УДК 338.24.01

# ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРАМИ ЛИЗИНГОВОГО КОНТРАКТА

© 2010 О.В. Павлов, Е.А. Фудобина

Самарский государственный аэрокосмический университет
(Национальный исследовательский университет)

В статье формулируются и решаются дискретные задачи оптимального управления лизинговыми платежами исходя из экономических интересов участников сделки. Сумма лизинговых платежей является переменной величиной, зависящей от величины выплат в каждом периоде. Задачи выбора траектории лизинговых платежей формулируются как задачи оптимального управления дискретными системами с фиксированным и нефиксированным временем контракта. С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина определяются оптимальные управления лизинговыми платежами для участников сделки. Решение поставленных задач позволило определить область компромисса, в котором должны находиться параметры лизингового контракта

*Лизинговые платежи, задача оптимального управления, дискретный принцип максимума Понтрягина, оптимальное время переключения, область компромисса*

## Введение

Основными участниками лизинговой сделки являются лизингодатель и лизингополучатель, остальные участники считаются косвенными. В лизинговом контракте указываются условия заключения сделки: стоимость оборудования $K$, величина аванса $K_a$, годовая процентная ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя $i^*$, количество лизинговых платежей $n$, количество лизинговых платежей в год $m$, величины платежей $u_t$ в каждом периоде $t$, $t=\overline{1,n}$. Эти параметры контракта определяют сумму лизинговых платежей, которая отражает экономические интересы лизингодателя и лизингополучателя. Экономические интересы участников сделки являются противоположными: лизинговые платежи, которые получает лизингодатель, выплачивает лизингополучатель. Исходя из экономических интересов, у участников сделки существуют различные предпочтения по выбору управляющих параметров лизингового контракта. Несмотря на противоположные экономические интересы, лизингополучатель и лизингодатель заинтересованы в сотрудничестве: одному необходимо приобрести оборудование, другому продать оборудование через организацию лизинговой сделки.

Рассматривается типичная ситуация, когда ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя начисляется на неоплаченную стоимость лизингового имущества в каждом периоде действия лизингового контракта [1]. В этом случае сумма лизинговых платежей является переменной величиной, зависящей от величины выплат в каждом периоде (траектории лизинговых платежей). В статье формулируются и решаются дискретные задачи оптимального управления лизинговыми платежами исходя из экономических интересов участников сделки. Задачи выбора траектории лизинговых платежей формулируются как задачи оптимального управления дискретными системами. Решение поставленных задач необходимо для выбора параметров лизингового контракта, которые устраивают каждого участника.

### *1. Постановка задач оптимального управления лизинговыми платежами при фиксированном времени контракта*

Рассмотрим задачи управления лизинговыми платежами при фиксированном времени контракта с позиции лизингодателя и лизингополучателя.

В этом случае число периодов $n$ лизингового контракта является фиксированным. Экономические интересы лизингополучателя заключаются в минимизации дисконтированной суммы лизинговых платежей:

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{u_t}{(1+r)^t} \to \min , \quad (1)$$

где $u_t$ – размер лизингового платежа выгодный лизингополучателю в период $t$, $r$ - ставка дисконтирования, $n$ - количество лизинговых платежей.

Для достижения этой цели у лизингополучателя есть возможность выбора траектории лизинговых платежей: $u_1, u_1 \ldots u_n$. Величина платежа лизингополучателя ограничена его финансовыми возможностями и условиями контракта в рассматриваемый период:

$$b_t^{\min} \le u_t \le b_t^{\max}, \quad (2)$$

где $b_t^{\min}$, $b_t^{\max}$ - соответственно минимально и максимально возможные лизинговые платежи в период $t$.

Максимально возможный лизинговый платёж $b_t^{\max}$ определяется финансовым состоянием лизингополучателя. Минимально возможный платёж $b_t^{\min}$ должен быть больше, чем начисляемые проценты на неоплаченную стоимость лизингового имущества в этот период. В противном случае неоплаченная стоимость лизингового имущества будет возрастать.

Неоплаченная стоимость лизингового имущества $x_t$ определяется дискретным уравнением:

$$x_{t+1} = x_t + ix_t - u_t, \; t = 0,\ldots,n, \quad (3)$$

где $i$ – процентная ставка комиссионного вознаграждения в период $t$, $ix_t$ - комиссионное вознаграждение за период $t$.

Ставка комиссионного вознаграждения в период $t$ вычисляется:

$$i = \frac{i^*}{m},$$

где $i^*$ - годовая процентная ставка комиссионного вознаграждения, $m$ – количество лизинговых платежей в год.

В начальный период неоплаченная стоимость лизингового имущества $x_0$ равна:

$$x_0 = K_0 . \quad (4)$$

где $K_0$ - стоимость имущества после выплаты аванса, определяется:

$$K_0 = K - K_a .$$

Лизинговый контракт будет успешно выполнен, если в конечный период вся стоимость лизингового оборудования будет выплачена:

$$x_n = 0 . \quad (5)$$

Дискретные математические уравнения (1)-(5) являются моделью принятия решений для лизингополучателя. Управляющей функцией в этой модели являются лизинговые платежи $u_t, t = 0,\ldots,n$, на которые наложено ограничение (2). Сформулированная задача управления лизинговыми платежами является задачей оптимального управления дискретной системой [2]. Задача оптимального управления состоит в нахождении такого управления $u_t$,, подчинённого ограничению (2), которое переводит дискретную систему (3) из начального состояния (4) в конечное (5), минимизируя критерий оптимальности (1).

Стратегия лизингодателя заключается в максимизации дисконтированной суммы лизинговых платежей:

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{v_t}{(1+r)^t} \to \max . \quad (6)$$

где $v_t$ – размер лизингового платежа выгодный лизингодателю в период $t$.
Величина платежа лизингодателя ограничена:

$$b_t^{\min} \le v_t \le b_t^{\max} . \quad (7)$$

Неоплаченная стоимость лизингового имущества $x_t$ рассчитывается по дискретному уравнению:

$$x_{t+1} = x_t + ix_t - v_t, \; t = 0,\ldots,n . \quad (8)$$

Уравнения (4)-(5), (6)-(8), являются моделью принятия решений для лизингодателя. Задача оптимального управления для лизингодателя состоит в нахождении такого управления $v_t$,, подчинённого ограничению (7), которое переводит дискретную систему (8) из начального состояния (4) в конечное (5), максимизируя критерий оптимальности (6).

***2. Решение задач оптимального управления лизинговыми платежами при фиксированном времени контракта***

Решим задачу оптимального управления для лизингополучателя (1)-(5) с помощью принципа максимума Понтрягина [2]. Запишем гамильтониан:

$$H_t = \Psi_{t+1}[x_t + ix_t - u_t] - \frac{u_t}{(1+r)^t} = \qquad (9)$$
$$= -u_t[\Psi_{t+1} + \frac{1}{(1+r)^t}] + \Psi_{t+1}x_t(1+i).$$

Из условия максимума гамильтониана определим структуру оптимального управления для лизингополучателя:

$$u_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\max}, \ \textit{если} \ \ \Psi_{t+1} + \dfrac{1}{(1+r)^t} \le 0, \\ b_t^{\min}, \ \textit{если} \ \Psi_{t+1} + \dfrac{1}{(1+r)^t} > 0. \end{cases}$$
(10)

Запишем уравнение для сопряжённой переменной:

$$\Psi_t = \frac{\partial H}{\partial x} = \Psi_{t+1}(1+i). \qquad (11)$$

Следует отметить, что сопряжённое уравнение решается независимо от исходного уравнения (3). Так как формула (11) является рекуррентной, можно вывести выражение для сопряжённой переменной через параметры лизингового контракта. Запишем сопряжённую переменную в периоды *t=1, 2,...n* по уравнению (11), считая, что в начальный период времени сопряжённая переменная равна константе $\Psi_0 = C$:

$$\Psi_1 = \frac{\psi_0}{1+i} = \frac{C}{1+i},$$
$$\Psi_2 = \frac{C}{(1+i)^2},$$
$$\Psi_3 = \frac{C}{(1+i)^3}.$$

Обобщая, запишем решение уравнения (11):

$$\Psi_{t+1} = \frac{C}{(1+i)^{t+1}}. \qquad (12)$$

С учётом (12), выражение для оптимального управления лизингополучателя примет вид:

$$u_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\max}, \ \textit{если} \ \dfrac{C}{(1+i)^{t+1}} + \dfrac{1}{(1+r)^t} \le 0 \\ b_t^{\min}, \ \textit{если} \ \dfrac{C}{(1+i)^{t+1}} + \dfrac{1}{(1+r)^t} > 0 \end{cases}.$$
(13)

Из условия (13) следует, что если константа С положительна, то оптимальным будет только одно управление $u_t^{opt} = b_t^{\min}$, а это значит что в конечный период не будет выполнено граничное условие $x_n = 0$. В случае если константа С отрицательна, то условие $\frac{C}{(1+i)^{t+1}} + \frac{1}{(1+r)^t}$ с увеличением периода *t* станет больше нуля и следовательно произойдет переключение управления с $u_t^{opt} = b_t^{\max}$ на $u_t^{opt} = b_t^{\min}$. В этом случае граничное условие будет выполнено. Таким образом, искомое оптимальное управление имеет релейный вид: на начальном этапе лизингового контракта, до достижения периода переключения $t^*_{ЛП}$ лизингополучателю выгодно совершать лизинговые платежи как можно большего размера, а затем минимального размера:

$$u_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\max}, \ \textit{если} \ 0 \le t \le t^*_{ЛП}, \\ b_t^{\min}, \ \textit{если} \ t^*_{ЛП} < t \le n. \end{cases} \qquad (14)$$

Подставив в уравнение (3) оптимальное управление (14), используя граничные условия (4) и (5) возможно определить время переключения для лизингополучателя $t^*_{ЛП}$ в результате пересечения двух траекторий, выходящих из начальной и конечной точек.

Таким образом, можно сделать следующий вывод для лизингополучателя наилучшей будет схема выплат с убывающими лизинговыми платежами.

Аналогично решим задачу оптимального управления (4)-(5), (6)-(8)

для лизингодателя. Запишем гамильтониан:

$$H_t = \Psi_{t+1}[x_t + ix_t - v_t] + \frac{v_t}{(1+r)^t} = \\ = -v_t[\Psi_{t+1} - \frac{1}{(1+r)^t}] + \Psi_{t+1}x_t(1+i). \quad (15)$$

Из условия максимума гамильтониана определим структуру оптимального управления для лизингодателя:

$$v_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\max}, & если \;\; \Psi_{t+1} - \frac{1}{(1+r)^t} \le 0, \\ b_t^{\min}, & если \;\; \Psi_{t+1} - \frac{1}{(1+r)^t} > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Уравнение для сопряжённой переменной запишется аналогично (11). Решение сопряжённого уравнения имеет аналогичный вид (12). С учётом (12), выражение для оптимального управления лизингодателя:

$$v_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\max}, & если \;\; \frac{C}{(1+i)^{t+1}} - \frac{1}{(1+r)^t} \le 0, \\ b_t^{\min}, & если \;\; \frac{C}{(1+i)^{t+1}} - \frac{1}{(1+r)^t} > 0. \end{cases} \quad (17)$$

Из условия (17) следует, что если константа С отрицательна, то оптимальным будет только одно управление $u_t^{opt} = b_t^{\max}$, а это значит что в конечный период не будет выполнено граничное условие $x_n = 0$. В случае если константа С положительна, то условие $\frac{C}{(1+i)^{t+1}} - \frac{1}{(1+r)^t}$ с увеличением периода $t$ станет меньше нуля и следовательно произойдет переключение управления с $v_t^{opt} = b_t^{\min}$ на $v_t^{opt} = b_t^{\max}$. В этом случае граничное условие будет выполнено. Таким образом, искомое оптимальное управление имеет релейный вид: на начальном этапе лизингового контракта, до достижения периода переключения $t^*_{ЛД}$ лизингодателю выгодно лизинговые платежи как можно меньшей величины, а затем максимальной величины:

$$v_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\min}, & если \;\; 0 \le t \le t^*_{ЛД}, \\ b_t^{\max}, & если \; t^*_{ЛД} < t \le n. \end{cases} \quad (18)$$

Подставив в уравнение (3) оптимальное управление (18), используя граничные условия (4) и (5) возможно определить время переключения для лизингодателя $t^*_{ЛД}$ в результате пересечения двух траекторий выходящих из начальной и конечной точек.

Таким образом, можно сделать следующий вывод для лизингодателя наилучшей будет схема выплат с возрастающими лизинговыми платежами. Полученные оптимальные стратегии лизингополучателя (14) и лизингодателя (18) определяют область компромисса, в котором могут находиться траектории лизинговых платежей.

Рассмотрим численный пример. Условия лизингового договора: стоимость лизингового имущества после выплаты аванса $K_0$=1000000 рублей; срок договора $n$=24 месяца; годовая ставка комиссионного вознаграждения $i^*$=12%, лизинговые платежи начисляются ежемесячно $m$=12. Максимально возможные выплаты, которые определяются финансовым положением лизингополучателя, представлены в таблице 1.

Минимально возможные платежи, которые устанавливает лизингодатель, представлены в таблице 2.

Таблица 1. График максимально возможных выплат

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Период | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Выплаты, руб. | 75000 | 75000 | 70000 | 70000 | 65000 | 65000 | 28000 | 28000 |
| Период | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| Выплаты, руб. | 35000 | 35000 | 45000 | 45000 | 60000 | 60000 | 50000 | 50000 |
| Период | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| Выплаты, руб. | 85000 | 85000 | 95000 | 95000 | 100000 | 100000 | 80000 | 80000 |

Таблица 2. График минимально возможных выплат

| Период | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Выплаты, руб. | 25000 | 25000 | 25000 | 25000 | 28000 | 28000 | 28000 | 28000 |
| Период | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| Выплаты, руб. | 25000 | 25000 | 25000 | 25000 | 21000 | 21000 | 21000 | 21000 |
| Период | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| Выплаты, руб. | 18000 | 18000 | 18000 | 18000 | 10000 | 10000 | 10000 | 10000 |

Оптимальные траектории платежей лизингополучателя и лизингодателя определятся из полученных условий (14) и (18). Для определения области компромисса нужно «наложить» оптимальные траектории платежей лизингодателя и лизингополучателя друг на друга. Область компромисса будет иметь вид, изображенный на рисунке 1. Область, находящаяся ниже кривой выплат, оптимальных для лизингодателя, и выше кривых выплат, оптимальных для лизингополучателя, и будет областью компромисса между участниками лизинговой сделки.

При этом, если какой-либо участок графика выплат, выгодных лизингодателю, находится ниже кривых, оптимальных для лизингополучателя, то согласование интересов невозможно. В таком случае рекомендуется пересмотреть начальные условия лизингового контракта. Как видно из рисунка 1 согласование интересов в данном случае возможно.

***3. Решение задачи оптимального управления лизинговыми платежами в случае не фиксированного времени контракта***

Рассмотрим важный частный случай, когда время лизингового контракта заранее не фиксировано. В этом случае должно выполняться дополнительное условие, согласно которому гамильтониан в конечный период должен быть равен нулю [3]. Решим задачу с позиции лизингополучателя. Запишем гамильтониан в конечный период $n$:

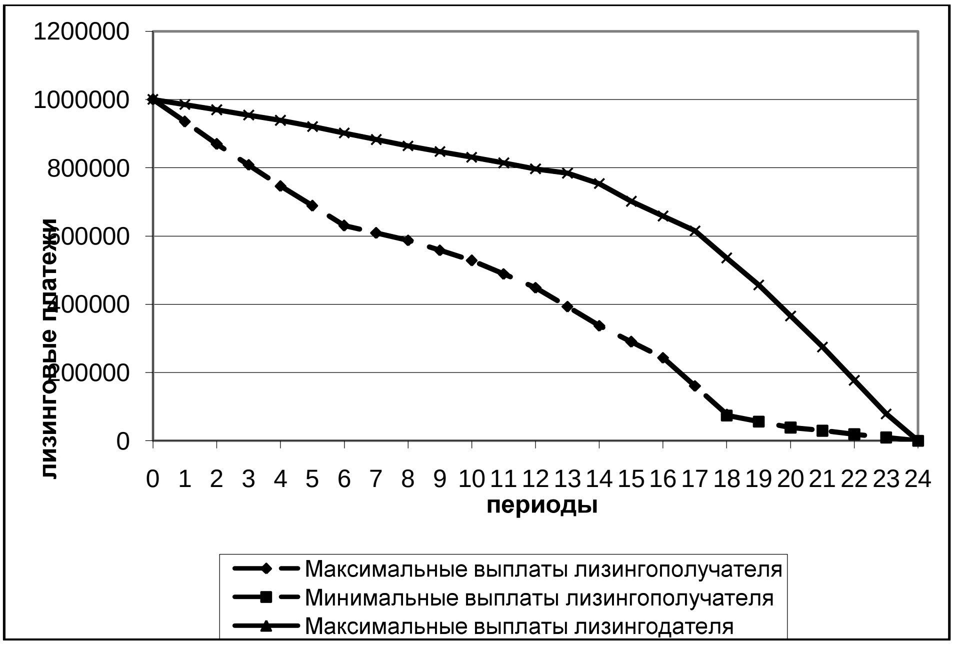


*Рис. 1. Область компромисса между участниками лизинговой сделки*

$$H_n = -u_n[\Psi_{n+1} + \frac{1}{(1+r)^n}] + \Psi_{n+1} x_n (1+i) = 0.$$

Учитывая, что в конечный период должно выполняться условие $x_n = 0$, получим:

$$-u_n[\Psi_{n+1} + \frac{1}{(1+r)^n}] = 0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю:

$$u_n = 0 \text{ или } \Psi_{n+1} + \frac{1}{(1+r)^n} = 0.$$

Так как управление в конечный период не может быть равным нулю, получаем:

$$\Psi_{n+1} + \frac{1}{(1+r)^n} = 0. \qquad (19)$$

Перепишем уравнение (19) с учетом (12):

$$\frac{C}{(1+i)^{n+1}} + \frac{1}{(1+r)^n} = 0.$$

Найдём постоянную $C$:

$$C = -\frac{(1+i)^{n+1}}{(1+r)^n}. \qquad (20)$$

Подставим (20) в (13) найдем оптимальное управление лизингополучателя в случае, когда время контракта не фиксировано:

$$u_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\max}, \ \textit{если}\ i \ge r, \\ b_t^{\min}, \ \textit{если}\ i < r. \end{cases} \qquad (21)$$

Таким образом, если ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя больше, чем ставка дисконтирования $i \ge r$ оптимальной стратегией лизингополучателя являются лизинговые выплаты как можно большего размера до полного погашения стоимости лизингового имущества (типичная ситуация). Если ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя меньше, чем ставка дисконтирования $i < r$, то оптимальной стратегией лизингополучателя являются лизинговые выплаты как можно меньшего размера.

Аналогично найдем решение в случае не фиксированного времени контракта для лизингодателя.

Запишем гамильтониан в конечный период $n$:

$$H_n = -v_n[\Psi_{n+1} - \frac{1}{(1+r)^n}] + \Psi_{n+1} x_n (1+i) = 0.$$

Учитывая, что в конечный период $x_n = 0$, получим:

$$-v_n[\Psi_{n+1} - \frac{1}{(1+r)^n}] = 0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю:

$$v_n = 0 \text{ или } \Psi_{n+1} - \frac{1}{(1+r)^n} = 0.$$

Так как управление в конечный период не может быть равным нулю, получаем:

$$\Psi_{n+1} - \frac{1}{(1+r)^n} = 0. \qquad (22)$$

Перепишем уравнение (22) с учетом (12):

$$\frac{C}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+r)^n} = 0.$$

Найдём постоянную $C$:

$$C = \frac{(1+i)^{n+1}}{(1+r)^n}. \qquad (23)$$

Подставим (23) в (17) найдем оптимальное управление лизингодателя в случае, когда время контракта не фиксировано:

$$v_t^{opt} = \begin{cases} b_t^{\max}, \ \textit{если}\ i \le r \\ b_t^{\min}, \ \textit{если}\ i > r \end{cases}. \qquad (24)$$

Таким образом, если ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя больше, чем ставка дисконтирования $i > r$, то оптимальной стратегией лизингодателя являются лизинговые выплаты как можно меньшего размера (типичная ситуация). Если ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя не больше, чем ставка дисконтирования $i \le r$ оптимальной стратегией лизингодателя являются лизинговые выплаты как можно большего размера до полного погашения стоимости лизингового имущества.

**Заключение**

Таким образом, в настоящей работе задачи выбора траектории лизинговых платежей формулируются как задачи оптимального управления дискретными системами с фиксированным и нефиксированным временем контракта.

С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина определены оптимальные управления лизинговыми платежами для лизингополучателя и лизингодателя в случае фиксированного времени контракта. Для лизингополучателя наилучшей является схема выплат с убывающими лизинговыми платежами. Для лизингодателя наилучшей является схема выплат с возрастающими лизинговыми платежами. Полученные оптимальные стратегии лизингополучателя и лизингодателя определяют область компромисса, в котором могут находиться траектории лизинговых платежей.

Найдены оптимальные управления лизинговыми платежами для лизингополучателя и лизингодателя в случае нефиксированного времени контракта. Если ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя больше, чем ставка дисконтирования $i \geq r$ (типичная ситуация) оптимальной стратегией лизингополучателя являются лизинговые выплаты как можно большего размера и наоборот оптимальной стратегией лизингодателя являются лизинговые выплаты как можно меньшего размера до полного погашения стоимости лизингового имущества.

Если ставка комиссионного вознаграждения лизингодателя меньше, чем ставка дисконтирования $i < r$, то оптимальной стратегией лизингополучателя являются лизинговые выплаты как можно меньшего размера, а лизингодателя – лизинговые выплаты как можно большего размера до полного погашения стоимости лизингового имущества.

**Библиографический список**

1. Джуха, В.М. Лизинг [Текст] / В.М. Джуха. – Ростов н/Д: «Феникс», 1999. – 320 с.

2. Болтянский, В.Г. Оптимальное управление дискретными системами [Текст] / В.Г. Болтянский – М.: «Наука», 1973. – 446 с.

3.Розоноер, Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. [Текст] / Л.И. Розоноер // Автоматика и телемеханика. – 1959. – № 11. – с. 1141-1158.

**References**

1.Dzhuha, V.M. Leasing [Text] / V.M. Dzhuha ; Rostov n/D: «Feniks» Publishers, 1999. - 320 p.

2.Boltyansky, V.G. Discreet systems optimum control [Text] / V.G. Boltyansky; M.: «Nauka» Publishers, 1973. - 446 p.

3.Rozonoer, L.I. Pontryagin maximum principle in theory of optimum systems, II [Text]/ L.I. Rozonoer // Automatics and telemechanics. – 1959. – № 11. – p. 1141-1158.

## DISCREET-TIME MODELS OF PARAMETERS OF LEASING CONTRACT OPTIMUM CONTROL



Samara State Aerospace University
(National research university)

In the article are formed and solved discreet-time models of leasing payments optimum control issue from economic interest of contracting parties. Leasing payments sum is a variable depended on the amount of payments in every period. The problem of choosing the leasing payments path is represented as a problem of discreet-time system optimum control with fixed and non-fixed period of the contract. Due to using discreet maximum principle of Pontryagin, are defined optimum controls of leasing payments for the leasing contracting parties. The solution of set tasks let define region of compromise in which must be the parameters of a leasing contract.

*Key words: leasing payments, problem of optimum control, discreet maximum principle of Pontryagin, optimum time of reswitching, region of compromise*

### Сведения об авторах

**Павлов Олег Валерьевич**, кандидат технических наук, декан факультета экономики и управления Самарского государственного аэрокосмического университета, pavlov@ssau.ru. Область научных интересов: управление социально-экономическими системами.
**Фудобина Екатерина Анатольевна**, аспирант Самарского государственного аэрокосмического университета, katt@land.ru. Область научных интересов: управление социально-экономическими системами.

**Pavlov Oleg Valerievich**, Candidate of Science, Dean of the faculty of economics and management of Samara state aerospace university. E-mail: pavlov@ssau.ru. Area of research: social-economic systems management.
**Fudobina Ekaterina Anatolievna**, assistant of finances and credit department of Samara state aerospace university. E-mail: katt@land.ru. Area of research: social-economic systems management.