

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ В РЕАЛЬНЫЕ АКТИВЫ

© 2010 О.В. Павлов, Т.А. Мошкова

Самарский государственный аэрокосмический университет
(Национальный исследовательский университет)

Предложен общий подход к принятию решений об инвестировании в реальные активы на основе теории оптимального управления дискретными системами. С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина найдено решение поставленной задачи. Сформулирован численный алгоритм определения оптимального управления инвестициями. Получены аналитические решения для случая постоянной рентабельности основных средств. Сформулированы критерии для принятия решения об инвестировании средств в реальные активы.

Инвестиционные решения, теория оптимального управления дискретными процессами, численный алгоритм, аналитические решения, критерии для принятия решения об инвестировании.

Введение

Рассматривается задача оптимального управления инвестициями в реальные активы в дискретной постановке. В качестве критерия управления инвестициями в статье используется чистый приведённый доход NPV [1]-[5]. Для выбора инвестиционных решений применяется теория оптимального управления дискретными процессами [6], [7].

Задачи управления инвестициями в непрерывной постановке рассматривались в [8]-[11]. В качестве критерия использовалась сумма дисконтированной прибыли предприятия за интервал планирования. Однако для практических экономических расчётов более предпочтительным является решение задачи в дискретном виде.

1. Математическая модель денежных потоков инвестиционного проекта промышленного предприятия

При разработке модели выдвинуты следующие предположения. Промышленное предприятие является единственным участником инвестиционного проекта по производству нового вида продукции. Инвестиции осуществляются за счёт собственных средств предприятия. Экономическая

эффективность проекта оценивается в целом и схема финансирования не учитывается. Рассматриваются денежные потоки от операционной (производственной) и инвестиционной деятельности [5]. В результате осуществления проекта вся производимая продукция полностью продаётся. Считается, что денежный поток, генерируемый инвестиционным проектом в течении одного временного периода имеет место в конце периода, т.е. является постнумерандо.

В качестве критерия оценки экономической эффективности инвестиционного проекта рассматривается чистый приведённый доход:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{FCF_t}{(1+r)^t}, \quad (1)$$

Горизонт планирования определяется как объективным фактором: жизненным циклом инвестиционного проекта, так и субъективным: дальновидностью менеджера, принимающего решение.

Свободный денежный поток инвестиционного проекта FCF_t в конце периода t определяется как разница денежных потоков от операционной деятельности (*Operating Cash Flow*) OCF_t и инвестиционной (*Investment Cash Flow*) ICF_t [1]-[5]:

$$FCF_t = OCF_t - ICF_t, \quad t = 0, n. \quad (2)$$

Денежный поток от операционной деятельности рассчитывается:

$$OCF_t = REV_t - NOC_t - PT_t, \quad (3)$$

где REV_t - выручка (*Revenue*) от реализации произведенной продукции, NOC_t - чистые операционные издержки (*Net Operating Costs*), PT_t - налог на прибыль (*Profit Tax*).

Выручка определяется:

$$REV_t = P_t Q_t, \quad (4)$$

где P_t - цена продукции; Q_t - прогнозируемый объём продаж продукции.

Чистые операционные издержки включают: материальные затраты (*Material Costs*) MC_t , заработную плату (*Wages and Salary*) WS_t , начисления на заработную плату (*Wages Charges*) WC_t , другие затраты OC_t :

$$NOC_t = MC_t + WS_t + WC_t + OC_t. \quad (5)$$

Материальные затраты рассчитываются:

$$MC_t = C_m Q_t, \quad (6)$$

где C_m - материальные затраты на единицу продукции.

Фонд заработной платы определяется:

$$WS_t = w_t L_t, \quad (7)$$

где w_t - средняя ставка заработной платы единицы персонала за один период, L_t - численность производственного персонала.

Численность персонала рассчитывается по формуле:

$$L_t = \frac{Q_t}{l_t}, \quad (8)$$

где l_t - норматив выпуска продукции средним работником за период t .

Начисления на заработную плату определяются:

$$WC_t = \tau_w WS_t, \quad (9)$$

где τ_w - ставка единого социального налога.

Накладные и коммерческие затраты вычисляются как OC_t следующим образом:

$$OC_t = \omega(MC_t + WS_t + WC_t), \quad (10)$$

где ω - процент от затрат на материалы, зарплату, начислений на зарплату.

Подставим (8) в (7), а затем (6), (7), (9), (10) в формулу (5) получим окончательное выражение для чистых операционных издержек в следующем виде:

$$NOC_t = Q_t C_t (1 + \omega), \quad (11)$$

где C_t - прямая производственная себестоимость продукции (затраты на единицу продукции без учета накладных и коммерческих расходов), рассчитывается по формуле:

$$C_t = C_m + (1 + \tau_w) \frac{w_t}{l_t}. \quad (12)$$

Налог на прибыль вычисляется:

$$PT_t = \tau_c (REV_t - NOC_t - DEP_t), \quad (13)$$

где τ_c - ставка налога на прибыль, DEP_t - амортизационные начисления (*Depreciation*).

Для расчёта износа основных средств (внеоборотных активов) предприятия (*Fixed Assets*) FA_t используется метод равномерного начисления амортизации:

$$DEP_t = \mu FA_t, \quad (14)$$

где μ - норма амортизации, FA_t - стоимость основных средств предприятия в начале периода t до новых капиталовложений.

Все основные средства проекта полностью используются для производства продукции. В этом случае процесс производственной деятельности предприятия описывается производственной функцией Леонтьева:

$$P_t Q_t = f FA_t, \quad (15)$$

где $P_t Q_t$ - стоимость прогнозируемого объёма продаж продукции (выручка), f - фондоотдача основных средств, характеризующая используемый технологический процесс для производства продукции.

Подставим формулы (4), (11), (13) с учётом (14) в выражение для денежного потока от операционной деятельности (3):

$$OCF_t = \left[(1 - \tau_c) f \frac{P_t - C_t(1 + \omega)}{P_t} + \tau_c \mu \right] FA_t.$$

Введём понятие рентабельности (доходности) основных средств (внеоборотных активов) проекта в форме денежного потока (*cash flow Return On Fixed Assets*) $ROFA_t$ или $CFROFA_t$:

$$ROFA_t = \frac{OCF_t}{FA_t} = (1 - \tau_c) f \frac{P_t - C_t(1 + \omega)}{P_t} + \tau_c \mu. \quad (16)$$

Экономическим смыслом рентабельности основных средств является величина операционного денежного потока, приходящаяся на единицу стоимости основных средств, используемых в проекте. Рентабельность основных средств зависит от цены и себестоимости продукции, фондоотдачи, ставки налога на прибыль и налогового щита, связанного с амортизацией $\tau_c \mu$. Рентабельность основных средств по денежному потоку по своему экономическому смыслу близка к понятию рентабельности инвестиций по денежным потокам [2], [4].

С учётом (16) операционный денежный поток запишется:

$$OCF_t = ROFA_t FA_t. \quad (17)$$

Инвестиционный денежный поток ICF_t расходуется на капиталовложения в основные средства INV_t [1]-[5]:

$$ICF_t = \alpha_t INV_t, \quad (18)$$

где α_t - процент от финансового ресурса предприятия INV_t в период t , необходимый для капиталовложений в проект. Если весь финансовый ресурс INV_t инвестируется в период t в рассматриваемый проект, то $\alpha_t = 1$, если не инвестируется, то $\alpha_t = 0$.

Инвестиции должны производиться на один период раньше, чем планируемый рост производственных мощностей, необходимый для удовлетворения будущего прогнозируемого объема продаж готовой продукции.

Финансовый ресурс, необходимый для инвестиций в период t рассчитывается:

$$\forall t = 0, \dots, n \quad INV_t = \begin{cases} \frac{[Q_{t+1} - \max_{j=0,t} \{Q_j\}] P_{t+1}}{f}, & \text{если } Q_{t+1} > \max_{j=0,t} \{Q_j\}; \\ 0, & \text{если } Q_{t+1} \leq \max_{j=0,t} \{Q_j\} \end{cases} \quad (19)$$

Выражение для чистого приведённого дохода инвестиционного проекта (1) с учётом (2), (17) и (18) примет вид:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{ROFA_t FA_t - \alpha_t INV_t}{(1+r)^t}. \quad (20)$$

2. Постановка и решение дискретной задачи оптимального управления инвестициями промышленного предприятия

Динамика изменения стоимости основных средств проекта описывается дискретным уравнением [1], [2]:

$$FA_{t+1} = FA_t + \alpha_t INV_t, \quad t = 0, n, \quad (21)$$

В начальный период для основных средств задано начальное условие:

$$FA_0 = FA0. \quad (22)$$

Сформулируем проблему принятия инвестиционных решений как задачу оптимального управления дискретным процессом. В качестве управления примем процент α_t от финансового ресурса предприятия INV_t , необходимого для капиталовложений в проект, рассчитываемый по формуле (19). Исходя из экономического смысла, на управление α_t наложено следующее ограничение:

$$0 \leq \alpha_t \leq 1. \quad (23)$$

Сформулируем задачу оптимального управления: зная начальное состояние основных средств проекта (22) необходимо выбрать такое допустимое управление инвестициями (23) для дискретного процесса (21), чтобы чистый приведённый доход проекта (20) принял максимальное значение.

Применим для решения задачи дискретный принцип максимума Понтрягина [6]-[7].

Запишем гамильтониан:

$$H_t = \left\{ \Psi_{t+1} - \frac{1}{(1+r)^t} \right\} \alpha_t INV_t + \Psi_{t+1} FA_t + \frac{ROFA_t FA_t}{(1+r)^t}, \quad t = 0, \dots, n.$$

Гамильтониан линейно зависит от управления. В соответствии с принципом максимума [6],[7] в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона H_t достигает максимума относительно управления.

Из условия максимума гамильтониана найдём структуру оптимального управления:

$$\alpha_t^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Psi_{t+1} - \frac{1}{(1+r)^t} \geq 0, \\ 0, & \text{если } \Psi_{t+1} - \frac{1}{(1+r)^t} < 0. \end{cases} \quad (24)$$

$$\forall t = 0, \dots, n$$

Сопряжённое уравнение в соответствии с [6]-[7] запишется:

$$\forall t = 0, \dots, n \quad \Psi_t = \frac{\partial H_t}{\partial FA} = \Psi_{t+1} + \frac{ROFA_t}{(1+r)^t}. \quad (25)$$

Для сопряжённого уравнения справа должно выполняться условие трансверсальности:

$$\Psi_{n+1} = 0. \quad (26)$$

Из условия (25) и условия трансверсальности (26) следует: инвестирование в последний период n не производится $\alpha_n = 0$. Теоретически, в связи со скачкообразным изменением рентабельности основных средств, связанное, например, с колебаниями цен возможно изменение знака функции:

$$\Psi_{t+1} - \frac{1}{(1+r)^t},$$

а, следовательно, переключение управления может происходить несколько раз. В частном случае, если функция отрицательна на всём интервале, оптимальным решением будет отказ от инвестирования в проект.

Анализируя исходное (21) и сопряжённое уравнение (25), структуру оптимального управления (24) можно

сделать вывод: уравнения решаются независимо друг от друга. Если рассчитать сопряжённые переменные от конечного периода до начального по уравнению (25), используя условие трансверсальности (26), то возможно определить оптимальное управление по формуле (24). А затем вычислить исходную переменную – стоимость основных средств от начального периода до конечного по уравнению (21), используя начальное условие (22).

Также из анализа следует другой вывод: оптимальное инвестиционное решение определяется рентабельностью основных средств по денежному потоку $ROFA_t$, ставкой дисконтирования r , горизонтом планирования n , периодом t .

Для определения оптимального управления инвестициями разработан следующий численный алгоритм [12]:

1. определяются исходные данные проекта: прогнозируемые цены P_t , прогнозные объёмы продаж продукции Q_t , материальные затраты на единицу продукции Cm_t , количество сотрудников L_t и средняя зарплата сотрудников w_t для периодов от 0 до n ;
2. рассчитывается по формуле (11) себестоимость продукции C_t , $t=0, n$;
3. вычисляется по формуле (15) рентабельность основных средств $ROFA_t$, $t=0, n$;
4. по формулам (19) по прогнозным значениям объёмов продаж определяется объём финансового ресурса INV_t , необходимый для инвестирования в проект, $t=0, n$;
5. рассчитывается по формуле (25) сопряжённая переменная Ψ_{t+1} , $t=n, 0$;
6. находится оптимальное управление по формуле (24) для периодов от 0 до n ;
7. определяются оптимальные капиталовложения $\alpha_t INV_t$, $t=0, n$;
8. рассчитывается по формуле (21) стоимость основных фондов FA_t , $t=0, n$;
9. определяется по формуле (17) операционный денежный поток OFC_t , $t=0, n$;

10. вычисляется по формуле (18) инвестиционный денежный поток $ICF_t, t=0, n$;

11. вычисляется чистый приведённый доход NPV по формуле (20).

Если в результате расчётов оптимальная программа инвестирования на всей траектории будет равна нулю, то рассматриваемый проект необходимо отклонить. Возможна ситуация, когда в начальных периодах оптимальное управление инвестициями будет равно нулю, а затем из-за изменения экономических параметров проекта, например роста цены на продукцию или снижения себестоимости будет равна единице. В этом случае в результате расчётов определится оптимальное время начала осуществления инвестиционного проекта.

3. Аналитическое решение дискретной задачи для постоянной рентабельности основных средств по денежному потоку

В частном случае, когда рентабельность основных средств инвестиционного проекта, является постоянной: $ROFA_t = ROFA = const$, возможно аналитическое решение дискретной задачи. Уравнение для сопряжённой переменной (25) запишется:

$$\Psi_t = \Psi_{t+1} + \frac{ROFA}{(1+r)^t}, t = n, 0. \quad (27)$$

Условие трансверсальности $\Psi_{t+1} = 0$.

Так как формула (27) является рекуррентной, возможно вывести выражение для сопряжённой переменной через параметры проекта. Запишем сопряжённую переменную в периоды $t=n, n-1, n-2, n-3...$ по уравнению (27), используя условие трансверсальности (26).

$$\Psi_{n+1} = 0;$$

$$\Psi_n = \frac{ROFA}{(1+r)^n};$$

$$\Psi_{n-1} = \frac{ROFA}{(1+r)^{n-1}} \left[1 + \frac{1}{1+r} \right];$$

$$\Psi_{n-2} = \frac{ROFA}{(1+r)^{n-2}} \left[1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} \right];$$

$$\Psi_{n-3} = \frac{ROFA}{(1+r)^{n-3}} \left[1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} \right].$$

Обобщая, запишем формулу для переменной Ψ_{t+1} :

$$\Psi_{t+1} = \frac{ROFA}{(1+r)^{t+1}} \left[1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{n-t-1}} \right].$$

Выражение в скобках является суммой геометрической прогрессии со знаменателем прогрессии $\frac{1}{1+r}$ и количеством членов прогрессии $n-t$.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим следующее выражение для сопряжённой переменной:

$$\Psi_{t+1} = \frac{ROFA}{r} \left[\frac{1}{(1+r)^t} - \frac{1}{(1+r)^n} \right]. \quad (28)$$

С учётом (28) оптимальное управление инвестициями (24) примет вид:

$$\alpha_t^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{ROFA}{r} [1 - (1+r)^{-n}] - 1 \geq 0 \\ 0, & \text{если } \frac{ROFA}{r} [1 - (1+r)^{-n}] - 1 < 0 \end{cases}. \quad (29)$$

Так как функция:

$$\frac{ROFA}{r} [1 - (1+r)^{-n}]$$

является монотонно убывающей, следовательно возможно переключение управления не более одного раза в периоды от 0 до n :

$$\alpha_t^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq t \leq t^{kp}. \\ 0, & \text{если } t^{kp} < t \leq n \end{cases} \quad t = 0, n. \quad (30)$$

где t^{kp} - критический период проекта, период прекращения инвестиций.

Таким образом, оптимальной стратегией является инвестирование финансовых средств в периоды от 0 до t^{kp} и полный отказ от инвестирования после периода t^{kp} .

Из (29) следует, что инвестирование в периоде t выгодно, если для рентабельности основных средств по денежным потокам выполняется условие:

$$ROFA \geq \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}.$$

В правой части неравенства находится критическое значение рентабельности основных средств по денежным потокам, при котором инвестирование не выгодно:

$$ROFA^{кр.}(t, n, r) = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}. \quad (31)$$

Критическое значение рентабельности основных средств по денежным потокам $ROFA^{кр.}(t, n, r)$ является функцией периода t , в котором производятся инвестиции, горизонта планирования n , ставки дисконтирования r . Из формулы (31) следует, что при бесконечном инвестиционном проекте $n \rightarrow \infty$ критическое значение рентабельности основных средств по денежным потокам стремится к ставке дисконтирования r . Таким образом для бесконечного инвестиционного проекта рентабельность основных средств должна быть не меньше чем ставка дисконтирования.

Условие (29) с учётом (31) запишется в следующем виде:

$$\alpha_t^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } ROFA > ROFA_t^{кр.} \\ 0, & \text{если } ROFA < ROFA_t^{кр.} \end{cases}. \quad (32)$$

Полученное условие (32) может быть использовано как критерий для принятия решения об инвестировании средств в тот или иной проект. Если при заданном горизонте планирования n , ставки дисконтирования r , периоде t рентабельность основных средств $ROFA$ меньше критического значения, то инвестиционный проект должен быть отклонён.

На рис.1 приводятся результаты расчётов критического значения рентабельности основных средств в зависимости от периода t , в котором производится инвестирование. В качестве периода рассматривался год. Расчёты проводились для горизонта планирования $n=10$ и трёх ставок дисконтирования $r_1=10\%$, $r_2=15\%$, $r_3=20\%$. Из анализа рисунка 1 видно, что с увеличением периода t критическое значение рентабельности увеличивается до бесконечности в период $t=n$, а следовательно обязательно наступит момент когда осуществление инвестиций станет не выгодным.

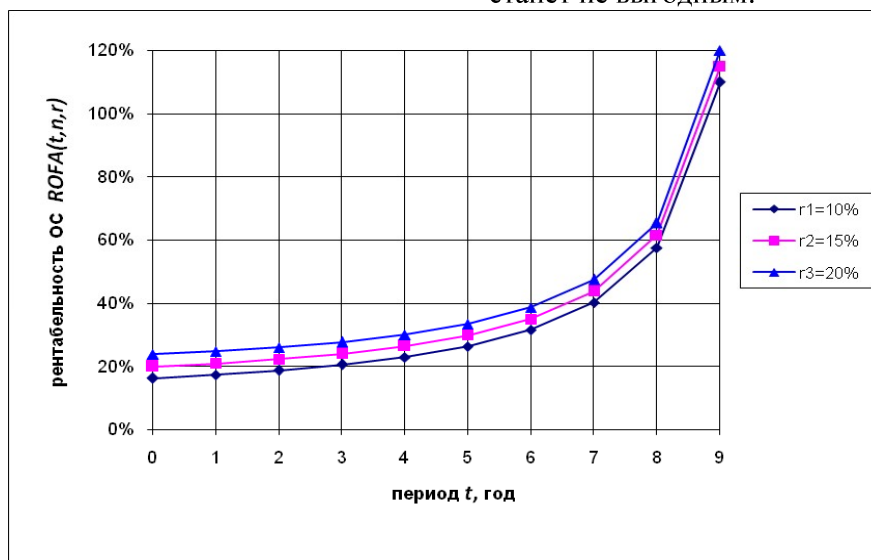


Рис. 1. Зависимость критического значения рентабельности основных средств от периода инвестирования

Для начального периода $t=0$ критическое значение рентабельности основных средств определится выражением:

$$ROFA^{кр.}(0, n, r) = \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^n}} = \frac{1}{B(n, r)},$$

где $B(n, r)$ – коэффициент аннуитета, $\frac{1}{B(n, r)}$ – коэффициент возврата капитала [2] (capital recovery factor).

Таким образом, для осуществления инвестиций в начальный период времени рентабельность основных средств должна быть не меньше, чем коэффициент возврата капитала. На рис.2 приводятся результаты расчётов критического значения рентабельности основных средств в начальный период $t=0$ в зависимости от горизонта планирования n .

Расчёты проводились для трёх ставок дисконтирования $r_1=10\%$, $r_2=15\%$, $r_3=20\%$. Из анализа рисунка 2 видно, что с

увеличением горизонта планирования n критическое значение рентабельности уменьшается, следовательно, чем больше горизонт планирования, тем меньшим может быть критическое значение рентабельности основных средств в начальный период.

Из равенства нулю условия (29):

$$\frac{ROFA}{r} [1 - (1+r)^{-n}] - 1 = 0$$

определим период прекращения инвестиций:

$$t^{сп.} = n + \log_{1+r} \left[1 - \frac{r}{ROFA} \right]. \quad (33)$$

Из экономического смысла следует, что выражение в скобках меньше 1, поэтому логарифм является отрицательным числом и время прекращения инвестиций находится в интервале от 0 до n . Анализируя формулу (33) можно сделать следующий вывод: время прекращения инвестиций зависит от горизонта планирования: чем больший период времени предполагается осуществлять инвестиционный проект, тем дольше необходимо инвестировать в основные средства.

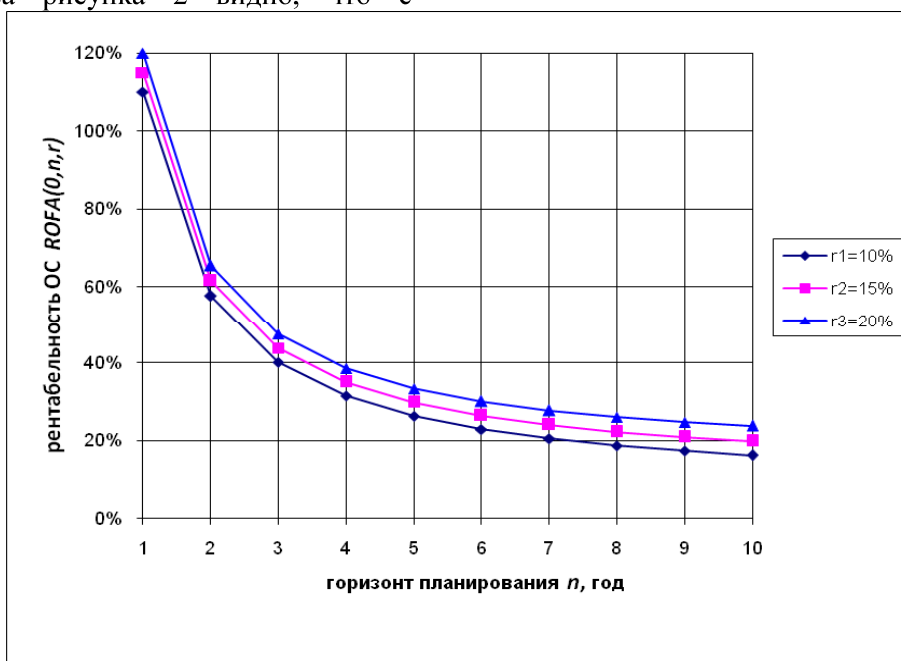


Рис. 2. Зависимость критического значения рентабельности основных средств от горизонта планирования

Формула (33) математически определяет зависимость инвестиционного решения от инвестиций также зависит от соотношения рентабельности основных средств $ROFA$ и ставки дисконтирования r .

Заключение

Таким образом, в настоящей работе предложен общий подход к принятию инвестиционных решений, основанный на теории оптимального управления дискретными процессами. Сформулирована и решена задача оптимального управления инвестициями в дискретной постановке. Найдена структура оптимального управления инвестициями в общем виде. На основе полученного решения предложен численный алгоритм определения оптимального управления инвестициями, который реализован в электронной таблице Excel. Практические расчёты показали эффективность предложенного алгоритма для принятия инвестиционных решений.

Введено понятие рентабельности основных средств в виде денежного потока $ROFA_t$ ($CFROFA_t$). Сделан вывод, что оптимальное инвестиционное решение определяется рентабельностью основных средств $ROFA_t$, ставкой дисконтирования r , горизонтом планирования n , периодом t .

дальновидности менеджера (жизненного цикла проекта). Период прекращения

Для случая постоянной рентабельности основных средств по денежным потокам получены аналитические решения. Введено понятие критического значения рентабельности основных средств по денежным потокам. Критическое значение рентабельности основных средств по денежным потокам $ROFA^{*p}(t,n,r)$ является функцией периода t , в котором производятся инвестиции, горизонта планирования n , ставки дисконтирования r .

Найдены условия инвестирования в проект в период t : рентабельность основных средств по денежным потокам в период t должна быть не меньше критического значения. Это условие может использоваться как критерий для принятия решения об инвестировании в рассматриваемый проект. Из полученного условия найдена аналитическая формула для определения периода прекращения инвестиций. Для инвестиционного проекта с бесконечным жизненным циклом критическое значение рентабельности основных средств по денежным потокам должно быть не меньше, чем ставка дисконтирования.

Библиографический список

1. Брейли, Р. Принципы корпоративных финансов [Текст] / Р. Брейли, С. Майерс. - М.: ЗАО «Олимп – Бизнес», 1997. - 1120 с.
2. Бирман, Г. Капиталовложения: Экономический анализ инвестиционных проектов [Текст] / Г. Бирман, С. Шмидт. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 631 с.
3. Бригхем, Ю. Финансовый менеджмент [Текст]: полный курс в 2-х т. / Ю. Бригхем, Л. Гасперски. - Спб.: Экономическая школа, 1998 г.
7. Лагоша, Б.А. Оптимальное управление в экономике [Текст] / Б.А. Лагоша. – М.: «Финансы и статистика», 2003. - 192 с.

4. Хелферт, Э. Техника финансового анализа [Текст] / Э. Хелферт. – СПб.: Питер, 2003. – 640 с.
5. Виленский, П.Л. Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика [Текст]: учебное пособие / П.Л. Виленский, В.Н. Лившиц, С.А. Смоляк - М.: Дело, 2004. - 888 с.
6. Болтянский, В.Г. Оптимальное управление дискретными системами [Текст] / В.Г. Болтянский. – М.: «Наука», 1973. - 446 с.
8. Соколовский, Л.Е. Модели оптимального функционирования предприятия [Текст] / Л.Е.

- Соколовский. – М.: Наука, 1980. - 175 с.
9. Горелик, В.А. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах [Текст] / В.А. Горелик, А.Ф. Кононенко. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.
10. Косачёв, Ю.В. Экономико-математические модели эффективности финансово-промышленных структур [Текст] / Ю.В. Косачёв. – М.: Логос, 2004. – 248 с.
11. Павлов, О.В. Оптимальные стратегии привлечения финансовых

References

1. Brealey, R. Principles of corporate finance [Text] / R. Brealey, C. Mayers. - Moscow: "Olimp – Biznes" Publishers, 1997. - 1120 p.
2. Bierman, H. The capital budgeting decision. Economic Analysis of Investment Projects [Text] / H. Bierman, S. Smidt. – Moscow: "Uniti-Dana" Publishers, 2003. – 1166 p.
3. Brigham, E. Financial management [Text] / E. Brigham, L. Gapenski. - Spb.: "Economic school" Publishers, 1998. - 1166 p.
4. Helfert, E. Techniques of financial analysis [Text] / E. Helfert. – Spb.: "Piter" Publishers, 2003. – 640 p.
5. Vilenskiy, P.L. Estimation of Investment Project Efficiency: Theory and Practice [Text]: Textbook / P.L. Vilenskiy, V.N. Livshits, S.A. Smolyak. - Moscow: "Delo" Publishers, 2004. – 888 p.
6. Boltyanskiy, V.G. Discrete system optimal control [Text] / V.G. Boltyanskiy. – Moscow: "Nauka" Publishers, 1973. – 446 p.
7. Lagosha, B.A. Optimal management in economics [Text] / B.A. Lagosha. –

- ресурсов для развития фирмы в длительном периоде [Текст] /О.В. Павлов //Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. - 2004. - № 1(5). - с.147-152.
12. Павлов, О.В. Численный алгоритм оптимального управления инвестициями промышленного предприятия [Текст] /О.В. Павлов // Экономические науки. Научно-информационный журнал. - 2009. - № 4(53). - с. 324-327.
- Moscow: "Finance and Statistics" Publishers, 2003. - 192 p.
8. Sokolovskiy, L.Ye. Models of the company optimum performance [Text] / L.Ye Sokolovskiy. – Moscow: "Nauka" Publishers, 1980. - 175 p.
 9. Gorelik, V.A. Game-Theoretic models of making decisions in ecologinomic systems [Text] / V.A. Gorelik, A.F. Kononenko – Moscow: "Radio i Svyaz" Publishers, 1982. – 144 p.
 10. Kosachev, U.V. Economical and mathematical models of financial and industrial structures efficiency [Text] / U.V. Kosachev. – Moscow: "Logos" Publishers, 2004. – 248 p.
 11. Pavlov, O.V. Optimum strategies of attracting financial resources for company long-term development [Text] / O.V. Pavlov //Bulletin of Samara State Aerospace University. - 2004. № 1(5). - p. 147-152.
 12. Pavlov, O.V. Numerical algorithm of industrial enterprise investment optimal control. [Text] / O.V. Pavlov // Economic Sciences. Scientific Information Journal. - 2009. № 4(53). - p. 324-327.

MATHEMATICAL MODELS OF OPTIMAL INVESTMENT CONTROL IN FIXED ASSETS

© 2010 O.V. Pavlov, T.A. Moshkova

Samara State Aerospace University
(National research university)

The paper suggests the general approach to making decisions of investing in fixed assets based upon the theory of discrete system optimal control. The formulated problem is solved with the application of discrete maximum principle of Pontryagin. The numerical algorithm of investment optimal control is developed. Analytical solutions are obtained for the cases of constant return on fixed assets. The criteria for making decisions of investing funds in fixed assets are formulated.

Keywords: investment decisions, theory of discrete process optimal control, numerical algorithm, analytical solution, criteria for making investment decisions.

Информация об авторах

Павлов Олег Валерьевич, кандидат технических наук, декан факультета экономики и управления Самарского государственного аэрокосмического университета. E-mail: pavlov@ssau.ru. Область научных интересов: управление социально-экономическими системами.

Мошкова Татьяна Александровна, ассистент кафедры финансов и кредита Самарского государственного аэрокосмического университета. E-mail: moshkova_ta@pochta.ru. Область научных интересов: управление социально-экономическими системами.

Pavlov Oleg Valerievich, Candidate of Science, Dean of the faculty of economics and management of Samara state aerospace university. E-mail: pavlov@ssau.ru. Area of research: social-economic systems management.

Moshkova Tatyana Aleksandrovna, assistant of finances and credit department of Samara state aerospace university. E-mail: moshkova_ta@pochta.ru. Area of research: social-economic systems management.