

УДК 629.78

МЕТОДИКА РАСЧЁТА СОБСТВЕННОЙ ЁМКОСТИ ПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

© 2013 Н. Д. Сёмкин, В. В. Брагин, Р. А. Помельников, В. Л. Балакин

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Предложена методика расчёта распределения потенциалов на основе использования триангуляционного метода аппроксимации поверхностей, метода площадок и аналитического нахождения элементов матрицы кулоновского взаимодействия. Полученные результаты имеют хорошую сходимость с экспериментами по исследованию процессов электризации на малом космическом аппарате "АИСТ".

Триангуляция, собственная ёмкость, метод интегральных уравнений, космический аппарат, электризация.

Введение

Взаимодействие космического аппарата (КА) с окружающей космической плазмой имеет большое научное значение [1], поскольку оно позволяет определить свойства и состав плазмы, и, кроме того, плазма является одним из вредных факторов воздействия космического пространства на КА. В результате эта проблема имеет как научное, так и прикладное значение [2, 3].

В настоящее время существуют несколько методик математического моделирования электризации КА [4]. Эти методики основаны на различных методах аппроксимации поверхности и таких математических методах, как метод интегральных уравнений (МИУ), называемый также методом граничных элементов, или метод конечных элементов (МКЭ). Эти математические методы имеют свои преимущества и недостатки, они применяются в зависимости от высоты орбит КА и, следовательно, в зависимости от свойств окружающей КА плазмы. Хотя для унификации математического обеспечения возможно применение МИУ для проведения анализа электризации как высокоорбитальных, так и низкоорбитальных КА.

Данный метод пространственного распределения потенциала описывается следующим соотношением [4]:

$$U(r) = \int_s \frac{s(r')}{|r-r'|} dS', \quad (1)$$

где $U(r)$ – пространственное распределение потенциала; $s(r')$ – относительная плотность поверхностного заряда; $r(r')$ – распределение пространственного заряда в окружающем КА пространстве; r' – радиус-вектор центра тяжести i -го элемента поверхности КА.

Для численного решения данного интегрального уравнения относительно $s(r)$ необходимо разбить поверхность КА на элементы, в качестве которых удобно использовать треугольники. Плотность поверхностного заряда s_i на каждом элементе считается постоянной, и, следовательно, интегральное уравнение сводится к системе линейных уравнений относительно плотности зарядов элементов s_i :

$$\sum_j A_{mn} s_j = U_i^*, \quad (2)$$

где A_{mn} – матрица кулоновского взаимодействия; U_i^* – эффективный потенциал поверхности i -го элемента.

Искомым решением этой системы является матрица взаимных ёмкостей

элементов поверхности КА C_{mn} , которая является обратной к матрице A_{mn} , определяемой уравнением [4]:

$$A_{mn} = \int_{S_i} \frac{dS_i}{|r_i - r_0|}, \quad (3)$$

где r_0 – радиус-вектор центр тяжести i -го треугольника; интегрирование по переменной r_i ведётся по площади треугольника. Диагональные элементы этой матрицы имеют особенность при $r_i = r_j$, в результате которой уравнения типа (3) называются уравнениями Фредгольма первого рода.

Методика расчёта собственной ёмкости пластинки

При нахождении матрицы взаимных ёмкостей элементов поверхности КА необходимо решать уравнение Фредгольма, которое не имеет численного решения, т.к. ядро данного интегрального уравнения обращается в бесконечность в области интегрирования. В связи с этим авторами предложена методика, основанная на су-

$$y = \frac{x}{x_{i+1} - x_i} (y_{i+1} - y_i) + y_i - \frac{x_i}{x_{i+1} - x_i} (y_{i+1} - y_i) = Ax + B, \quad (5)$$

где

$$A = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad B = y_i - \frac{x_i}{x_{i+1} - x_i} (y_{i+1} - y_i).$$

ществующем аналитическом методе расчёта собственной ёмкости [5]. Данный метод нахождения собственной ёмкости сводится к аппроксимации плоской поверхности квадратной сеткой со стороной a и решению интеграла вида [5]:

$$\int_S \frac{dS}{R} = \int_0^a dx \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}}, \quad (4)$$

где x_i и y_i – координаты центра масс элемента квадратной сетки.

Для применения данного метода нахождения собственной ёмкости необходимо аппроксимировать поверхность КА треугольной сеткой.

Аппроксимация прямоугольной пластинки производится следующим образом.

Разбиваем плоскость на прямоугольники с координатами (x_i, y_i) . Каждый прямоугольник разбиваем на две части отрезком (рис. 1) с уравнением, преобразованным к виду:

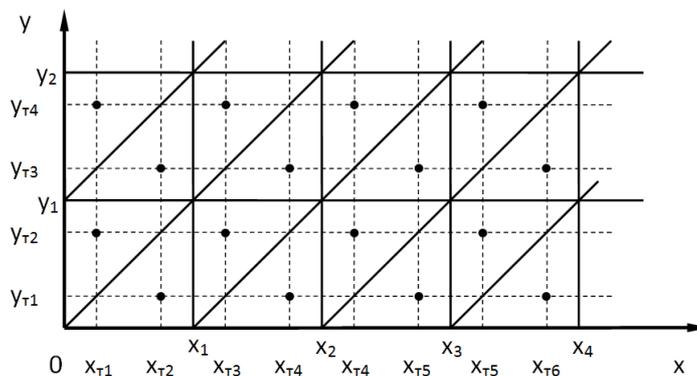


Рис. 1. Аппроксимация прямоугольной пластинки

Находим пределы интегрирования при условии:

- центр масс треугольника (x_{Ti}, y_{Ti}) лежит выше гипотенузы треугольника. Тогда интеграл (3) примет вид:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{Ax+B}^{y_{i+1}} \frac{dy}{\sqrt{(x-x_{Ti})^2 + (y-y_{Ti})^2}}; \quad (6)$$

- центр масс треугольника (x_i, y_i) лежит ниже гипотенузы треугольника.

Тогда интеграл примет вид:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{y_i}^{Ax+B} \frac{dy}{\sqrt{(x-x_{Ti})^2 + (y-y_{Ti})^2}}. \quad (7)$$

Произведём следующие замены в уравнении (7):

$$C=x-x_{Ti}, D=y-y_{Ti}, dD=dy$$

и получим с учётом изменения области интегрирования уравнения следующее уравнение:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{y_i-y_{Ti}}^{Ax+B-y_{Ti}} \frac{dD}{\sqrt{C^2 + D^2}}. \quad (8)$$

В результате интегрирования (8) получаем разницу интегралов

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\ln \left(Ax + B - y_{Ti} + \sqrt{(x-x_{Ti})^2 + (Ax+B-y_{Ti})^2} \right) - \ln \left(y_i - y_{Ti} + \sqrt{(x-x_{Ti})^2 + (y_i-y_{Ti})^2} \right) \right) dx. \quad (9)$$

Преобразуем натуральные логарифмы в уравнении (9) в обратные тригонометрические функции [6] и произведём замену $B_{y_{Ti}} = B - y_{Ti}$:

$$\text{Arcsh} \left(\frac{Ax + B_{y_{Ti}}}{x - x_{Ti}} \right) = \ln \left(\frac{Ax + B_{y_{Ti}} + \sqrt{(Ax + B_{y_{Ti}})^2 + (x - x_{Ti})^2}}{x - x_{Ti}} \right) + \ln(x - x_{Ti}); \quad (10)$$

$$\text{Arcsh} \left(\frac{y - y_{Ti}}{x - x_{Ti}} \right) = \ln \left(\frac{y - y_{Ti} + \sqrt{(y - y_{Ti})^2 + (x - x_{Ti})^2}}{x - x_{Ti}} \right) + \ln(x - x_{Ti}). \quad (11)$$

Подставим (10) и (11) в (9) и получим

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\text{Arcsh} \left(\frac{Ax + B_{y_{Ti}}}{x - x_{Ti}} \right) \right) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\text{Arcsh} \left(\frac{y_i - y_{Ti}}{x - x_{Ti}} \right) \right) dx. \quad (12)$$

Для решения первого интеграла в уравнении (12) произведём замену: $t=x-x_{Ti}$, $dt=dx$, $M=Ax_{Ti}+B_{y_{Ti}}$ и преобразуем пределы интегрирования.

Решением интеграла будет

$$\int_{x_i-x_{Ti}}^{x_{i+1}-x_{Ti}} \text{Arcsh} \left(\frac{Ax + B_{y_{Ti}}}{x - x_{Ti}} \right) dx = \left| t \text{Arcsh} \left(\frac{At + M}{t} \right) \right|_{x_i-x_{Ti}}^{x_{i+1}-x_{Ti}} + \left| \frac{M}{\sqrt{1+A^2}} \ln \left(2\sqrt{(1+A^2) \cdot t^2 + M^2} + 2AMt + \frac{2(AM+t+A^2t)}{\sqrt{1+A^2}} \right) \right|_{x_i-x_{Ti}}^{x_{i+1}-x_{Ti}}. \quad (13)$$

Преобразуем (13) к виду:

$$\left| t \operatorname{Arcsh} \left(\frac{At + M}{t} \right) + \frac{M}{\sqrt{1 + A^2}} \left(\ln \left(\sqrt{((1 + A^2) \cdot t^2 + M^2 + 2A \cdot Mt) \cdot (1 + A^2)} + A \cdot M + t + A^2 t \right) + \ln \left(\frac{2}{\sqrt{1 + A^2}} \right) \right) \right| \quad (14)$$

Преобразуем подкоренное выражение из уравнения (14):

$$\begin{aligned} ((1 + A^2) \cdot t^2 + M^2 + 2A \cdot Mt) \cdot (1 + A^2) &= A^2 M^2 + 2AMt + 2A^3 Mt + t^2 + \\ &+ 2A^2 t^2 + A^4 t^2 + M^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Часть выражения (15) можно преобразовать в квадрат суммы:

$$A^2 M^2 + 2AMt + 2A^3 Mt + t^2 + 2A^2 t^2 + A^4 t^2 = (AM + t + A^2 t)^2. \quad (16)$$

Тогда подкоренное выражение в уравнении (14) будет иметь вид:

$$((1 + A^2) \cdot t^2 + M^2 + 2A \cdot M) \cdot (1 + A^2) = (AM + t + A^2 t)^2 + M^2. \quad (17)$$

Уравнение (14) преобразуем к виду:

$$\left| t \operatorname{Arcsh} \left(\frac{At + M}{t} \right) + \frac{M}{\sqrt{1 + A^2}} \left(\ln \left(\sqrt{(AM + t + A^2 t)^2 + M^2 + A \cdot M + t + A^2 t} \right) + \ln \left(\frac{2}{\sqrt{1 + A^2}} \right) \right) \right| \quad (18)$$

Для преобразования натурального логарифма к обратной гиперболической функции приведём уравнение (18) к следующему виду:

$$\left| t \operatorname{Arcsh} \left(\frac{At + M}{t} \right) + \frac{M}{\sqrt{1 + A^2}} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{(AM + t + A^2 t)^2 + M^2 + AM + t + A^2 t}}{M} \right) + \ln \left(\frac{2M}{\sqrt{1 + A^2}} \right) \right) \right| \quad (19)$$

Заменим часть уравнения (19) на

$$\ln \left(\frac{\sqrt{(AM + t + A^2 t)^2 + M^2 + AM + t + A^2 t}}{M} \right) = \operatorname{Arcsh} \left(\frac{AM + t + A^2 t}{M} \right) \quad (20)$$

Окончательно после подстановки (20) в (19) с учётом обратных преобразований получим

$$|t| \operatorname{Arcsh} \left(\frac{At + Ax_{Ti} + B_{y_{Ti}}}{t} \right) + \left| \frac{Ax_{Ti} + B_{y_{Ti}}}{\sqrt{1 + A^2}} \right| \left(\operatorname{Arcsh} \left(\frac{A(Ax_{Ti} + B_{y_{Ti}}) + t + A^2 t}{Ax_{Ti} + B_{y_{Ti}}} \right) + \ln \left(\frac{2(Ax_{Ti} + B_{y_{Ti}})}{\sqrt{1 + A^2}} \right) \right) \Bigg|_{x_i - x_{Ti}}^{x_{i+1} - x_{Ti}} \quad (21)$$

Решение второго интеграла уравнения (12) будет иметь вид:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \operatorname{Arcsh} \left(\frac{y_i - y_{Ti}}{x - x_{Ti}} \right) dx = \left| x - x_{Ti} \operatorname{Arcsh} \left(\frac{y_i - y_{Ti}}{x - x_{Ti}} \right) + \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \left| y_i - y_{Ti} \operatorname{Arcsh} \left(\frac{x - x_{Ti}}{y_i - y_{Ti}} \right) \right|_{x_i} \quad (22)$$

Окончательное выражение матрицы взаимных ёмкостей элементов поверхности КА выглядит следующим образом:

$$C_{ij} = |x_{i+1} - x_{Ti}| \operatorname{Arcsh} \left(\frac{Ax_{i+1} + B_{y_{Ti}}}{t} \right) + \left| \frac{Ax_{Ti} + B_{y_{Ti}}}{\sqrt{1 + A^2}} \right| \operatorname{Arcsh} \left(\frac{A(Ax_{Ti} + B_{y_{Ti}}) + x_{i+1} - x_{Ti} + A^2(x_{i+1} - x_{Ti})}{Ax_{Ti} + B_{y_{Ti}}} \right) - \\ - |x_i - x_{Ti}| \operatorname{Arcsh} \left(\frac{Ax_i + B_{y_{Ti}}}{t} \right) - \left| \frac{Ax_{Ti} + B_{y_{Ti}}}{\sqrt{1 + A^2}} \right| \operatorname{Arcsh} \left(\frac{A(Ax_{Ti} + B_{y_{Ti}}) + x_i - x_{Ti} + A^2(x_i - x_{Ti})}{Ax_{Ti} + B_{y_{Ti}}} \right) - \\ - \left(|x_{i+1} - x_{Ti}| \operatorname{Arcsh} \left(\frac{y_i - y_{Ti}}{x_{i+1} - x_{Ti}} \right) + |y_i - y_{Ti}| \operatorname{Arcsh} \left(\frac{x_{i+1} - x_{Ti}}{y_i - y_{Ti}} \right) \right) + \left(|x_i - x_{Ti}| \operatorname{Arcsh} \left(\frac{y_i - y_{Ti}}{x_i - x_{Ti}} \right) + |y_i - y_{Ti}| \operatorname{Arcsh} \left(\frac{x_i - x_{Ti}}{y_i - y_{Ti}} \right) \right) \quad (23)$$

Выражение (23) позволяет рассчитать матрицу взаимных ёмкостей элементов плоской поверхности. Матрица является решением системы линейных уравнений, позволяющих получить плотность поверхностного заряда (потенциал) поверхности. При другом методе триангуляции поверхности (аппроксимации поверхности треугольниками другой формы) [7]

и, следовательно, других пределах интегрирования, возможно рассчитать потенциал поверхности элементов более сложной формы, например, поверхности КА.

В качестве примера проведён расчёт потенциалов для плоского элемента конструкции КА (солнечной батареи). Получена следующая матрица собственных ёмкостей:

2.407	0.960	0.519	0.365	0.508	0.724	0.367	0.347
0.960	2.407	0.724	0.508	0.365	0.519	0.347	0.367
0.508	0.724	2.407	0.960	0.353	0.532	0.508	0.724
0.365	0.519	0.960	2.407	0.264	0.350	0.365	0.519
0.519	0.365	0.347	0.264	2.407	0.960	0.519	0.365
0.724	0.508	0.532	0.353	0.960	2.407	0.724	0.508
0.367	0.347	0.519	0.365	0.508	0.724	2.407	0.960
0.347	0.367	0.724	0.508	0.365	0.519	0.960	2.407

В результате получаем следующее распределение потенциала поверхности плоского элемента КА (рис. 2).

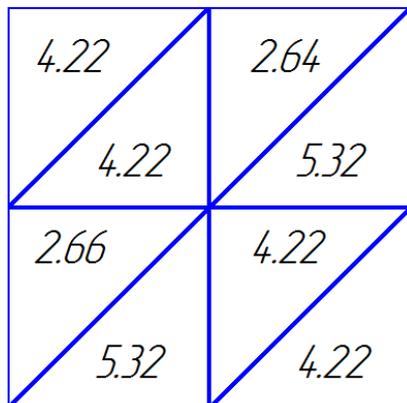


Рис. 2. Распределение собственных потенциалов элементов поверхности КА

В примере при расчёте шаг сетки составлял 0,05 м и суммарный потенциал на пластинке составил 32,8 В. При пересчёте на реальную солнечную батарею, например с площадью 2 м², потенциал составит 3280В. Расчёт был проведён для условий функционирования КА в диапазоне высот 550-600 км.

Выводы

1. Предложенная методика, основанная на аналитическом решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода, позволяет получить матрицу собственных ёмкостей элементов КА, применяемую для расчёта значения потенциалов поверхностей КА различной геометрической формы, что позволяет повысить точность и скорость вычислений методом интегральных уравнений.

2. Данная методика позволяет определить потенциал поверхности не только КА, но и рассчитать собственную ёмкость бесконтактных ёмкостных датчиков или определить потенциал исследуемых в ускорителе частиц образцов материалов.

3. Измеренные потенциалы поверхности МКА «АИСТ» имеют хорошее совпадение с результатами, полученными в ходе моделирования.

Библиографический список

1. Графодатский, О.С. Взаимодействие спутников связи с окружающей средой [Текст] / О.С. Графодатский, Ш.Н. Исляев. – Томск: МГП «РАСКО», 1993. – 208 с.

2. Моделирование распределения электромагнитного поля при электростатическом разряде на поверхности космического аппарата [Текст] / Н.Д. Семкин, В.Л. Балакин, Р.А. Помельников [и др.] // Вестн. СГАУ, – Самара. – 2012. – №2(33). – С.112-119.

3. Методы защиты негерметичных отсеков космического аппарата от проникновения электромагнитного поля [Текст] / Н.Д. Семкин, В.Л. Балакин, Р.А. Помельников [и др.] // Вестн. СГАУ, Самара. – 2012. – №2(33). – С.120-125.

4. Модель космоса [Текст]: в 2 т. / под ред. М.И. Панасюка, Л.С. Новикова. – Т. 2: Воздействие космической среды на материалы и оборудование космических аппаратов. – М.: КДУ, 2007. – 1143 с.

5. Иоссель, Ю.Я. Расчет электрической ёмкости [Текст] / Ю.Я. Иоссель, Э.С. Кочанов, М.Г. Струнский. – Л.: ЭНЕРГОИЗДАТ. – 1981. – 285 с.

6. Янпольский, А.Р. Гиперболические функции [Текст] / А.Р. Янпольский. – М.: Гос. изд-во физ.-математ. лит. – 1960. – 195 с.

7. Галанин, М.П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы [Электронный ресурс] / www.keldysh.ru/papers/2006/prep10/prep2006_10.html

METHOD OF CALCULATING SELF-CAPACITANCE IN PLANAR STRUCTURAL ELEMENTS OF A SPACECRAFT

© 2013 N. D. Syomkin, V. V. Bragin, R. A. Pomelnikov, V. L. Balakin

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov
(National Research University)

The paper presents a methodology for calculating distribution of potentials based on the triangulation method of plane approximation, surface method and analytical determination of the matrix elements of Coulomb interaction. The results obtained demonstrate good agreement with the experiments on the electrization process in small spacecraft «AIST».

Triangulation, self-capacitance, method of integral equations, spacecraft, electrization.

Информация об авторах

Сёмкин Николай Данилович, доктор технических наук, профессор кафедры радиотехники и медицинских диагностических систем, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: semkin@ssau.ru. Область научных интересов: системы управления движением, физика высокоскоростного удара, космические исследования.

Брагин Василий Владимирович, аспирант кафедры радиотехники и медицинских диагностических систем, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: bragin_vv@inbox.ru. Область научных интересов: электромагнитная совместимость, физика космической плазмы.

Помельников Роман Александрович, младший научный сотрудник, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: r_cosmos@mail.ru. Область научных интересов: космическая физика, масс-спектрометрия, электромагнитная совместимость.

Балакин Виктор Леонидович, доктор технических наук, профессор кафедры космического машиностроения, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: balakin@ssau.ru. Область научных интересов: динамика полёта и управление движением летательных аппаратов, космическое машиностроение.

Syomkin Nikolay Danilovich, doctor of technical science, professor, the department of radio engineering and medical diagnostic systems, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: semkin@ssau.ru. Area of research: high-speed impact, mass spectrometry, space device engineering.

Bragin Vasily Vladimirovich, postgraduate student, the department of radio engineering and medical diagnostic systems, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: bragin_vv@inbox.ru. Area of research: electromagnetic compatibility, space plasma physics.

Pomelnikov Roman Alexandrovich, junior research associate, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: r_cosmos@mail.ru. Area of research: space physics, mass-spectrometry, electromagnetic compatibility.

Balakin Victor Leonidovich, doctor of technical science, professor, the department of space engineering, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: balakin@ssau.ru. Area of research: flight dynamics, flying vehicle motion control, space engineering.