

## ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

© 2010 А. В. Овчинников, Е. К. Красночуб, В. М. Бронштейн

ФГУП «ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс», г. Самара

Рассмотрен частный случай применения метода наименьших квадратов (МНК). Проведен анализ соответствия наилучшим решениям полученных ранее без применения МНК формул для коэффициентов теплообмена при движении жидкости в трубах. Предложены новые аналитические зависимости для определения указанных коэффициентов теплообмена

*Метод наименьших квадратов, обработка экспериментальных данных, коэффициент теплообмена, движение жидкости в трубах, критерии подобия*

Метод наименьших квадратов предполагает нахождение функциональных зависимостей, или моделей, аппроксимирующих экспериментальные данные с наилучшим приближением [1, 2].

Применяются аддитивные, мультипликативные и другие сложные функциональные зависимости, которые можно представить в виде некоторых аддитивных функций с первым членом разложения в виде постоянной величины.

Существенной особенностью МНК является то обстоятельство, что этот метод обработки экспериментальных данных минимизирует абсолютные отклонения экспериментальных точек от аппроксимирующей кривой.

Равенство нулю суммы отклонений от искомой функциональной зависимости, вытекающее из условия минимизации суммы квадратов отклонений, свидетельствует о том, что аппроксимирующая кривая (в рамках выбранной математической модели) является наилучшим приближением к истинной функциональной зависимости между экспериментальными значениями переменных.

Предположим, что искомая зависимость выражается функцией

$$\hat{y} = f(x, A_1, A_2, \dots, A_m), \quad (1)$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_m$  – параметры.

Между рассчитанными по модели значениями  $\hat{y}$  и экспериментальными точками  $y_i$  будут наблюдаться отклонения

$$\Delta y = y_i - \hat{y}. \quad (2)$$

Требование минимального разброса соответствует требованию минимального значения суммы квадратов отклонений.

В случае принятия модели в виде мультипликативной функции

$$\hat{y} = D \cdot a^l \cdot b^m \cdot c^p \quad (3)$$

целесообразно искать не минимум суммы квадратов отклонений функций, а минимум суммы квадратов отклонений логарифмов этих же функций:

$$\sum_{i=1}^n [\ln y_i - \ln(D \cdot a^l \cdot b^m \cdot c^p)]^2. \quad (4)$$

Из условий минимума получаем систему уравнений для определения наилучших значений параметров:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [\ln D + l \ln a_i + m \ln b_i + p \ln c_i] &= \\ = \sum_{i=1}^n \ln y_i; \\ \sum_{i=1}^n [\ln D + l \ln a_i + m \ln b_i + p \ln c_i] \ln a_i &= \\ = \sum_{i=1}^n \ln y_i \cdot \ln a_i; \\ \sum_{i=1}^n [\ln D + l \ln a_i + m \ln b_i + p \ln c_i] \ln b_i &= \\ = \sum_{i=1}^n \ln y_i \ln b_i; \\ \sum_{i=1}^n [\ln D + l \ln a_i + m \ln b_i + p \ln c_i] \ln c_i &= \\ = \sum_{i=1}^n \ln y_i \ln c_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Решая систему (5), определяем значения параметров  $D, l, m, p$ . Значения величин  $y_i, a_i, b_i, c_i$  определяются непосредственно из опытов.

Первое уравнение системы (5) можно представить как сумму разностей логарифмов экспериментальных отсчетов  $y_i$  и логарифмов значений «истинной» (наилучшей) функциональной зависимости  $\hat{y} = D \cdot a^l \cdot b^m \cdot c^p$ :

$$\sum_{i=1}^n [\ln y_i - (\ln D + l \ln a_i + m \ln b_i + p \ln c_i)] = 0. \quad (6)$$

Равенство нулю указанной суммы, т. е. суммы отклонений от искомой функциональной зависимости, свидетельствует о том, что функция  $\hat{y} = D \cdot a^l \cdot b^m \cdot c^p$  является наилучшим приближением (в рамках выбранной модели) к истинной функциональной зависимости между экспериментальными значениями переменных.

На примере решения задач по экспериментальному определению коэффициентов теплообмена при движении жидкости в трубах рассмотрим, насколько некоторые выведенные ранее формулы [3–12] для расчёта коэффициентов теплообмена соответствуют наилучшим решениям. Формулы, которые будут анализироваться (таблицы 1, 2), были получены графическим или численным методом без применения МНК. В таблице 3 для различных режимов течения и теплообмена и положения труб в пространстве по материалам работы академика М. А. Михеева [3] с использованием МНК предложены аналитические зависимости для определения расчётных зависимостей критерия  $Nu$  и его среднеквадратичные отклонения. Приведены также среднеарифметические отклонения критерия Нуссельта

$$\Delta N = \pm \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Nu_{\text{опыт}} - Nu_{\text{расчет}}}{Nu_{\text{расчет}}} \cdot 100\%, \quad (7)$$

где  $i=1, 2, \dots, n$  – число опытов.

Среднеарифметические отклонения при расчётных значениях критерия

Нуссельта, определённых методом наименьших квадратов (вариант 1) до 2-5 порядков меньше рассчитанных с использованием формулы М. А. Михеева (вариант 2) [3] и по абсолютной величине составляют меньше 0,001-0,01, т. е. практически равны 0.

Среднеарифметические отклонения критериев Нуссельта, рассчитанные с использованием формул [4, 7, 11] (таблица 2) находятся на уровне 0,1-0,5.

Показатели степеней при критерии  $Re$  в предлагаемых формулах (вариант 1) при турбулентном режиме составляют 0,8-0,9, при ламинарном – 0,1-0,3. По литературным данным (таблицы 1, 2) эти данные соответственно составляют 0,8-1,0 и 0,2-0,4. Значения критериев Нуссельта, рассчитанные по предлагаемым формулам (вариант 1) и по формулам М. А. Михеева (вариант 2) отличаются на 2-10%. Среднеквадратичные отклонения, рассчитанные при различных расчётных значениях критерия Нуссельта по предлагаемым формулам (вариант 1), меньше, чем рассчитанные с использованием формулы М. А. Михеева [3, 4, 7, 11].

Определение средних среднеарифметических отклонений при расчётах методом наименьших квадратов, как это предложено в [13], представляется некорректным.

Таким образом, обработка экспериментальных данных МНК позволила получить аналитические зависимости для определения коэффициентов теплообмена при движении жидкости в трубах, наилучшим образом аппроксимирующие экспериментальные данные (в рамках выбранной мультипликативной модели). Показано, что формулы М. А. Михеева [3] для теплообмена при ламинарном и турбулентном движении отличаются от «наилучших» решений до 10%.

Применены следующие обозначения:

$Q$  – количество переданного тепла, Вт;

$t_{ж}$  – температура жидкости, К;

$t_c$  – температура стенки, К;

$t_z = 0,5(t_{жс} + t_c)$  – средняя температура пограничного слоя, К;

$\Delta t = t_c - t_{жс}$  – средний температурный напор, К;

$\delta t$  – изменение температуры по длине трубы, К;

$W$  – средняя скорость движения жидкости, м/с;

$l, d$  – длина и диаметр трубы, м;

$\alpha$  – коэффициент теплообмена, Вт/м<sup>2</sup>·К;

$\beta$  – коэффициент объемного расширения, 1/К;

$\nu$  – коэффициент кинематической вязкости, м<sup>2</sup>/с;

$\mu$  – коэффициент динамической вязкости, кг/м·с;

$a$  – коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с;

$g$  – ускорение силы тяжести, м/с<sup>2</sup>;

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/м·К.

Критерии подобия:

$$Nu = \frac{a \cdot d}{l}; Re = \frac{W \cdot d}{\nu}; Pr = \frac{\mu}{a};$$

$$Gr = \frac{b \cdot \Delta t \cdot d^3 \cdot g}{\nu^2}.$$

Индексы:  $жс$  – жидкость,  $c(s)$  – стенка,  $z$  – пограничный слой.

Таблица 1 – Расчётные формулы для определения среднего значения коэффициента теплообмена по длине трубы. Режим движения теплоносителя в круглых трубах – ламинарный.

Источник	Расчётная формула
3	$Nu_z = [0,74 \cdot (Re Pr)_z^{0,2} + K(b_z dt)]^{0,02} \cdot (Gr Pr)_z^{0,1}$ ; $Re_{жс} < 2300$ ; $2 \cdot 10^3 \leq Re_z Pr_z \leq 10^4$ $K$ – коэффициент, определяющий направления свободного и вынужденного движений.
7	$Nu = 1,55 \cdot \left( Pe \cdot \frac{d}{l} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left( \frac{m}{m_{жс}} \right)^{-0,14}$ – вязкое течение; $Nu_{d,жс} = 0,15 \cdot Re_{d,жс}^{0,33} \cdot Pr_{жс}^{0,33} \cdot (Gr_{d,жс} Pr_{жс})^{0,1} \cdot \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$ – вязкостно-гравитацион. режим; $\frac{l}{d} \geq 50$ .
8	$Nu_{жс} = 13,2 \cdot Pe_{жс}^{0,23} \cdot \left( \frac{l}{d} \right)^{-0,5}$ ; $Nu_{жс} = 0,05 \cdot Pe \frac{x}{d} + 3,66$ . (решение Нуссельта-Гребера при сведении полученного ими общего решения к первому члену (уравнение 40 [6]))
9	$Nu = 1,61 \cdot \left( Pe \cdot \frac{d}{l} \right)^{\frac{1}{3}}$ ; $Pe \cdot \left( \frac{d}{l} \right) > 12$ ; $Nu = 3,66$ ; $Pe \cdot \left( \frac{d}{l} \right) \leq 12$ ; $Re < 2300$ .
11	$Nu_{d,жс} = 1,4 \cdot \left( Re_{d,жс} \cdot \frac{d}{l} \right)^{0,4} \cdot Pr_{жс}^{0,33} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$ ; $\frac{l}{d} > 10$ ; $Re_{жс} > 10$ ; $0,06 < \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} < 10$ .
12	По Зидеру и Тейту (температура стенки постоянная; $\mu$ – принимается при средней температуре): $Nu = 1,86 \cdot Re^{\frac{1}{3}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot \left( \frac{d}{l} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left( \frac{m}{m_s} \right)^{0,14}$ .

Таблица 2 – Расчётные формулы для определения среднего значения коэффициента теплообмена по длине трубы. Режим движения теплоносителя в круглых трубах – турбулентный.

Источник	Расчётная формула
3	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} \cdot Pr_{жс}^{0,4} \cdot \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c}\right)^{0,25}$ ; $Re_{жс} > 10000$ .
4, 7, 11	$Nu_{d,жс} = 0,021 \cdot Re_{d,жс}^{0,8} \cdot Pr_{жс}^{0,43} \cdot \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c}\right)^{0,25}$ ; $\frac{l}{d} \geq 50$ .
5	$Nu = 0,031 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4}$ ; $\frac{l}{d} > 50$
6	$Nu = \frac{\frac{x_{жс}}{8} Re_{жс} Pr_{жс} \left(\frac{m_c}{m_{жс}}\right)^{-n}}{4,5 \cdot \sqrt{x_{жс}} \left(Pr_{жс}^{\frac{2}{3}} - 1\right) + 1,07}$ , $n = 0,11$ при нагревании; $n = 0,25$ при охлаждении; $x$ определяется из уравнения: $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1,82 \cdot \lg Re - 1,64$ .
8	$Nu = 0,024 \cdot Re_{жс}^{0,8} \cdot Pr_{жс}^{0,35}$
9	При нагревании ( $T_c > T_0$ ): $Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4} \cdot \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c}\right)^{0,06}$ При нагревании ( $T_c < T_0$ ): $Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4} \cdot \left(\frac{Pr_{жс}}{Pr_c}\right)^{0,25}$ $Pr < 100$ для капельных неметаллических жидкостей; $Nu, Pr, Re$ вычисляются при средней температуре; $Pr_c$ – при средней температуре стенки.
10	Упрощенные формулы: $Nu = x \cdot Pe \cdot Pr \cdot \left[ 40 \cdot \sqrt{x} \cdot \left( Pr^{\frac{2}{3}} - 1 \right) + 8 \right]^{-1}$ ; $Pr < 100$ $Nu = 0,035 \cdot Pe \cdot Pr^{0,25} \cdot \sqrt{x}$ ; $Pr > 100$ Формула Нуссельта-Крауссоляда: $x$ – коэффициент гидравлического сопротивления $Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4}$ (удовлетворительные результаты)
12	$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,33}$

Таблица 3 – Обработка экспериментальных данных (варианты 1, 2 означают: 1 – предлагаемый в настоящей работе; 2 – предлагаемый в работе [3]).

Источник. Режим вынужденного движения. Положение трубы	Процесс теплообмена	Вариант	Формулы для определения расчётного значения $Nu$	Среднеарифметическое отклонение критерия $Nu$ , %	Среднеквадратичное отклонение критерия $Nu$ , %
1	2	3	4	5	6

1	2	3	4	5	6
[1], табл. 1, стр. 63-67; турбулентная область движения, труба горизонтальная.	Охлаждение	1	$Nu_{жс} = 0,0205 \cdot Re_{жс}^{0,825} Pr_{жс}^{0,372} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,105}$	0,0470	1,06
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	1,5980	1,25
	Нагревание	1	$Nu_{жс} = 0,0169 \cdot Re_{жс}^{0,851} Pr_{жс}^{0,42} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,084}$	0,0507	1,70
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	0,3945	3,27
	Охлаждение. Нагревание	1	$Nu_{жс} = 0,0271 \cdot Re_{жс}^{0,811} Pr_{жс}^{0,329} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,27}$	0,0786	1,31
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	1,1718	1,39
[1], табл. 2, стр. 63-67; турбулентная область движения, труба вертикальная; вынужденное движение – сверху вниз	Охлаждение. Свободно-конвективное движение – сверху вниз	1	$Nu_{жс} = 0,0342 \cdot Re_{жс}^{0,789} Pr_{жс}^{0,3} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,199}$	0,0204	1,09
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	2,0145	1,58
	Нагревание. Свободно-конвективное движение – снизу вверх	1	$Nu_{жс} = 0,0219 \cdot Re_{жс}^{0,864} Pr_{жс}^{0,09} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,36}$	0,0810	2,95
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	0,1055	4,73
	Охлаждение. Нагревание	1	$Nu_{жс} = 0,0265 \cdot Re_{жс}^{0,803} Pr_{жс}^{0,426} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,195}$	0,0806	2,13
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	1,2509	2,06
[1], табл. 3, стр. 63-67; турбулентная область движения, труба вертикальная; вынужденное движение – снизу	Охлаждение. Свободно-конвективное движение – сверху вниз	1	$Nu_{жс} = 0,0298 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,315} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,161}$	0,0174	1,46
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	4,5225	2,59
	Нагревание. Свободно-конвективное движение – снизу вверх	1	$Nu_{жс} = 0,0103 \cdot Re_{жс}^{0,907} Pr_{жс}^{0,308} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,268}$	0,0520	3,35
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	4,1279	5,08

1	2	3	4	5	6
вверх.	Охлаждение. Нагревание	1	$Nu_{жс} = 0,0235 \cdot Re_{жс}^{0,813} Pr_{жс}^{0,432} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,141}$	0,0561	2,30
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	0,4856	2,63
[1], табл. 2 и 3, стр. 63-67; турбулентная область движения, труба вертикальная	Охлаждение. Нагревание	1	$Nu_{жс} = 0,0247 \cdot Re_{жс}^{0,808} Pr_{жс}^{0,438} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,163}$	0,0799	1,64
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	0,9639	1,60
[1], табл. 1, 2 и 3, стр. 63-67; турбулентная область движения, труба гориз., верт.	Охлаждение. Нагревание	1	$Nu_{жс} = 0,0278 \cdot Re_{жс}^{0,809} Pr_{жс}^{0,326} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,252}$	0,0900	1,07
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	0,2010	1,04
[1], табл. 4, стр. 63-67; переходная область движения, труба горизонтальная	Охлаждение	1	$Nu_{жс} = 0,0078 \cdot Re_{жс}^{0,917} Pr_{жс}^{0,408} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{-0,033}$	2,3553	0,25
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	18,7896	1,59
	Нагревание	1	$Nu_{жс} = 0,0046 \cdot Re_{жс}^{0,996} Pr_{жс}^{0,391} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,391}$	0,7631	0,28
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	18,8014	2,65
	Охлаждение. Нагревание	1	$Nu_{жс} = 0,0063 \cdot Re_{жс}^{0,942} Pr_{жс}^{0,459} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,033}$	0,7097	0,31
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	18,7938	1,34
[1], табл. 5, стр. 63-67; переходная область движения, труба	Охлаждение. Свободно-конвективное движение – сверху вниз	1	$Nu_{жс} = 0,0043 \cdot Re_{жс}^{0,996} Pr_{жс}^{0,194} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{-0,022}$	2,0426	0,44
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	25,2483	4,39

1	2	3	4	5	6	
вертикальн ая; вынужденн ого движение – сверху вниз	Нагревание. Свободно- конвективно е движение – снизу вверх	1	$Nu_{жс} = 0,066 \cdot Re_{жс}^{0,881} Pr_{жс}^{0,84} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,075}$	4,7572	1,40	
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	4,6883	1,13	
	Охлаждение. Нагревание	1	$Nu_{жс} = 0,0042 \cdot Re_{жс}^{0,951} Pr_{жс}^{0,751} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,049}$	0,2330	0,63	
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	14,0338	1,96	
[1], табл. 6, стр. 63-67; переходная область движения, труба вертикальн ая; вынужденн ое движение – снизу вверх	Охлаждение. Свободно- конвективно е движения –сверху вниз	1	$Nu_{жс} = 0,0016 \cdot Re_{жс}^{0,955} Pr_{жс}^{1,34} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{-0,646}$	62,2348	7,31	
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	8,4726	2,00	
	Нагревание. Свободно- конвективно е движение – снизу вверх	1	$Nu_{жс} = 0,0002 \cdot Re_{жс}^{1,32} Pr_{жс}^{0,563} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,114}$	11,1862	2,09	
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	26,4065	6,79	
	Охлаждение. Нагревание	1	$Nu_{жс} = 0,0045 \cdot Re_{жс}^{0,928} Pr_{жс}^{0,84} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{-0,234}$	1,9963	2,7	
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	18,4359	3,67	
	[1], табл. 5 и 6, стр. 63- 67; переходная область движения, труба верт.	Охлаждение. Нагревание	1	$Nu_{жс} = 0,003 \cdot Re_{жс}^{1,026} Pr_{жс}^{0,487} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,012}$	0,9837	1,08
			2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	16,0147	1,92
[1], табл. 4, 5 и 6, стр. 63- 67; переходная область движения, труба гориз., верт.	Охлаждение. Нагревание	1	$Nu_{жс} = 0,0047 \cdot Re_{жс}^{0,975} Pr_{жс}^{0,471} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,023}$	0,1271	0,48	
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	17,7040	1,11	
[1], табл. 7,	Охлаждение	1	$Nu_2 = 0,0603 \cdot (Re Pr)_2^{0,122} \cdot (Gr Pr)_2^{0,333}$	0,3800	0,25	

1	2	3	4	5	6
стр. 63-67; ламинарна я область движения, труба горизонтал ьная	Нагревание	2	$Nu_z = 0,74 \cdot (Re Pr)_z^{0.2} \cdot (Gr Pr)_z^{0.1}$	1,7655	0,26
		1	$Nu_z = 0,1723 \cdot (Re Pr)_z^{0.281} \cdot (Gr Pr)_z^{0.151}$	0,5082	0,34
	Охлаждение. Нагревание	2	$Nu_z = 0,74 \cdot (Re Pr)_z^{0.2} \cdot (Gr Pr)_z^{0.1}$	2,2209	0,35
		1	$Nu_z = 0,4326 \cdot (Re Pr)_z^{0.272} \cdot (Gr Pr)_z^{0.095}$	0,4848	0,22
		2	$Nu_z = 0,74 \cdot (Re Pr)_z^{0.2} \cdot (Gr Pr)_z^{0.1}$	1,9985	0,22
[1], табл. 8, стр. 63-67; ламинарна я область движения, труба вертикальн ая; направлени е вынужденн ого движения сверху вниз	Охлаждение	1	$Nu_z = 0.9278 \cdot (Re Pr)_z^{0.075} \cdot (Gr Pr)_z^{0.107} \times$ $\times (b_z dt)^{-0.095}$	0,0307	0,04
		2	$Nu_z = [0,74 \cdot (Re Pr)_z^{0.2} - (b_z dt)^{0.02}] \times$ $\times (Gr Pr)_z^{0.1}$	1,7013	0,34
	Нагревание	1	$Nu_z = 3244,4214 \cdot (Re Pr)_z^{0.134} \times$ $\times (Gr Pr)_z^{-0.372} \cdot (b_z dt)^{0.152}$	0,0035	0,09
		2	$Nu_z = [0,74 \cdot (Re Pr)_z^{0.2} + (b_z dt)^{0.02}] \times$ $\times (Gr Pr)_z^{0.1}$	65,8756	4,54
[1], табл. 9, стр. 63-67; ламинарна я область движения, труба вертикальн ая; направлени е вынужденн ого движения снизу вверх	Охлаждение	1	$Nu_z = 0,6681 \cdot (Re Pr)_z^{0.155} \cdot (Gr Pr)_z^{0.149} \times$ $\times (b_z dt)^{-0.002}$	0,0051	0,10
		2	$Nu_z = [0,74 \cdot (Re Pr)_z^{0.2} + (b_z dt)^{0.02}] \times$ $\times (Gr Pr)_z^{0.1}$	62,3600	3,81
	Нагревание	1	$Nu_z = 145,8402 \cdot (Re Pr)_z^{0.153} \times$ $\times (Gr Pr)_z^{-0.238} \cdot (b_z dt)^{-0.011}$	0,0169	0,12
		2	$Nu_z = [0,74 \cdot (Re Pr)_z^{0.2} - (b_z dt)^{0.02}] \times$ $\times (Gr Pr)_z^{0.1}$	4,9180	0,41
[1], табл. 8 и 9, стр. 63- 67; ламинарна я область движения, труба верт.	Направление подъёмной силы совпадает с направлени ем вынужденно го движения	1	$Nu_z = 0.7376 \cdot (Re Pr)_z^{0.19} \cdot (Gr Pr)_z^{0.102} \times$ $\times (b_z dt)^{0.043}$	0,0772	0,16
		2	$Nu_z = [0,74 \cdot (Re Pr)_z^{0.2} - (b_z dt)^{0.02}] \times$ $\times (Gr Pr)_z^{0.1}$	3,4334	0,26
[1], табл. 8 и 9, стр. 63- 67; ламинарна я область движения, труба верт.	Направление подъёмной силы противополо жно направлени ю	1	$Nu_z = 1,4169 \cdot (Re Pr)_z^{0.142} \cdot (Gr Pr)_z^{0.11} \times$ $\times (b_z dt)^{0.019}$	0,0348	0,20
		2	$Nu_z = [0,74 \cdot (Re Pr)_z^{0.2} + (b_z dt)^{0.02}] \times$ $\times (Gr Pr)_z^{0.1}$	64,1178	2,81

1	2	3	4	5	6
	вынужденно го движения				
[1], табл. 2 и 3, стр. 63- 67; турбулентн ая область движения, труба верт.	Направление подъёмной силы противопо жно направлени ю вынужденно го движения	1	$Nu_{жс} = 0,0136 \cdot Re_{жс}^{0,834} Pr_{жс}^{0,73} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{-0,3}$	0,0643	2,02
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	2,0686	2,79
[1], табл. 2 и 3, стр. 63- 67; турбулентн ая область движения; труба верт.	Направление подъёмной силы совпадает с направлени ем вынужденно го движения	1	$Nu_{жс} = 0,0264 \cdot Re_{жс}^{0,802} Pr_{жс}^{0,419} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,162}$	0,0565	1,84
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	0,0601	1,87
[1], табл. 5 и 6, стр. 63- 67; переходная область движения, труба верт.	Направление подъёмной силы противопо жно направлени ю вынужденно го движения	1	$Nu_{жс} = 0,0122 \cdot Re_{жс}^{0,841} Pr_{жс}^{0,737} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{-0,059}$	0,3283	0,60
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	6,2020	0,98
[1], табл. 5 и 6, стр. 63- 67; переходная область движения, труба верт.	Направление подъёмной силы совпадает с направлени ем вынужденно го движения	1	$Nu_{жс} = 0,0009 \cdot Re_{жс}^{1,159} Pr_{жс}^{0,489} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,06}$	0,0906	0,58
		2	$Nu_{жс} = 0,028 \cdot Re_{жс}^{0,8} Pr_{жс}^{0,4} \left( \frac{Pr_{жс}}{Pr_c} \right)^{0,25}$	25,8274	3,81

### Библиографический список

1. **Тейлор, Дж.** Введение в теорию ошибок / Дж. Тейлор. – М.: Мир, 1985. – 272 с.
2. **Новицкий П. В.** Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.
3. **Аладьев, И. Т.** Зависимость теплоотдачи в трубах от направления теплового потока и естественной конвекции / И. Т. Аладьев, М. А. Михеев, О. С. Федынский // Известия АН СССР,

Отделение технических наук. – 1951. – № 1. – С. 53-67.

4. **Михеев, М. А.** Теплоотдача при турбулентном течении жидкости в трубах / М. А. Михеев // Известия АН СССР, Отделение технических наук. – 1952. – № 10. – С. 1448-1454.

5. **Аладьев, И. Т.** Экспериментальное определение локальных и средних коэффициентов теплоотдачи при турбулентном течении жидкости в трубах / И. Т. Аладьев // Известия АН СССР, Отделение технических наук. – 1951. – № 11. – С. 1669-1681.

6. **Петухов, Б. С.** К вопросу о теплообмене при турбулентном течении жидкости в трубах / Б. С. Петухов, В. В. Кириллов // Теплоэнергетика. – 1958. – № 4. – С. 63-68.

7. **Исаченко, В. П.** Теплопередача / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – М.: Энергия, 1969. – 440 с.

8. **Кирпичев, М. В.** Теплопередача / М. В. Кирпичев, М. А. Михеев, М. А. Эйгенсон. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1940. – 292 с.

9. **Кутателадзе, С. С.** Справочник по теплопередаче / С. С. Кутателадзе, В. М. Боришанский. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1959. – 414 с.

10. **Кутателадзе, С. С.** Теплопередача и гидродинамическое сопротивление. Справочное пособие / С. С. Кутателадзе. – М.: Энергоиздат, 1990. – 367 с.

11. **Михеев, М. А.** Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеева. – М.: Энергия, 1975. – 312 с.

12. **Беннет, К. О.** Гидродинамика, теплообмен и массообмен / К. О. Беннет, Дж. Е. Майерс. – М.: Недра, 1966. – 726 с.

13. **Андреев, Е. И.** Расчет тепло- и массообмена в контактных аппаратах / Е. И. Андреев. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 192 с.

## References

1. **Taylor, J.** Introduction to the theory of errors / J. Taylor. – Moscow: “Mir” (World), 1985. – 272 p. – [in Russian].

2. **Novitsky P. V.** Estimation of errors of results of measurements / P. V. Novitsky, I. A. Zograf. – L.: Energoatomizdat, 1991. – 304 p. – [in Russian].

3. **Aladev, I. T.** Dependence of heat transfer in pipes from a direction of a thermal stream and natural convection / I. T. Aladev, M. A. Mikheev, O. S. Fedinsky // Proceedings of the USSR Academy of Sciences, Department of Technical Sciences. – 1951. – № 1. – P. 53-67. – [in Russian].

4. **Mikheev, M. A.** Heat transfer at liquid turbulent flow in pipes / M. A. Mikheev // Proceedings of the USSR Academy of Sciences, Department of Technical Sciences. – 1952. – № 10. – P. 1448-1454. – [in Russian].

5. **Aladev, I. T.** Experimental determination of local and average heat transfer factors at liquid turbulent flow in pipes / I. T. Aladev // Proceedings of the USSR Academy of Sciences, Department of Technical Sciences. – 1951. – № 11. – P. 1669-1681. – [in Russian].

6. **Petukhov, B. S.** To a question on heat exchange at liquid turbulent flow in pipes / B. S. Petukhov, V. V. Kirillov // “Teploenergetika” (Heat energy). – 1958. – № 4. – P. 63-68. – [in Russian].

7. **Isachenko, V. P.** Heat transfer / V. P. Isachenko, V. A. Osipova, A. S. Sukomel. – Moscow: “Energia” (Power), 1969. – 440 p. – [in Russian].

8. **Kirpichev, M. V.** Heat transfer / M. V. Kirpichev, M. A. Mikheev, M. A. Eygenon. – М.-Л.: Gosenergoizdat, 1940. – 292 p. – [in Russian].

9. **Kutateladze, S. S.** Handbook of Heat Transfer / S. S. Kutateladze, V. M. Borishansky. – М.-Л.: Gosenergoizdat, 1959. – 414 p. – [in Russian].

10. **Kutateladze, S. S.** Heat transfer and hydrodynamic resistance. Reference Manual / S. S. Kutateladze. – М.: Energoizdat, 1990. – 367 p. – [in Russian].

11. **Mikheev, M. A.** Fundamentals of Heat Transfer / M. A. Mikheev, I. M. Mikheeva. – Moscow: “Energia” (Power), 1975. – 312 p. – [in Russian].

12. **Bennett, C. A.** Hydrodynamics, heat and mass transfer / C. A. Bennett, J. E. Myers. – М.: Nedra, 1966. – 726 p. – [in Russian].

13. **Andreev, E. I.** Calculation of heat and mass transfer in the contact apparatus / E. I. Andreev. – Л.: Energoatomizdat, 1985. – 192 p. – [in Russian].

**PROCESSING OF EXPERIMENTAL DATA  
BY THE METHOD OF THE LEAST SQUARES**

© 2010 A. V. Ovchinnikov, E. K. Krasnochub, V. M. Bronstein

State Research and Production Space Centre “TsSKB-Progress”, Samara

The particular case of application of a method of the least squares is considered. The analysis of conformity of received before without application of the method of the least squares formulas for heat transfer factors at movement of fluids in pipes to the best decisions is carried out. New analytical dependences for definition of the specified factors of heat transfer are offered

*The method of the least squares, processing of experimental data, heat transfer factor, movement of fluids in pipes, similarity criteria*

**Информация об авторах**

**Овчинников Александр Викторович**, ведущий конструктор, ФГУП «ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс», [csdb@samtel.ru](mailto:csdb@samtel.ru). Область научных интересов: проектирование ракетно-космической техники.

**Красночуб Евгений Карпович**, инженер-конструктор, доктор технических наук, ФГУП «ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс», [csdb@samtel.ru](mailto:csdb@samtel.ru). Область научных интересов: проектирование ракетно-космической техники.

**Бронштейн Виталий Михайлович**, начальник группы, кандидат технических наук, ФГУП «ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс», [csdb@samtel.ru](mailto:csdb@samtel.ru). Область научных интересов: проектирование ракетно-космической техники.

**Ovchinnikov Alexander Viktorovich**, leading designer of SRP SC “TsSKB-Progress”, [csdb@samtel.ru](mailto:csdb@samtel.ru). Field of his scientific interest is design of rocket and space technics.

**Krasnochub Evgenie Karpovich**, design engineer of SRP SC “TsSKB-Progress”, doctor of technical sciences, [csdb@samtel.ru](mailto:csdb@samtel.ru). Field of his scientific interest is design of rocket and space technics.

**Bronstein Vitaly Mikhailovich**, head of unit of SRP SC “TsSKB-Progress”, candidate of technical science, [csdb@samtel.ru](mailto:csdb@samtel.ru). Field of his scientific interest is design of rocket and space technics.