

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЁТА С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ТЕНЗОРОМ ИНЕРЦИИ И ПОЛОЖЕНИЕМ ЦЕНТРА МАСС

© 2021

Д. В. Верещиков

кандидат технических наук, доцент, начальник кафедры;
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная
академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж;
[ydvikt@yandex.ru](mailto:vdvikt@yandex.ru).

Представлен вывод аналитических выражений, составляющих основу математической модели динамики полёта самолёта, для дифференциальных уравнений, описывающих изменение скоростей крена, рыскания и тангажа, а также составляющих скорости полёта в проекциях на оси связанной системы координат, начало которой в общем случае не совпадает с центром масс самолёта, а направление осей не совпадает с его главными центральными осями инерции. Дифференциальные уравнения для угловых и линейных скоростей доведены до удобной для применения численных методов и ЭВМ формы и позволяют получать достоверные результаты моделирования динамики пространственного движения самолёта с произвольным тензором инерции и положением центра масс.

Тензор инерции; динамика движения; центр масс; угловая скорость; системы координат

Цитирование: Верещиков Д.В. Система дифференциальных уравнений динамики пространственного движения самолёта с произвольными тензором инерции и положением центра масс // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 2. С. 7-18. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-2-7-18

Введение

Динамика пространственного движения самолётов при решении ими различных целевых задач пилотирования описывается системой, включающей большое количество дифференциальных и линейных алгебраических уравнений, связывающих кинематические параметры движения, параметры атмосферы, силовой установки и системы управления. Наличие эффективных численных методов, специального программного обеспечения и современных вычислительных мощностей позволяет создавать и применять на практике в известной степени громоздкие математические модели, освобождающие исследователя от необходимости введения допущений и предположений, упрощающих эти модели и, в ряде случаев, искажающих результаты моделирования. В подавляющем большинстве случаев движение самолёта рассматривается в связанной $OXYZ$ и (или) скоростной $OX_a Y_a Z_a$ системах координат [1], начало которых неподвижно и размещается в условном центре масс симметричного относительно вертикальной плоскости OXY самолёта. Считается, что главные центральные оси инерции совпадают с осями связанной системы координат, а следовательно тензор инерции $|I|$ самолёта в отношении центробежных моментов инерции I_{xz} , I_{yz} , а, иногда и I_{xy} , возможно упростить, приравняв их к нулю. Возможное перемещение центра масс самолёта относительно принятого за основу начала системы координат либо вообще не учитывается, либо учитывается дополнительными моментами в правых частях дифференциальных уравнений, описывающих изменение скоростей крена ω_x , рыскания ω_y и тангажа ω_z . В ряде случаев применяются выражения, учитывающие изменение аэродинамиче-

ских производных, вызванное влиянием центра их приведения на величину аэродинамических моментов, полагая, что центр приведения должен совпадать с центром масс самолёта хотя, вообще говоря, вращательные, например, аэродинамические производные, являются функцией мгновенного центра вращения, а не центра масс самолёта.

Актуальность

Результаты анализа боевого применения самолётов позволяют утверждать, что этапы полёта, сопровождающиеся наличием несимметрично размещённых грузов (авиационных средств поражения, десантируемой техники) встречаются весьма часто. Для самолётов оперативно-тактической авиации причиной этому могут служить возросшая эффективность и стоимость бомб, ракет и контейнеров, штатное применение которых предусматривает несимметричное их размещение при транспортировке на самолёте-носителе. Отказы и неисправности также могут привести к образованию несимметричной конфигурации. Самолёты военно-транспортной авиации выполняют десантирование тяжёлых моногрузов, перемещение которых в пределах грузовой кабины существенно изменяет центровку [2]. Ещё одним важным фактором, требующим как можно более внимательного отношения к описанию динамики движения самолёта с изменяющимися положением центра масс и тензора инерции, являются значительные располагаемые угловые скорости вращения самолётов, особенно в канале крена. Многочисленные исследования показывают, что скорости крена могут достигать 5...6 радиан в секунду, что даже при сравнительно малых скоростях тангажа и рыскания приводит к существенной инерционной взаимосвязи продольной и боковой форм движения самолёта, способствующей выходу за ограничения по углу атаки и нормальной перегрузке, появлению критического, недопустимого в эксплуатации явления аэроинерционного вращения [3]. В том же случае, если даже удаётся избежать опасных явлений в динамике полёта, то значения кинематических параметров движения, получаемые в результате моделирования с использованием упрощённых математических моделей, могут существенно отличаться от реально существующих. Это не позволяет с необходимым качеством решать задачи научно-методического обоснования новых эффективных алгоритмов в системах управления, проводить полунатурное, с участием лётчиков на пилотажных стендах, моделирование различных целевых задач пилотирования, реализовывать на практике эффективные методики оценки боевого применения самолётов.

Перечисленные соображения отражают факт того, что создание и применение при моделировании системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику пространственного движения самолёта без упрощений относительно тензора инерции и положения центра масс представляется весьма актуальным.

Целью настоящей статьи является получение аналитических выражений для дифференциальных уравнений, описывающих изменение скоростей крена, рыскания и тангажа, а также составляющих скорости полёта несимметричного самолёта в проекциях на оси связанной системы координат, начало которой в общем случае не совпадает с центром масс самолёта, а направление осей не совпадает с его главными центральными осями инерции. Расчётная схема несимметричного самолёта представлена на рис. 1.

Выбор связанной системы координат обуславливается следующими обстоятельствами:

- датчики инерционного и гироскопического типов, измеряющие угловые скорости и перегрузки, установлены на самолёте неподвижно;
- значения осевых и центробежных моментов инерции инвариантны к выбираемой системе координат;
- аэродинамические моменты крена, рыскания и тангажа, а также боковая аэродинамическая сила рассчитываются и определяются при продувках в аэродинамических

трубах в связанной системе координат, а для перевода значений подъёмной силы и силы аэродинамического сопротивления в нормальную и продольную силы легко применить известные из курса аэродинамики аналитические выражения.

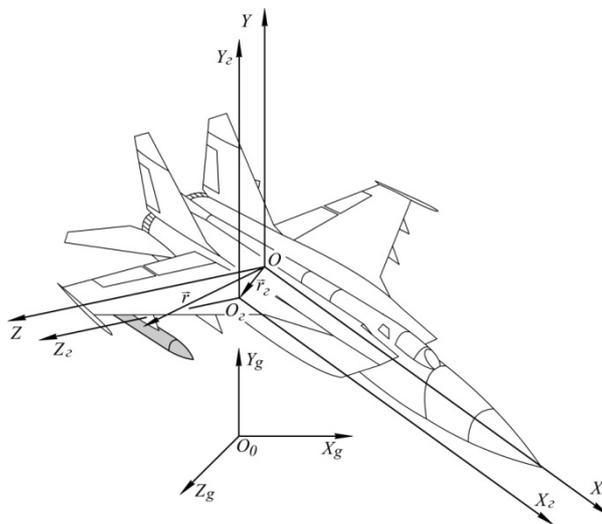


Рис. 1. Расчётная схема несимметричного самолёта

Согласно теоремам динамики [4], изменение по времени главного вектора количества движения системы \vec{Q} равно главному вектору внешних сил \vec{F} , приложенных к системе, а изменение по времени главного вектора момента количества движения (кинетического момента) \vec{K} равно главному вектору момента \vec{M}_F от внешних сил:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}_F. \quad (1)$$

Так как выражения (1) справедливы в инерциальной системе отсчёта, то главные векторы количества движения и момента количества движения будем рассматривать в нормальной земной системе координат $O_0 X_g Y_g Z_g$. Выражение для главного вектора количества движения выглядит следующим образом:

$$\vec{Q} = \sum m_i \vec{v}_i, \quad (2)$$

где m_i – элементарная масса, а \vec{v}_i – вектор абсолютной скорости элементарной массы. Так как предполагается, что самолёт является абсолютно твёрдым телом с постоянной массой, то справедливо следующее выражение:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R} + \vec{G} + \vec{R}_{\text{шасси}}, \quad (3)$$

где \vec{v} – вектор абсолютной скорости центра масс самолёта с грузом, а m – суммарная масса самолёта и груза; \vec{R} – результирующая сила, складывающаяся из аэродинамических сил и тяги силовой установки; \vec{G} – вес самолёта вместе с грузом; $\vec{R}_{\text{шасси}}$ – результирующая сила, действующая на самолёт от шасси при их контакте с поверхностью

земли (палубы корабля). В последующих рассуждениях будем рассматривать динамику движения самолёта, находящегося в воздухе, а следовательно принимать $\vec{R}_{\text{шасси}} = 0$.

Согласно правилу сложения скоростей абсолютная скорость центра масс самолёта с грузом равна векторной сумме переносной и относительной скоростей.

Под переносной скоростью будем понимать скорость перемещения связанной системы координат $OXYZ$ с началом в центре масс самолёта без груза относительно неподвижной земной системы координат $O_0X_gY_gZ_g$. При этом очевидно, что начало фактической связанной системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ размещено на некотором удалении от начала системы $OXYZ$, характеризуем вектором \vec{r}_2 . Величина этого вектора определяется выражением

$$\vec{r}_2 = \frac{m_r \vec{g}}{G} \vec{r}, \quad (4)$$

в котором \vec{r} – вектор, характеризующий положение груза массой m_r в системе координат $OXYZ$; \vec{g} – вектор ускорения свободного падения.

Оси рассмотренных связанных систем координат являются параллельными. Под относительной скоростью будем понимать скорость перемещения центра масс самолёта с грузом относительно системы координат $OXYZ$. В случае, если центр масс самолёта не меняет своего положения на самолёте ($\vec{r}_2 = \text{const}$), то относительная скорость отсутствует. В противном случае, например при перемещении груза по грузовой кабине военно-транспортного самолёта, это допущение недопустимо. Далее будет рассматриваться случай $\vec{r}_2 = \text{const}$, характерный для манёвренных самолётов с несимметричным и фиксированным размещением грузов на внешних подкрыльевых узлах подвески. Для такого случая можно записать, что

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_2. \quad (5)$$

В этом выражении первое слагаемое характеризует скорость начала O подвижной системы координат $OXYZ$ относительно неподвижной $O_0X_gY_gZ_g$, а второе – вращение центра масс самолёта с грузом O_2 совместно с подвижной системой координат $OXYZ$ с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

Продифференцируем обе части выражения (5) и подставим результат в выражение (3):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_2}{dt}. \quad (6)$$

В правой части приведённого выражения первое слагаемое представляет собой производную вектора \vec{V} в предположении о неизменности направления ортов системы координат $OXYZ$, второе слагаемое является векторным произведением угловой скорости вращения связанной системы координат $OXYZ$ и скорости \vec{V} . Третий и четвёртый члены характеризуют соответственно вращательную и осеостремительную составляющие ускорения при вращении самолёта.

Учитывая, что

$$\bar{\omega} \times \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \vec{r}_2),$$

запишем в окончательном виде следующее векторное уравнение, служащее основой для формирования системы для расчёта производных компонентов скорости самолёта:

$$m \left[\frac{d\vec{V}}{dt} + \bar{\omega} \times \vec{V} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \vec{r}_2 + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \vec{r}_2) \right] = \vec{R} + \vec{G}. \quad (7)$$

Выражение для главного вектора момента количества движения применительно к самолёту с грузом выглядит следующим образом:

$$\vec{K} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i, \quad (8)$$

где \vec{r}_i – радиус-вектор элементарной массы m_i в системе координат $OXYZ$. Исходя из этого и принимая во внимание выражение (5), получаем векторное выражение следующего вида:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} + \bar{\omega} \times \vec{K} + m\vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + \bar{\omega} \times \vec{V} \right) = \vec{M}_R + \vec{r}_2 \times \vec{G} + \vec{M}_{\text{гир}} + \vec{M}_{\text{реакт}}. \quad (9)$$

В представленном выражении приведены следующие обозначения: \vec{M}_R – результирующий момент, складывающийся из момента от аэродинамических сил и тяги силовой установки; $\vec{M}_{\text{гир}}$ и $\vec{M}_{\text{реакт}}$ – гироскопический и реактивный моменты, создаваемые роторами двигателей силовой установки. Реактивный момент появляется только при изменении скоростей вращения роторов силовой установки, что маловероятно на установившихся режимах её работы. Случаи отказов двигателей в многомоторных силовых установках, приводящих к изменению суммарного реактивного момента, в статье не рассматриваются. Их учёт требует анализа программ управления двигателями и динамических свойств их роторов, что, очевидно, является самостоятельной и весьма сложной задачей. Гироскопический момент может существенно изменить значения кинематических параметров движения в зависимости от направления вращения самолёта, что легко проследить из выражения

$$\vec{M}_{\text{гир}} = I_{\text{ог}} \bar{\omega}_{\text{ог}} \times \bar{\omega}, \quad (10)$$

в котором $I_{\text{ог}}$ и $\bar{\omega}_{\text{ог}}$ – момент инерции и вектор угловой скорости вращения ротора двигателя. Так как ротор двигателя является телом осесимметричным и, чаще всего, ось его вращения параллельна оси OX связанной системы координат, то можно полагать, что

$$M_{\text{гир}y} = -I_{\text{ог}} \omega_{x_{\text{ог}}} \omega_z; \quad M_{\text{гир}z} = I_{\text{ог}} \omega_{x_{\text{ог}}} \omega_y. \quad (11)$$

Подставляя в уравнение (9) выражение для скорости (5) и выполняя ряд преобразований, получаем более удобное для практического использования векторное уравнение для главного момента:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} + m\vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_2 \right) - m\vec{r}_2 \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_2)] = \vec{M}_R - \vec{r}_2 \times \vec{R} + \vec{M}_{sup}. \quad (12)$$

Используя известное из теоретической механики понятие тензора инерции $|I|$, запишем, что $\vec{K} = |I| \cdot \vec{\omega}$ и тогда уравнение (12) преобразуется к следующему виду:

$$|I| \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times |I| \cdot \vec{\omega} + m\vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_2 \right) - m\vec{r}_2 \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_2)] = \vec{M}_R - \vec{r}_2 \times \vec{R} + \vec{M}_{sup}, \quad (13)$$

которое, совместно с выражением (7), и будет использоваться в дальнейшем для создания системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику пространственного движения самолёта с произвольным тензором инерции и положением центра масс.

Для дальнейших рассуждений представляется целесообразным изложить выражения, связывающие вектор \vec{r}_2 с массами и положением на самолёте различных грузов. Так, в (4) применён вектор \vec{r} , характеризующий положение одного груза массой m_z в системе координат $OXYZ$. В том же случае, если на самолёте имеется несколько грузов, суммарная масса которых определяется как $\sum m_i$, а их положение – координатами x_i, y_i, z_i , то тогда следует полагать, что

$$\vec{r} = \vec{i}r_x + \vec{j}r_y + \vec{k}r_z; \quad r_x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad r_y = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad r_z = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \quad (14)$$

Представим векторные уравнения (7) и (13) в проекциях на оси связанной системы координат $OXYZ$. В методическом плане полезным представляется решать задачу для каждого из слагаемых этих уравнений, что и будет проделано в дальнейшем.

Для слагаемых уравнения (7) получаем следующие выражения:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{i} \frac{dV_x}{dt} + \vec{j} \frac{dV_y}{dt} + \vec{k} \frac{dV_z}{dt}; \quad (15)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{i} (\omega_y V_z - \omega_z V_y) + \vec{j} (\omega_z V_x - \omega_x V_z) + \vec{k} (\omega_x V_y - \omega_y V_x); \quad (16)$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_2 = \vec{i} \frac{m_z}{m} \left(\frac{d\omega_y}{dt} r_z - \frac{d\omega_z}{dt} r_y \right) + \vec{j} \frac{m_z}{m} \left(\frac{d\omega_z}{dt} r_x - \frac{d\omega_x}{dt} r_z \right) + \vec{k} \frac{m_z}{m} \left(\frac{d\omega_x}{dt} r_y - \frac{d\omega_y}{dt} r_x \right); \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_z) &= \bar{i} \frac{m_z}{m} \left[\omega_x \omega_y r_y + \omega_x \omega_z r_z - r_x (\omega_y^2 + \omega_z^2) \right] + \\
 &+ \bar{j} \frac{m_z}{m} \left[\omega_y \omega_z r_z + \omega_x \omega_y r_x - r_y (\omega_x^2 + \omega_z^2) \right] + \\
 &+ \bar{k} \frac{m_z}{m} \left[\omega_x \omega_z r_x + \omega_y \omega_z r_y - r_z (\omega_x^2 + \omega_y^2) \right];
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\bar{R} + \bar{G} = \bar{i} (R_x - G \sin \vartheta) + \bar{j} (R_y - G \cos \vartheta \cos \gamma) + \bar{k} (R_z + G \cos \vartheta \sin \gamma). \tag{19}$$

В уравнении (19) R_x , R_y , R_z – продольная, нормальная и поперечная силы; γ и ϑ – углы крена и тангажа.

Объединяя элементы уравнений (15) – (19) для соответствующих ортов \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , получаем искомую систему уравнений для определения скоростей V_x , V_y , V_z :

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_x}{dt} + \omega_x V_z - \omega_z V_x + \frac{m_z}{m} \left(\frac{d\omega_y}{dt} r_z - \frac{d\omega_z}{dt} r_y \right) + \frac{m_z}{m} \left[\omega_y \omega_z r_y + \omega_z \omega_x r_z - r_x (\omega_y^2 + \omega_z^2) \right] &= \\
 = \frac{R_x - G \sin \vartheta}{m}; \\
 \frac{dV_z}{dt} + \omega_z V_x - \omega_x V_z + \frac{m_z}{m} \left(\frac{d\omega_z}{dt} r_x - \frac{d\omega_x}{dt} r_z \right) + \frac{m_z}{m} \left[\omega_z \omega_y r_z + \omega_x \omega_y r_x - r_y (\omega_z^2 + \omega_x^2) \right] &= \\
 = \frac{R_y - G \cos \vartheta \cos \gamma}{m}; \\
 \frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V_x + \frac{m_z}{m} \left(\frac{d\omega_x}{dt} r_y - \frac{d\omega_y}{dt} r_x \right) + \frac{m_z}{m} \left[\omega_x \omega_z r_x + \omega_y \omega_z r_y - r_z (\omega_x^2 + \omega_y^2) \right] &= \\
 = \frac{R_z - G \cos \vartheta \sin \gamma}{m}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Для слагаемых уравнения (13) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 |I| \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \bar{i} \left(I_x \frac{d\omega_x}{dt} - I_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} - I_{xz} \frac{d\omega_z}{dt} \right) + \bar{j} \left(I_y \frac{d\omega_y}{dt} - I_{yx} \frac{d\omega_x}{dt} - I_{yz} \frac{d\omega_z}{dt} \right) + \\
 &+ \bar{k} \left(I_z \frac{d\omega_z}{dt} - I_{zx} \frac{d\omega_x}{dt} - I_{zy} \frac{d\omega_y}{dt} \right),
 \end{aligned} \tag{21}$$

где $I_x = I_{x_{сам}} + I_{x_z}$, $I_y = I_{y_{сам}} + I_{y_z}$, $I_z = I_{z_{сам}} + I_{z_z}$ – осевые моменты инерции самолёта с грузом; $I_{xy} = I_{xy_{сам}} + I_{xy_z}$, $I_{xz} = I_{xz_{сам}} + I_{xz_z}$, $I_{yz} = I_{yz_{сам}} + I_{yz_z}$ – центробежные моменты инерции самолёта с грузом. Моменты инерции грузов рассчитываются с использованием следующих выражений:

$$I_{x_z} = \sum m_{z_i} (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{y_z} = \sum m_{z_i} (x_i^2 + z_i^2), \quad I_{z_z} = \sum m_{z_i} (x_i^2 + y_i^2), \tag{22}$$

$$I_{xy_z} = I_{yx_z} = \sum m_{\xi_i} x_i y_i, \quad I_{xz_z} = I_{zx_z} = \sum m_{\xi_i} x_i z_i, \quad I_{yz_z} = I_{zy_z} = \sum m_{\xi_i} z_i y_i. \quad (23)$$

Второй член уравнения (13):

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times |I| \cdot \vec{\omega} = & \bar{i} \left[I_{yz} (\omega_z^2 - \omega_y^2) + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) + \omega_z I_{xy} \omega_x - \omega_y I_{xz} \omega_x \right] + \\ & + \bar{j} \left[I_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) + \omega_x \omega_z (I_x - I_z) + \omega_x I_{yz} \omega_y - \omega_y I_{xy} \omega_z \right] + \\ & + \bar{k} \left[I_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) + \omega_y I_{xz} \omega_z - \omega_x I_{yz} \omega_z \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Третий член уравнения (13):

$$\begin{aligned} m \vec{r}_z \times \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_z \right) = & \bar{i} \frac{m_z^2}{m} \left[\frac{d\omega_x}{dt} (r_y^2 + r_z^2) - r_x \left(\frac{d\omega_y}{dt} r_y + \frac{d\omega_z}{dt} r_z \right) \right] + \\ & + \bar{j} \frac{m_z^2}{m} \left[\frac{d\omega_y}{dt} (r_x^2 + r_z^2) - r_y \left(\frac{d\omega_x}{dt} r_x + \frac{d\omega_z}{dt} r_z \right) \right] + \\ & + \bar{k} \frac{m_z^2}{m} \left[\frac{d\omega_z}{dt} (r_x^2 + r_y^2) - r_z \left(\frac{d\omega_x}{dt} r_x + \frac{d\omega_y}{dt} r_y \right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Четвёртый член уравнения (13):

$$\begin{aligned} m \vec{r}_z \times \left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_z) \right] = & \frac{m_z^2}{m} \vec{r}_z \times \left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_z) \right] = \\ = & \bar{i} \frac{m_z^2}{m} \left[\omega_y \omega_z (r_y^2 - r_z^2) + r_z r_y (\omega_z^2 - \omega_y^2) + r_z r_x \omega_x \omega_y - r_z r_x \omega_x \omega_y \right] + \\ & + \bar{j} \frac{m_z^2}{m} \left[\omega_x \omega_z (r_z^2 - r_x^2) + r_x r_z (\omega_x^2 - \omega_z^2) + r_z r_y \omega_y \omega_x - r_x r_y \omega_y \omega_z \right] + \\ & + \bar{k} \frac{m_z^2}{m} \left[\omega_x \omega_y (r_x^2 - r_y^2) + r_x r_y (\omega_y^2 - \omega_x^2) + r_x r_z \omega_z \omega_y - r_y r_z \omega_z \omega_x \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Для правой части уравнения (13) имеем:

$$\begin{aligned} \vec{r}_z \times \vec{R} = & \bar{i} \frac{m_z g}{G} (r_y R_z \sin \gamma \cos \vartheta - r_z R_y \cos \vartheta \cos \gamma) + \\ & + \bar{j} \frac{m_z g}{G} (r_z R_x \sin \vartheta + r_x R_z \cos \vartheta \sin \gamma) + \\ & + \bar{k} \frac{m_z g}{G} (r_x R_y \cos \gamma \cos \vartheta - r_y R_x \sin \vartheta). \end{aligned} \quad (27)$$

После применения понятий продольной $n_x = R_x/G$, нормальной $n_y = R_y/G$ и поперечной $n_z = R_z/G$ перегрузок для (26) получаем

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_z \times \bar{R} = & \bar{i} m_z g (n_z r_y \sin \vartheta \cos \vartheta - n_y r_z \cos \vartheta \cos \vartheta) + \\
 & + \bar{j} m_z g (n_x r_z \sin \vartheta + n_z r_x \cos \vartheta \sin \vartheta) + \\
 & + \bar{k} m_z g (n_y r_x \cos \vartheta \cos \vartheta - n_x r_y \sin \vartheta).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Объединяя элементы уравнений (21) – (26) для соответствующих ортов \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , получаем искомую систему уравнений для определения угловых скоростей ω_x , ω_y , ω_z :

$$\begin{aligned}
 I_x \frac{d\omega_x}{dt} - I_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} - I_{xz} \frac{d\omega_z}{dt} + I_{yz} (\omega_z^2 - \omega_y^2) + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) + \omega_z I_{xy} \omega_x - \omega_y I_{xz} \omega_x + \\
 + \frac{m_z^2}{m} \left[\frac{d\omega_x}{dt} (r_y^2 + r_z^2) - r_x \left(\frac{d\omega_y}{dt} r_y + \frac{d\omega_z}{dt} r_z \right) \right] - \\
 - \frac{m_z^2}{m} \left[\omega_y \omega_z (r_y^2 - r_z^2) + r_z r_y (\omega_z^2 - \omega_y^2) + r_z r_x \omega_x \omega_y - r_z r_x \omega_x \omega_y \right] = \\
 = M_{R_x} - \frac{m_z g}{G} (r_y R_z \sin \vartheta \cos \vartheta - r_z R_y \cos \vartheta \cos \vartheta);
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 I_y \frac{d\omega_y}{dt} - I_{yx} \frac{d\omega_x}{dt} - I_{yz} \frac{d\omega_z}{dt} + I_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) + \omega_x \omega_z (I_x - I_z) + \omega_x I_{yz} \omega_y - \omega_y I_{xy} \omega_z + \\
 + \frac{m_z^2}{m} \left[\frac{d\omega_y}{dt} (r_x^2 + r_z^2) - r_y \left(\frac{d\omega_x}{dt} r_x + \frac{d\omega_z}{dt} r_z \right) \right] - \\
 - \frac{m_z^2}{m} \left[\omega_x \omega_z (r_z^2 - r_x^2) + r_x r_z (\omega_x^2 - \omega_z^2) + r_z r_y \omega_y \omega_x - r_x r_y \omega_y \omega_z \right] = \\
 = M_{R_y} - \frac{m_z g}{G} (r_z R_x \sin \vartheta + r_x R_z \cos \vartheta \sin \vartheta) - I_{\text{об}} \omega_{x_{\text{об}}} \omega_z;
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 I_z \frac{d\omega_z}{dt} - I_{zx} \frac{d\omega_x}{dt} - I_{zy} \frac{d\omega_y}{dt} + I_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) + \omega_y I_{xz} \omega_z - \omega_x I_{yz} \omega_z + \\
 + \frac{m_z^2}{m} \left[\frac{d\omega_z}{dt} (r_x^2 + r_y^2) - r_z \left(\frac{d\omega_x}{dt} r_x + \frac{d\omega_y}{dt} r_y \right) \right] - \\
 - \frac{m_z^2}{m} \left[\omega_x \omega_y (r_x^2 - r_y^2) + r_x r_y (\omega_y^2 - \omega_x^2) + r_x r_z \omega_z \omega_y - r_y r_z \omega_z \omega_x \right] = \\
 = M_{R_z} - \frac{m_z g}{G} (r_x R_y \cos \vartheta \cos \vartheta - r_y R_x \sin \vartheta) + I_{\text{об}} \omega_{x_{\text{об}}} \omega_y.
 \end{aligned} \tag{31}$$

С целью приведения в окончательный вид, пригодный для применения численных методов решения систем дифференциальных уравнений на ЭВМ, уравнения (20) и (30) должны быть разрешены относительно производных $\frac{dV_x}{dt}$, $\frac{dV_y}{dt}$, $\frac{dV_z}{dt}$, $\frac{d\omega_x}{dt}$, $\frac{d\omega_y}{dt}$, $\frac{d\omega_z}{dt}$ (приведены к форме Коши) и дополнены известными из курса динамики полёта [5] уравнениями для расчёта углов крена, рыскания и тангажа, углов атаки и скольжения,

материалами банка аэродинамических характеристик самолёта, характеристик его силовой установки и алгоритмами, заложенными в систему управления [6].

С целью подтверждения достоверности результатов моделирования динамики движения самолёта с использованием изложенной в работе модели на рис. 2 представлены результаты моделирования «дачи» ручки управления учебно-боевого самолёта по тангажу в сравнении с материалами лётного эксперимента. Наблюдается качественное и количественное соответствие результатов по нормальной перегрузке, углам атаки и отклонения стабилизатора.

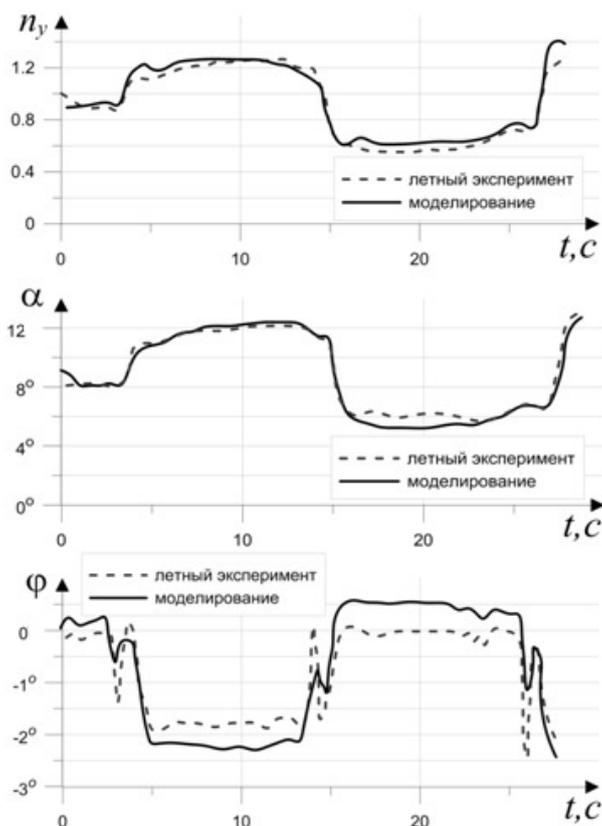


Рис. 2. Результаты моделирования «дачи» ручки управления учебно-боевого самолёта по тангажу в сравнении с материалами лётного эксперимента

Выводы

В статье обоснована необходимость учёта изменения тензора инерции и фактического положения центра масс самолёта с несимметричным размещением грузов (авиационных средств поражения, десантируемой техники) при моделировании динамики пространственного движения при решении различных целевых задач пилотирования. Представлен в методическом плане подробный вывод аналитических выражений, составляющих основу математической модели динамики полёта самолёта, для дифференциальных уравнений, описывающих изменение скоростей крена, рыскания и тангажа, а также составляющих скорости полёта в проекциях на оси связанной системы координат, начало которой в общем случае не совпадает с центром масс самолёта, а направление осей не совпадает с его главными центральными осями инерции. Дифференциальные уравнения доведены до удобного вида с точки зрения применения численных методов и ЭВМ для их решения.

Библиографический список

1. ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. М.: Издательство стандартов, 1981. 53 с.
2. Верещиков Д.В., Кузнецов А.Д. Обоснование автоматизации управления военно-транспортным самолётом в условиях десантирования моногрузов // Вестник МАИ. 2016. Т. 23, № 3. С. 121-128.
3. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолётов / под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Наука; Физматлит, 1998. 816 с.
4. Гернет М.М. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1973. 464 с.
5. Динамика полёта: учебник для студентов высших учебных заведений / под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Машиностроение, 2011. 776 с.
6. Верещиков Д.В., Николаев С.В., Разуваев Д.В. Системы управления летательных аппаратов. Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2018. 322 с.

SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF AIRCRAFT SPATIAL MOTION DYNAMICS WITH ARBITRARY TENSOR OF INERTIA AND CENTER OF GRAVITY POSITION

© 2021

D. V. Vereshchikov Candidate of Science (Engineering), Associate Professor, Head of Department; Military Educational and Scientific Center of the Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin, Voronezh, Russian Federation; vdvikt@yandex.ru.

Derivation of analytic expressions making up the basis of a mathematical model of aircraft flight dynamics for the differential equations describing the change in the rate of roll, yaw and pitch, as well as flight velocity components in projections on the body-fixed coordinate axes is presented. The origin of the coordinate system does not in general coincide with the center of mass of the plane, and the axes are not the same as its main central axes of inertia. The differential equations for angular and linear velocities are reduced to the form convenient for the use of numerical methods and computer systems and make it possible to get consistent results of simulating the dynamics of aircraft spatial motion with an arbitrary tensor of inertia and center of gravity position.

Tensor of inertia; dynamics of motion; center of mass; angular velocity; coordinate systems.

Citation: Vereshchikov D.V. System of differential equations of aircraft spatial motion dynamics with arbitrary tensor of inertia and center of gravity position. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2021. V. 20, no. 2. P. 7-18. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-2-7-18

References

1. GOST 20058-80. Aircraft dynamics in atmosphere. Terms, definitions and symbols. Moscow: Izdatel'stvo Standartov Publ., 1981. 53 p. (In Russ.)
2. Vereshchikov D.V., Kuznetsov A.D. Justification of military transport aircraft control automation in conditions of heavy cargo airlift delivery. *Aerospace MAI Journal*. 2016. V. 23, no. 3. P. 121-128. (In Russ.)
3. *Aerodinamika, ustoychivost' i upravlyaemost' sverkhzvukovykh samoletov* [Aerodynamics, stability and controllability of supersonic aircraft / ed. by G.S. Byushgens]. Moscow: Nauka; Fizmatlit Publ., 1998. 816 p.
4. Gernet M.M. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* [Course of theoretical mechanics]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 1973. 464 p.

5. *Dinamika poleta: uchebnik dlya studentov vysshikh uchebnykh zavedeniy* [Flight dynamics: Textbook for students of higher educational institutions / ed. by G.S. Byushgens]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 2011. 776 p.

6. Vereshchikov D.V., Nikolaev S.V., Razuvaev D.V. *Sistemy upravleniya letatel'nykh apparatov* [Aircraft control systems]. Voronezh: Voenno-vozdushnaya Akademiya Publ., 2018. 322 p.