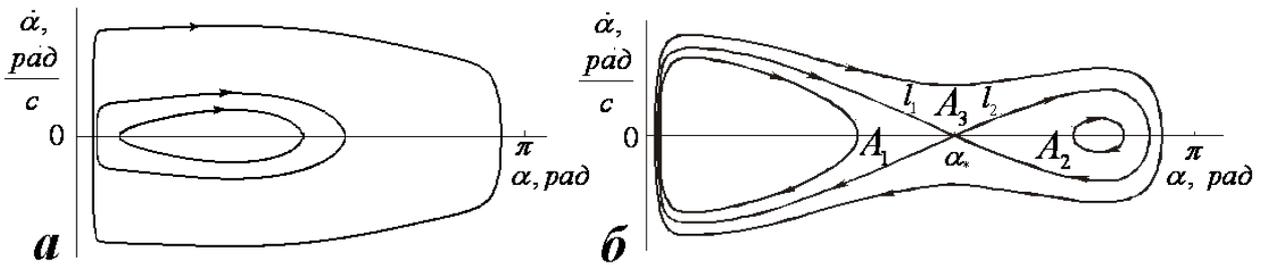


Рис. 1. Фазовый портрет системы:

а) с одной колебательной областью; б) с тремя колебательными областями

Определим время  $t_n$  появления дополнительных положений равновесия, а следовательно, изменения фазового портрета с вида, представленного на рис. 1а, на вид, представленный на рис. 1б. Значениям угла  $\alpha$  на интервале  $(0, \pi)$  взаимно однозначно соответствуют значения переменной  $u = \cos \alpha$  на интервале  $(-1, +1)$ . С учётом замены  $u = \cos \alpha$  интеграл энергии (3) можно записать в виде

$$\frac{\dot{u}^2}{2(1-u^2)} + W(u) = E, \tag{4}$$

где

$$W(u) = W_g(u) + W_r(u),$$

$$W_g(u) = \frac{R^2 + G^2 - 2RGu}{2(1-u^2)},$$

$$W_r(\alpha) = -(a-c)u - bu^2 - \frac{4}{3}cu^3.$$

Время  $t_n$  определяется из условия появления двух совпадающих в этот момент особых точек, что осуществляется при одновременном выполнении соотношений  $W'(u) = 0, W''(u) = 0$ . Раз-

решая эти соотношения относительно  $t_n$ , имеем

$$t_n = \frac{1}{\omega} \ln \left( \frac{-2RGu_n(u_n^2 + 3) + (R^2 + G^2)(3u_n^2 + 1)}{(2b_0 + 8c_0u_n)(1-u_n^2)^3} \right), \tag{5}$$

где

$u_n \in (-1; 1)$  – корень решения уравнения пятой степени:

$$u^5 + \left(\frac{-5}{4} + \frac{3}{8}\right)u^4 + \left(\frac{-}{2} + \frac{+}{8} + \frac{11}{8}\right)u^3 + \left(\frac{7}{16} + \frac{3}{4} - \frac{3}{16}\right)u^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{7}{8}\right)u \tag{6}$$

$$-\frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = 0,$$

$$= \frac{R^2 + G^2}{RG} = \frac{\cos \alpha_v}{\cos \alpha_k} + \frac{\cos \alpha_k}{\cos \alpha_v},$$

$$= \frac{a}{c} = \frac{m_a}{m_c}, \quad = \frac{b}{c} = \frac{m_b}{m_c}.$$

В случае, когда при решении уравнения (6) получается несколько значений  $u_n$  на интервале  $(-1, +1)$ , следует выбрать то значение, которому соответствует наименьшее действительное значение  $t_n$ .

Рассмотрим случай, когда в процессе снижения произошло изменение фазового портрета. В этом случае СА, совершающий

колебательные движения во внешней колебательной области  $A_3$ , по мере роста плотности атмосферы в некоторый момент продолжит совершать колебания в одной из внутренних областей  $A_1$  или  $A_2$  (рис. 1б).

Для изучения движения СА, описываемого системой с медленно меняющимися параметрами (1), будем использовать интеграл действия, записанный в форме

$$I = \int_{\min}^{\max} \dot{\alpha} d\alpha, \tag{7}$$

где

$\alpha_{\min}$  и  $\alpha_{\max}$  – соответственно минимальное и максимальное значения амплитуды угла атаки, величина  $\dot{\alpha}$  определяется из (3).

Для системы (1) равенство  $I = const$  справедливо для большинства начальных условий с точностью  $O(\ln \epsilon)$  на временах порядка  $1/\epsilon$  [6], где  $\epsilon$  – малый параметр, характеризующий скорость изменения параметра  $z$ . Исключительное множество начальных условий, для которых эта оценка несправедлива, имеют меру  $O(\epsilon^n)$ , где  $n \geq 1$  – любое наперёд заданное число. Режимы движения, соответствующие данным начальным условиям, называются режимами зависания СА в окрестности неустойчивого положения равновесия [2] и в статье не рассматриваются.

В основу анализа движения системы положены аналитические выражения для интеграла действия (7). Момент времени, соответствующий переходу из внешней колебательной области во внутреннюю, определяется из равенства выражения интеграла действия, вычисленного вдоль сепаратрисы, значению интеграла действия, вычисленного по начальным условиям движения. Величина угла атаки в момент перехода, в общем случае, зависит от начальных условий углового движения (от законов распределения начальных углов атаки и

угловых скоростей), а также от скорости изменения коэффициентов  $a(z), b(z), c(z)$ . Предполагается, что СА за время движения от  $t=0$  до границы перехода совершено несколько колебаний.

Так как при пересечении сепаратрисы фазовая точка может попадать в различные колебательные области, возникает задача выбора области продолжения движения. Пусть сепаратрисы  $l_1, l_2$  отделяют внутренние области движения  $A_1, A_2$  от внешней  $A_3$  (рис. 1б). Для выбора области продолжения движения  $A_1$  или  $A_2$  используется понятие вероятности  $P_1$  или  $P_2$  захвата в каждую из них. В соответствии с [7] эта вероятность определяется как доля фазового объёма малой окрестности начальной точки движения, «захватываемая» в рассматриваемую область в пределе, когда малый параметр  $\epsilon \rightarrow 0$  и размер окрестности  $\Delta \rightarrow 0, \Delta \ll \Delta$ , причём  $P_1 + P_2 = 1$ . Отношение вероятностей вычисляется по формулам

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}, \tag{8}$$

$$\Theta_i = - \int_{l_i} \frac{\partial [H(\alpha, z) - H(0, z)]}{\partial z} \Phi_z dt \quad (i=1,2), \tag{9}$$

где

$$H = \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + W(\alpha) - \text{гамильтониан};$$

$$\Phi_z = \dot{z} = z;$$

$\alpha^* = 0, z^* = z^*$  – координаты седловой особой точки на фазовом портрете.

Интегралы (9) вычисляются вдоль сепаратрис  $l_1$  и  $l_2$ , параметризованных временем  $t$  невозмущённого движения по ним. Физический смысл функции  $\Theta_i$  – скорость приближения площади, ометаемой фазовой траекторией, к площади, ограниченной сепаратрисой.

Найдём аналитические выражения для интеграла действия на сепаратрисах:  $I_1, I_2$  – интегралы действия, взятые соответственно вдоль сепаратрис  $l_1, l_2$ , проходящих через седловую точку  $(\alpha^*, z^*)$  (рис. 1б). Под-

ставляя замену  $u = \cos$  в (7), получим выражение для интеграла действия:

$$I = \int_{u_2}^{u_1} \sqrt{\frac{f(u)}{1-u^2}} du, \quad (10)$$

где

$$f(u) = \frac{-8c}{3} \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{h_*}{c} - \right) u^2 + \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{RG}{c} \right) u - \frac{3h_*}{4c} + \frac{3(G^2 + R^2)}{8c} \right], \quad (11)$$

$$u_1 = \cos \max,$$

$$u_2 = \cos \min,$$

$$h_* = W(\ast).$$

Многочлен  $f(u)$  на сепаратрисе имеет пару кратных корней  $u_* = \cos \ast$  и три действительных корня  $u_1, u_2, u_3$ , причём  $u_1 > u_2 > u_3$ . Перепишем  $f(u)$  в следующем виде:

$$f(u) = \frac{-8c}{3} (u-u_*)^2 (u-u_1)(u-u_2)(u-u_3). \quad (12)$$

Подставив многочлен  $f(u)$  в формулу для интеграла действия (10) и проинтегрировав, получим

$$I_1 = \int_{\min}^{\ast} d = \sqrt{2|c|} \times \quad (13)$$

$$\left[ q_1 + q_0 \left[ q_2 (F(\ast, k) - K(k)) + q_3 (E(\ast, k) - E(k)) + q_4 (\Pi(\ast, -n_1, k) - \Pi(\ast, -n_1, k)) + q_5 (\Pi(\ast, -n_2, k) - \Pi(\ast, -n_2, k)) \right] \right],$$

$$I_2 = \int_{\ast}^{\max} d = \sqrt{2|c|} \times \quad (14)$$

$$\left[ q_1 + q_0 (q_2 F(\ast, k) + q_3 E(\ast, k) + q_4 \Pi(\ast, -n_1, k) + q_5 \Pi(\ast, -n_2, k)) \right],$$

где

при  $c > 0$

$$\ast = \arcsin \sqrt{\frac{(u_1 - u_3)(u_* - u_2)}{(u_1 - u_2)(u_* - u_3)}},$$

$$k = \sqrt{\frac{(u_1 - u_2)}{(u_1 - u_3)}}, \quad n_1 = \frac{(1 + u_3)k^2}{(1 + u_2)},$$

$$n_2 = \frac{(1 - u_3)k^2}{(1 - u_2)}, \quad q_0 = \frac{4(u_2 - u_3)}{\sqrt{3(u_1 - u_3)}},$$

$$q_1 = -\frac{4}{3}(u_1 + u_2 + 2u_3 + 2u_*) \sqrt{\frac{(u_1 - u_*)(u_2 - u_*)}{3(u_3 - u_*)}},$$

$$q_2 = \frac{1}{3}(u_1 - u_3),$$

$$q_3 = \frac{(u_1 + u_2 + u_3 + 3u_*)(u_1 - u_3)}{3(u_2 - u_3)},$$

$$q_4 = \frac{-1}{2}(u_1 + 1)(u_* + 1),$$

$$q_5 = \frac{1}{2}(u_1 - 1)(u_* - 1);$$

при  $c < 0$

$$\ast = \arcsin \sqrt{\frac{(u_* - u_3)}{(u_2 - u_3)}}, \quad k = \sqrt{\frac{(u_2 - u_3)}{(u_1 - u_3)}},$$

$$n_1 = \frac{(u_2 - u_3)}{(1 - u_3)}, \quad n_2 = \frac{-(u_2 - u_3)}{(1 + u_3)},$$

$$q_0 = \frac{-4}{\sqrt{3(u_1 - u_3)}},$$

$$q_1 = \frac{4}{3\sqrt{3}} \sqrt{(u_1 - u_*)(u_2 - u_*)(u_* - u_3)},$$

$$q_2 = \frac{1}{3} \left( u_1^2 - u_1 u_3 - u_2 u_1 - 8u_2 u_3 - 3u_* u_3 - \right),$$

$$q_3 = \frac{-1}{3}(u_1 + u_2 + u_3 + 3u_*)(u_1 - u_3),$$

$$q_4 = \frac{-1}{2}(u_1 - 1)(u_2 - 1)(u_* - 1),$$

$$q_5 = \frac{1}{2}(u_1 + 1)(u_2 + 1)(u_* + 1).$$

Определим время  $t_*$ , соответствующее переходу из внешней колебательной области во внутреннюю. Исходя из постоянства интеграла действия  $I_0 = I_1 + I_2$ , учитывая (13), (14), имеем

$$I_0 = \sqrt{2|c_*|} \left\{ q_1 + q_0 \left[ q_2 (2F(\ast, k) - K(k)) + q_3 (2E(\ast, k) - E(k)) + q_4 (2\Pi(\ast, -n_1, k) - \Pi(\ast, -n_1, k)) + q_5 (2\Pi(\ast, -n_2, k) - \Pi(\ast, -n_2, k)) \right] \right\}, \quad (15)$$

где

$c_*$  – значение коэффициента  $c$  в момент перехода;

$I_0$  – значение интеграла действия, которое определяется по начальным условиям и в общем случае вычисляется по формуле (7).

В случае, когда коэффициенты  $a_0, b_0, c_0$  малы по сравнению с угловой скоростью в начальный момент времени, интеграл действия  $I_0$  можно вычислить [5] по формуле

$$I_0 = [\sqrt{2h_0} - \max(|R|, |G|)]$$

Перепишем (15) в виде

$$c_* = \frac{1}{2} \text{sign}(c_0) \{ I_0 / [q_1 + q_0 [q_2 (2F(\cdot, k) - K(k)) + q_3 (2E(\cdot, k) - E(k)) + q_4 (2\Pi(\cdot, -n_1, k) - \Pi(\cdot, -n_1, k)) + q_5 (2\Pi(\cdot, -n_2, k) - \Pi(\cdot, -n_2, k))] \}^2. \quad (16)$$

Коэффициент  $c_*$  определяется путём совместного решения уравнения (16) с определением корней многочлена (11).

Тогда, учитывая, что

$$c_* = c_0 \exp(-t_*),$$

время перехода из внешней колебательной области во внутреннюю определяется по формуле

$$t_* = \frac{1}{c_0} \ln \left( \frac{c_*}{c_0} \right).$$

Вероятности попадания в колебательные области  $A_1$  или  $A_2$  с учётом (8), (9) вычисляются следующим образом:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{p_1 + p_2 (F(\cdot, k) - K(k)) + p_3 (E(\cdot, k) - E(k))}{p_1 + p_2 (F(\cdot, k)) + p_3 (E(\cdot, k))}, \quad (17)$$

где

при  $c > 0$

$$p_1 = -(8u_1 + 8u_2 + 4u_3 + 16u_* + 9) \sqrt{\frac{(u_1 - u_*)(u_2 - u_*)}{(u_3 - u_*)}},$$

$$p_2 = \left( \frac{12u_*^2 + 8u_3^2 - 4u_1u_2 + 4u_1u_3 + 4u_2u_3 + 9}{12u_3u_* + 9u_3 + 9u_* + 9} \right) \times \frac{1}{\sqrt{(u_1 - u_3)}},$$

$$p_3 = (8u_1 + 8u_2 + 8u_3 + 12u_* + 9) \sqrt{(u_1 - u_3)},$$

при  $c < 0$

$$p_1 = 4 \sqrt{(u_1 - u_*)(u_2 - u_*)(u_3 - u_*)},$$

$$p_2 = \left( \frac{12u_*^2 + 8u_1^2 + 4u_1u_2 + 4u_1u_3 - 4u_2u_3 + 9}{12u_1u_* + 9u_1 + 9u_* + 9} \right) \frac{1}{\sqrt{(u_1 - u_3)}},$$

$$p_3 = -(8u_1 + 8u_2 + 8u_3 + 12u_* + 9) \sqrt{(u_1 - u_3)}.$$

Избежать случая изменения фазового портрета в процессе снижения и, как следствие, «скачкообразного» изме-

нения амплитудных характеристик на заданном промежутке времени можно двумя способами: выбором формы СА и положения его центра масс или заданием начальных условий. Для устранения переходов первым способом необходимо выбирать форму СА и положение его центра масс таким образом, чтобы для коэффициентов моментной характеристики не выполнялось условие:

$$|(-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4c^2}) / 4c| < 1.$$

Рассмотрим задачу выбора начальных условий движения, позволяющих избежать «скачкообразного» изменения амплитудных характеристик на заданном промежутке времени  $\Delta t$ . Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие  $\Delta t \leq t_n$ . С учётом (1), (5) ограничение на величину минимального начального кинетического момента  $K_0$  имеет вид:

$$K_0 \geq \sqrt{\frac{e^{\Delta t} I_n^2 (2b_0 + 8c_0 u_n) (1 - u_n^2)^3}{\cos \alpha \cos \nu (-2u_n (u_n^2 + 3) + (3u_n^2 + 1))}}. \quad (18)$$

Если в начальный момент времени поперечная угловая скорость  $\omega_{n0} = 0$  ( $\alpha = 0$ ), то кинетический момент  $K_0 = I_x \omega_{x0}$ . Тогда из (18) получим ограничение на величину минимальной начальной продольной угловой скорости  $\omega_{x0}$ :

$$\omega_{x0} \geq \sqrt{\frac{e^{\Delta t} I_n^2 (2b_0 + 8c_0 u_n) (1 - u_n^2)^3}{I_x^2 (-2u_n (u_n^2 + 3) \cos \alpha_0 + (3u_n^2 + 1) (\cos^2 \alpha_0 + 1))}}, \quad (19)$$

где  $\alpha_0 = \alpha$  — начальное значение угла атаки.

Для иллюстрации переходных режимов движения на рис. 2 показан характер изменения пространственного движения СА со следующими характеристиками:

$$m = 3 \text{ кг}, \quad I_n = 0,04 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$I_x = 0,035 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad S = 0,1257 \text{ м}^2,$$

$$l = 0,4 \text{ м}, \quad m_a = 0,0183,$$

$$m_b = -0,0106, \quad m_c = -0,0253;$$

для условий входа в атмосферу:

$$K_0 = 0,03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}, \quad \nu = 1 \text{ рад},$$

$$\alpha = 0,5 \text{ рад}, \quad \omega_{x0} = 2 \text{ рад},$$

$$V_0 = 7830 \text{ м/с}, \quad \vartheta = -1,5^\circ,$$

$$H_0 = 140000 \text{ м},$$

$$= \frac{1}{7000} \text{ м}^{-1}.$$

Сначала СА совершает колебания в единственной колебательной области, так как фазовый портрет аналогичен представленному на рис. 1а. В момент времени  $t_n = 143,9 \text{ с}$  происходит смена фазового портрета и СА совершает колебательные движения во внешней колебательной области (рис. 1б). В момент  $t_* = 161 \text{ с}$  происходит изменение характера движения и СА продолжает совер-

шать колебания с меньшей амплитудой во внутренней колебательной области. Вероятности попадания в колебательные области согласно (17):

$$P_1 = 14,4\%, \quad P_2 = 85,6\%.$$

Следует отметить, что вычисление вероятности попадания в колебательные области путём многократного численного интегрирования дифференциального уравнения (1) подтверждает полученный результат.

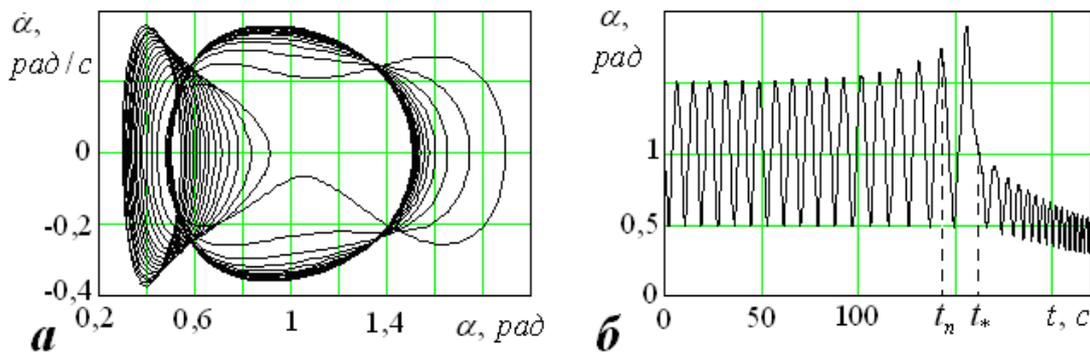


Рис. 2. Характер изменения параметров пространственного движения:  
а – фазовая траектория, б – зависимость угла атаки от времени

Избежать «скачкообразного» изменения амплитудных характеристик для указанного СА можно заданием начальных условий. Например, при  $\Delta t = 350 \text{ с}$ , согласно (18), необходимо обеспечить величину минимального начального кинетического момента:  $K_0 \geq 0,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$ . Если задать  $K = 0$  ( $\omega_{n0} = 0$ ), при этом  $\omega_0 = \omega_v = 1 \text{ рад}$ , то в соответствии с (19) необходимо обеспечить начальное значение угловой скорости  $\omega_{x0} \geq 12,6 \text{ рад} / \text{с}$ . На рис. 3 приведены значения минимальной начальной продольной угловой скорости  $\omega_{x0}$  при различных начальных значениях угла атаки  $\alpha_0 = \alpha_v$ .

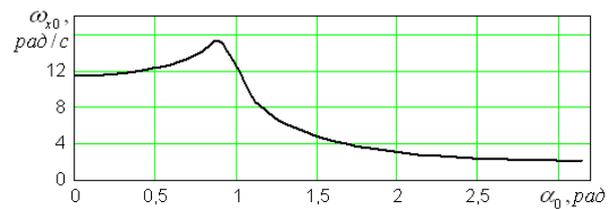


Рис. 3. Зависимость  $\omega_{x0}$  от  $\alpha_0$

Полученные в данной работе формулы позволяют для СА с тригармонической моментной характеристикой определить время перехода между областями фазовой плоскости, не прибегая к численному интегрированию, а также вероятности попадания в колебательные области без проведения статистических расчётов. Найдено аналитическое условие для начальной угловой скорости, позволяющее избежать «скачкообразного» изменения амплитудных характеристик на заданном

промежутке времени в процессе снижения.

### Библиографический список

1. Кузмак, Г. Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу [Текст] / Г. Е. Кузмак. – М.: Наука, 1970.
2. Ярошевский, В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере [Текст] / В. А. Ярошевский. – М.: Машиностроение, 1978.
3. Асланов, В.С. Переходные режимы углового движения КА на верхнем участке траектории спуска [Текст] / В.С. Асланов, И. А. Тимбай // Космические исследования. – 1997. – Т. 35. – № 3. С. 279-286.
4. Баринаова, Е. В. Исследование плоского движения относительно центра масс спускаемого аппарата с тригармонической моментной характеристикой при входе в атмосферу [Текст] / Е. В. Баринаова, И. А. Тимбай // Вестн. Самар. гос. аэрокосм. унта. – 2010. – № 1 (21). – С. 9 – 19.
5. Асланов, В. С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере [Текст] / В. С. Асланов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. Нейштадт, А.И. Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису [Текст] / А. И. Нейштадт // Физика плазмы. – 1986. – Т.12. – Вып. 8. – С. 992 – 1001.
7. Лифшиц, И.М. Об особенностях движения заряженных частиц в переменном и неоднородном электромагнитном поле [Текст] / И. М. Лифшиц, А. А. Слуткин, В. М. Набутовский // Журн. экспе-

рим. и теорет. физики. – 1961. – Т. 41. – Вып. 3. – С. 939 – 948.

### References

1. Kuzmak, G. E. Dynamics of Uncontrolled Motion of Spacecraft at Their Reentry into the Atmosphere [Text] / G. E. Kuzmak. – Moscow: Nauka, 1970.
2. Yaroshevskii, V. A. Motion of an Uncontrolled Body in the Atmosphere [Text] / V. A. Yaroshevskii. – Moscow: Mashinostroenie, 1978.
3. Aslanov, V. S. Transient Modes of Spacecraft Angular Motion on the Upper Section of the Reentry Trajectory [Text] / V. S. Aslanov, I. A. Timbai // Kosm. Issled., 1997, vol. 35, no. 3, p. 279 – 286.
4. Barinova, E. V. Research of Planar Motion of an Uncontrolled Spacecraft with the Treegarmonic Moment Characteristics around its Center of Mass at its Reentry into Atmosphere, [Text] / E. V. Barinova, I. A. Timbai // Vestnik SSAU, 2010, no. 1 (21), p. 9 – 19.
5. Aslanov, V. S. Space Motions of a Reentry Spacecraft in the Atmosphere [Text] / V. S. Aslanov. – Moscow: FIZMATHLIT, 2004.
6. Neishtadt, A. I., Variation of Adiabatic Invariant Crossing the Separatrix [Text] / A. I. Neishtadt // Fiz. Plazmy, 1986. vol.12. no. 8. p. 992 – 1001.
7. Lifshits, I. M. Features of Charged Particle Motion in Changing and Inhomogeneous Electromagnetic Fields [Text] / I. M. Lifshits, A. A. Slutskin, V. M. Nabutovskii // Zh. Eksp. Teor. Fiz., 1961, vol. 41, no. 3, p. 939 – 948.

## RESEARCH OF SPATIAL MOTION OF AN UNCONTROLLED SPACECRAFT WITH THE TRIHARMONIC MOMENT CHARACTERISTICS AROUND ITS CENTER OF MASS DURING ITS REENTRY INTO ATMOSPHERE

© 2010 Ye. V. Barinova, I. A. Timbay

Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov  
(National Research University)

Spatial motion of an uncontrolled spacecraft around its center of mass is considered, the restoring aerodynamic moment of the spacecraft being described by an odd Fourier series in the angle of attack with the three first harmonics. Analytical formulas are deduced for the action integral along separatrix, expressed, in terms of elliptic integrals of the first, second and third kind and of elementary functions. The moments of transition between various phase planes are determined. Formulas for determining the probability of capture into any region are deduced. The moments of additional equilibrium state appearing on the phase plane are determined. The analytical condition that determines the initial angular velocity ensuring the absence of additional equilibrium states on the angle of attack in the given time interval is specified.

*Spacecraft, restoring aerodynamic moment, phase portrait, separatrix, action integral, probability.*

### Информация об авторах

**Барина Елена Витальевна**, аспирант кафедры высшей математики. Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: динамика летательных аппаратов. E-mail: [15545@yandex.ru](mailto:15545@yandex.ru).

**Тимбай Иван Александрович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики. Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: динамика летательных аппаратов. E-mail: [timbai@ssau.ru](mailto:timbai@ssau.ru).

**Barinova Yelena Vitalyevna**, post-graduate student of the department of higher mathematics. Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). Area of research: aircraft dynamics. E-mail: [15545@yandex.ru](mailto:15545@yandex.ru).

**Timbay Ivan Alexandrovitch**, doctor of technical sciences, professor, head of the department of higher mathematics. Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). Area of research: aircraft dynamics. E-mail: [timbai@ssau.ru](mailto:timbai@ssau.ru).