УДК 004.4

# МАСШТАБИРУЕМЫЕ РАСПРЕДЕЛЁННЫЕ СИСТЕМЫ КОНКУРИРУЮЩИХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ И ИХ ОПТИМАЛЬНОСТЬ



Полесский государственный университет

Получены условия и критерии эффективности и оптимальности одинаково распределённых систем конкурирующих взаимодействующих процессов в условиях неограниченного и ограниченного параллелизма.

*Масштабируемость, асинхронный режим, синхронный режим, распределенный процесс, конкурирующий процесс, программный ресурс, одинаково распределенная система, стационарная система, ограниченный параллелизм, неограниченный параллелизм.*

**Введение.** Масштабируемость (scalability) является одним из важнейших требований к современным вычислительным системам, вычислительным комплексам, базам данных, маршрутизаторам и т.д. Она подразумевает способность системы увеличивать свою производительность при добавлении аппаратных и программных ресурсов. В настоящее время вопросы масштабирования находятся в поле зрения как разработчиков параллельных многопроцессорных систем (МС), так и распределенной среды метакомпьютинга [1]. Общим свойством, обеспечивающим возможность повышения производительности масштабируемых вычислительных систем, является распределённость процессов вычислений и данных с использованием принципов структурирования и конвейеризации [2]. Необходимы новые принципы организации вычислений и распределения ресурсов, создания эффективного аппаратного и программного обеспечения, обеспечения однозначности результата выполнения программ, эффективного планирования и распределения вычислительных процессов [3]. Особую актуальность приобретают задачи построения и исследования математических моделей распределённых вычислительных систем, поиска условий оптимальной организации конкурирующих взаимодействующих вычислительных процессов при распределённой обработке.

**1. Математическая модель масштабируемой системы распределенных вычислений.** Конструктивными элементами для построения математической модели систем распределённых вычислений являются понятия процесса и программного ресурса.

*Процесс* будем рассматривать как последовательность блоков (команд, процедур) $Q_1, Q_2, ..., Q_s$, для выполнения которых используется множество процессоров (процессорных узлов, обрабатывающих устройств, интеллектуальных клиентов). При этом процесс называется *распределённым*, если все блоки или часть из них обрабатываются разными процессорами. Процессы могут обрабатываться параллельно, взаимодействуя путём обмена информацией. Такие процессы называются *кооперативными* или *взаимодействующими*.

Понятие *ресурса* используется для обозначения любых объектов вычислительной системы, которые могут быть использованы процессами для своего выполнения. *Реентерабельные (многократно используемые)* ресурсы характеризуются возможностью одновременного использования несколькими вычислительными процессами. Для параллельных систем характерной является ситуация, когда одну и ту же последовательность блоков или её часть процессорам необходимо выполнять многократно. Такую последовательность будем называть *программным ресурсом* (ПР), а множество соответствующих процессов – *конкурирующими*.

Математическая модель масштабируемой распределённой системы взаимодействующих процессов включает в себя $p$ процессоров МС, $n$ конкурирующих процессов, $s$

блоков $Q_1$, $Q_2$, ..., $Q_s$ структурированного на блоки программного процесса, матрицу $T_p = [t_{ij}]$ времён выполнения *j*–х блоков *i*–ми конкурирующими процессами. Указанные параметры изменяются в пределах $p \geq 2$, $n \geq 2$, $s \geq 2$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq s$. Будем считать, что все *n* процессов используют одну копию структурированного на блоки ПР, а на множестве блоков установлен линейный порядок их выполнения. Учитывая то, что обменные операции в параллельных распределённых системах происходят, как правило, значительно медленнее арифметических, введём в рассмотрение параметр $\varepsilon > 0$, характеризующий время (накладные расходы), затрачиваемое МС на организацию параллельного выполнения блоков программного ресурса множеством распределённых конкурирующих процессов.

Будем считать, что взаимодействие процессов вычислений, процессоров и блоков структурированного программного ресурса подчинено следующим условиям: 1) ни один из блоков программного ресурса не может обрабатываться одновременно более чем одним процессором; 2) ни один из процессоров не может обрабатывать одновременно более одного блока; 3) обработка каждого блока осуществляется без прерываний; 4) распределение блоков программного ресурса по процессорам МС для каждого из процессов осуществляется циклически по правилу: блок с номером $j = kp + i$, ( $j = \overline{1,s}$, $i = \overline{1,p}$, $k \geq 0$ ), распределяется на процессор с номером *i*.

Кроме того, введём дополнительные условия, которые определяют режимы взаимодействия процессов, процессоров и блоков ПР: 5) отсутствуют простои процессоров при условии готовности блоков, а также невыполнение блоков при наличии процессоров; 6) для каждого из *n* процессов момент завершения выполнения *j*–го блока на *i*–м процессоре совпадает с моментом начала выполнения следующего *(j+1)*–го блока на *(i+1)*–м процессоре, $i = \overline{1,p-1}$, $j = \overline{1,s-1}$; 7) для каждого из блоков структурированного ПР момент завершения его выполнения *l*–м процессом совпадает с моментом начала его выполнения *(l+1)*–м процессом на том же процессоре, $l = \overline{1,n-1}$.

Условия 1–5 определяют *асинхронный* режим взаимодействия процессоров, процессов и блоков, который предполагает отсутствие простоев процессоров МС при условии готовности блоков, а также невыполнение блоков при наличии процессоров.

Если к условиям 1–4 добавить условие 6, то получим *первый синхронный* режим, обеспечивающий непрерывное выполнение блоков программного ресурса внутри каждого из вычислительных процессов.

*Второй синхронный* режим, определяемый условиями 1–4, 7, обеспечивает непрерывное выполнение каждого блока всеми процессами.

*Определение 1.* Масштабируемая система *n* распределённых взаимодействующих конкурирующих процессов называется *неоднородной*, если времена выполнения блоков программного ресурса $Q_1$, $Q_2$, ..., $Q_s$ зависят от объёмов обрабатываемых данных и/или их структуры, т. е. разные для разных вычислительных процессов.

*Определение 2.* Система взаимодействующих конкурирующих процессов называется *одинаково распределённой*, если времена $t_{ij}$ выполнения блоков $Q_j$, $j = \overline{1,s}$, программного ресурса каждым из *i*–х процессов вычислений совпадают и равны $t_i$ для всех $i = \overline{1,n}$, т. е. справедлива цепочка равенств $t_{i1} = t_{i2} = ... = t_{is} = t_i$ для всех $i = \overline{1,n}$.

**2. Необходимые и достаточные условия эффективности одинаково распределенных масштабируемых систем.** В [2, 4, 5] исследованы базовые асинхронный и два синхронных режима, возникающие при организации распределённых взаимодействующих процессов в условиях конкуренции за общий программный ресурс. Для вычисления наименьшего общего времени выполнения множества конкурирующих неоднородных и одинаково распределённых процессов в рамках очерченных режимов получены математические соотношения. В [6] решена задача сравнительного анализа полученных соотношений для класса одинаково распределённых процессов с учётом дополнительных накладных расходов $\varepsilon > 0$. Доказано, что для одинаково распределённых систем конкурирующих процессов минимальное общее время для всех трёх базовых режимов в случае *неограниченного* параллелизма $(s \le p)$ вычисляется по формуле

$$T(p,n,s,\varepsilon) = T_\varepsilon^n + (s-1)t_{\max}^\varepsilon, \tag{1}$$

а в случае *ограниченного* параллелизма $(s > p)$ для вычисления минимального общего времени в асинхронном и втором синхронном режимах имеют место соотношения

$$T(p,n,s,\varepsilon) = \begin{cases} kT_\varepsilon^n + (p-1)t_{max}^\varepsilon, & при\ s = kp,\ k > 1, \\ (k+1)T_\varepsilon^n + (r-1)t_{max}^\varepsilon, & при\ s = kp + r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p, \end{cases} \tag{2}$$

где $T_\varepsilon^n = \sum_{i=1}^{n} t_i^\varepsilon$ – суммарное время выполнения каждого из блоков $Q_j$ всеми $n$ процессами с учетом накладных расходов $\varepsilon$, $t_{\max}^\varepsilon = \max_{1 \le i \le n} t_i^\varepsilon$, $t_i^\varepsilon = t_i + \varepsilon$, $i = \overline{1,n}$.

Выделим в классе одинаково распределённых систем взаимодействующих конкурирующих процессов подкласс *стационарных* систем.

*Определение 3.* Одинаково распределённую масштабируемую систему конкурирующих процессов назовём *стационарной*, если выполняется цепочка равенств

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t.$$

Нетрудно показать, что в случае стационарной одинаково распределённой масштабируемой системы конкурирующих процессов минимальное общее время их выполнения при достаточном числе процессоров МС $(s \le p)$ определяется равенством

$$\overline{T}_\varepsilon = (n+s-1)t_\varepsilon,$$

где $t_\varepsilon = T^n / n + \varepsilon$, $T^n = nt$.

*Определение 4.* Одинаково распределённую систему конкурирующих взаимодействующих процессов будем называть *эффективной* при фиксированных $p,\ s \ge 2$, если выполняется соотношение

$$\Delta_\varepsilon(n) = sT^n - T(p,n,s,\varepsilon) \ge 0,$$

где $sT^n$ – время выполнения блоков $Q_j$, $j = \overline{1,s}$ всеми $n$ процессами в последовательном режиме.

При наличии двух эффективных одинаково распределённых масштабируемых систем взаимодействующих конкурирующих процессов будем считать, что первая более эффективна, чем вторая, если величина $\Delta_\varepsilon(n)$ первой системы не меньше соответствующей величины второй. Для введённого подмножества одинаково распределённых систем справедливо следующее утверждение.

*Теорема 1.* Для любой эффективной одинаково распределённой системы конкурирующих процессов при $s \le p$ и $\varepsilon > 0$ существует более эффективная стационарная одинаково распределённая система.

*Доказательство.* Рассмотрим любую эффективную одинаково распределённую систему. Согласно определению 4 условие эффективности с учётом (1) запишется в виде следующего неравенства:

$$\Delta_\varepsilon(n) = (s-1)(T^n - t_{\max}^n) - (n+s-1)\varepsilon \ge 0, \tag{3}$$

где $t_{\max}^n = \max_{1 \le i \le n} t_i$.

Для любой стационарной одинаково распределённой системы имеет место неравенство

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(n) = (s-1)(T^n - t) - (n+s-1)\varepsilon \ge 0, \tag{4}$$

где $t = T^n / n$.

Рассмотрим стационарную одинаково распределённую систему, в которой

$$t = \min_{1 \le i \le n} t_i = t_{\min}^n.$$

Чтобы убедиться в справедливости теоремы 1, для введённых эффективных систем достаточно доказать выполнение неравенства:

$\overline{\Delta}_\varepsilon(n) \le \Delta_\varepsilon(n)$. Подставив в левую и правую части последнего неравенства из (3) и (4) вместо $\Delta_\varepsilon(n)$ и $\overline{\Delta}_\varepsilon(n)$ соответствующие величины и проведя преобразования, приходим к равносильному неравенству:

$$(n-1)t \le T^n - t_{\max}^n .$$

Докажем справедливость последнего. Пусть для определённости $t_{\max}^n = t_l$. Тогда проверка показывает, что справедлива цепочка соотношений

$$T^n - t_{\max}^n = \sum_{i=1}^{l-1} t_i + \sum_{j=l+1}^{n} t_j \ge (n-1)t_{\min}^n = (n-1)t ,$$

из которой следует справедливость требуемого равенства. Таким образом, теорема 1 доказана.

Следующее утверждение устанавливает достаточное условие эффективности одинаково распределенной системы в случае неограниченного параллелизма.

*Теорема 2.* Если параметры $p,n,s,\varepsilon$ одинаково распределённой масштабируемой системы взаимодействующих конкурирующих процессов удовлетворяют соотношениям $3 \le s \le p$, $n = s \ne 3$, $sn \ge 2(n+s-1)$, $0 < \varepsilon \le \min\limits_{1\le i\le n} t_i$, то такая система является эффективной.

*Доказательство.* Согласно (3) условие эффективности равносильно неравенству

$$\frac{T^n - t_{\max}^n}{\varepsilon} \ge \frac{n+s-1}{s-1} . \tag{5}$$

Следовательно, для доказательства теоремы 2 достаточно убедиться в справедливости (5). Непосредственная проверка показывает, что следствием соотношений $0 < \varepsilon \le \min\limits_{1\le i\le n} t_i$ является цепочка неравенств:

$$\frac{T^n - t_{\max}^n}{\varepsilon} \ge \frac{(n-1)t_{\min}^n}{\varepsilon} \ge n-1 , \tag{6}$$

так как в силу выбора $\varepsilon$ выполняется неравенство $t_{\min}^n / \varepsilon \ge 1$. Далее, из $sn \ge 2(n+s-1)$ следует справедливость неравенства

$$n-1 \ge \frac{n+s-1}{s-1} . \tag{7}$$

Проверка показывает, что неравенство (5) является следствием неравенств (6) и (7). Таким образом, теорема 2 доказана.

Ниже формулируется и доказывается необходимое и достаточное условие существования эффективной системы одинаково распределённых конкурирующих процессов при достаточном числе процессоров в зависимости от величины накладных расходов $\varepsilon$.

*Теорема 3.* Для существования эффективной одинаково распределённой масштабируемой системы конкурирующих взаимодействующих процессов с заданными параметрами $p \ge 3$, $s \le p$, $\varepsilon > 0$ и $T^n$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\varepsilon \le \begin{cases} \varphi(1+\sqrt{s}), & \text{если } \sqrt{s} \text{ — целое}, \\ \max\{\varphi(1+[\sqrt{s}]),\ \varphi(2+[\sqrt{s}])\}, & \text{если } \sqrt{s} \text{ — нецелое}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\varphi(x) = \dfrac{(s-1)T^n(x-1)}{x(x+s-1)}$, $[x]$ – наибольшее целое, не превосходящее $x$.

*Доказательство.* Согласно (4) условие эффективности любой одинаково распределённой системы конкурирующих $n$ процессов определяется соотношениями

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(n) = (s-1)(T^n - t) - (n+s-1)\varepsilon \ge 0 ,$$

которые равносильны выполнению неравенства

$$\varepsilon \le \frac{(s-1)T^n(n-1)}{n(n+s-1)} . \tag{9}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$\varphi(x) = (s-1)T^n(x-1)/x(x+s-1) .$$

Нетрудно проверить, что $\varphi$ достигает своего максимума в точке $x = 1 + \sqrt{s}$ при $x > 0$. Положим

$$n_0 = \begin{cases} 1+\sqrt{s}, & \text{если } \sqrt{s} \text{ — целое,} \\ \max\{1+[\sqrt{s}],\ 2+[\sqrt{s}]\}, & \text{если } \sqrt{s} \text{ — нецелое.} \end{cases} \quad (10)$$

Необходимость условий (8) будет доказана, если будет установлена невозможность противоположного утверждения, т. е. невозможность существования одинаково распределённой масштабируемой системы конкурирующих *n* процессов, для которой выполнялось бы неравенство, противоположное неравенству (8), и которая была бы эффективной. Если предположить существование такой системы с *n* процессами, то должно выполняться соотношение $n \neq n_0$, так как выше установлено, что одинаково распределённая система с $n_0$ процессами эффективна. Следовательно, для неё имеет место неравенство $\varepsilon \le (s-1)T^n(n_0-1)/n_0(n_0+s-1)$, в то время как для гипотетической системы с *n* процессами должно выполняться в силу предположения неравенство

$$\varepsilon \ge (s-1)T^n(n_0-1)/n_0(n_0+s-1).$$

Очевидным следствием полученных неравенств является неравенство $\varepsilon > \varepsilon$. Полученное противоречие устанавливает необходимость условий (8).

Очевидно, такой системы нет при $n = n_0$, так как в силу определения функции $\varphi$ для такого *n* выполняется неравенство, противоположное неравенству (9), и, следовательно, такая система не может быть эффективной.

В случае $n < n_0$ в силу определения $n_0$ должна выполняться цепочка неравенств вида

$$\frac{(s-1)T^n(n-1)}{n(n+s-1)} \le \frac{(s-1)T^n(n_0-1)}{n_0(n_0+s-1)} \le \varepsilon, \quad (11)$$

из которой следует неэффективность предполагаемой системы с *n* процессами в силу (9).

Наконец, если $n > n_0$, то следствием неравенств (9) и (10) является неэффективность предполагаемой одинаково распределённой системы конкурирующих *n* процессов. Полученные противоречия во всех возможных случаях доказывают необходимость условий (8).

Достаточность условий (8) непосредственно следует из наличия функции $\varphi$ со свойством (9). Действительно, в этом случае требуемой эффективной одинаково распределённой системы является система с $n = n_0$ конкурирующими процессами, где $n_0$ определяется формулой (10). Таким образом, теорема 3 доказана.

*Замечание.* При $p = s = 2$ одинаково распределённая масштабируемая система конкурирующих процессов будет эффективной, если выполняется неравенство

$$\frac{\varepsilon}{T^n} \le \frac{n-1}{n(n+1)}.$$

**3. Эффективность одинаково распределённых систем в условиях ограниченного параллелизма.**

*Теорема 4.* Если параметры одинаково распределённой системы $n \ge 3$ конкурирующих процессов в многопроцессорной системе с *n* процессорами удовлетворяют соотношениям $s \ge 3$, $n = s \ne 3$ и $0 < \varepsilon \le \min\limits_{1 \le i \le n} t_i$, то рассматриваемая система будет эффективной, если выполняются условия:

$$sn \ge \begin{cases} 2(kn+p-1), & \text{если } s = kp,\ k > 1, \\ 2((k+1)n+r-1), & \text{если } s = kp+r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p. \end{cases}$$

*Доказательство.* Для случая

$$s = kp,\ k > 1$$

условие эффективности с учётом (2) равносильно неравенству

$$(s-k)T^n - (p-1)t^n_{\max} \ge (kn+p-1)\varepsilon,$$

где $t_{\max}^n = \max\limits_{1\le i\le n} t_i^n$.

В силу того, что $0 < \varepsilon \le \min\limits_{1\le i\le n} t_i$, имеем

$$\frac{(s-k)T^n - (p-1)t_{\max}^n}{\varepsilon} \ge (s-k)n - (p-1) \ge kn + p - 1.$$

Из последней цепочки неравенств следует, что $sn \ge 2(kn + p - 1)$.

Случай, когда $s = kp + r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p$, доказывается аналогично.

Ниже для асинхронного и второго синхронного режимов формулируется и доказывается необходимое и достаточное условие существования эффективной системы одинаково распределённых конкурирующих процессов в случае ограниченного параллелизма в зависимости от величины накладных расходов $\varepsilon$.

*Теорема 5.* Для существования эффективной одинаково распределённой системы конкурирующих процессов с заданными параметрами $p \ge 3$, $T^n$, $\varepsilon > 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) при $s = kp,\ k > 1$,

$$\varepsilon \le \begin{cases} \varphi_1\left(\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right), & \textit{если } \dfrac{1+\sqrt{p}}{k} \text{ – } \textit{целое}, \\ \max\left\{\varphi_1\left(\left[\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right]\right),\ \varphi_1\left(\left[\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right]+1\right)\right\}, & \textit{если } \dfrac{1+\sqrt{p}}{k} \text{ – } \textit{нецелое}, \end{cases}$$

где $\varphi_1(x) = (p-1)T^n(kx-1)/x(kx+p-1)$, а *[x]* – наибольшее целое, не превосходящее *x*;

2) при $s = kp + r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p$,

$$\varepsilon \le \begin{cases} \varphi_2(x), & \textit{если } x \text{ – } \textit{целое}, \\ \max\{\varphi_2([x]),\ \varphi_2([x]+1)\}, & \textit{если } x \text{ – } \textit{нецелое}, \end{cases}$$

где $\varphi_2(x) = \dfrac{[(p-1)kx + (r-1)(x-1)]\ T^n}{x\ [(k+1)x + r - 1]}$, *[x]* – наибольшее целое, не превосходящее *x*, где

$$x = \frac{r-1}{(p-1)k + r - 1}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{(p-1)k + r - 1}{k+1}}\right).$$

*Доказательство.* В случае стационарной одинаково распределённой системы конкурирующих процессов в асинхронном и втором синхронном режимах минимальное общее время $\overline{T}_\varepsilon$ с учётом параметра $\varepsilon > 0$ определяется равенством

$$\overline{T}_\varepsilon = \begin{cases} (kn + p - 1)t_\varepsilon, & \textit{при } s = kp,\ k > 1, \\ ((k+1)n + (r-1))t_\varepsilon, & \textit{при } s = kp + r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p, \end{cases} \tag{12}$$

где $t_\varepsilon = T^n / n + \varepsilon$, $T^n = nt$.

Условие эффективности одинаково распределённой системы конкурирующих процессов с учётом (2) в случае $s = kp,\ k > 1$ определяется соотношением:

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(s = kp) = (p-1)(kT^n - t) - (kn + p - 1)\varepsilon \ge 0,$$

которое равносильно выполнению неравенства $\varepsilon \le \dfrac{(p-1)T^n(kn-1)}{n(kn+p-1)}$.

Введём в рассмотрение функцию $\varphi_1(x) = (p-1)T^n(kx-1)/x(kx+s-1)$, которая при $x > 0$ достигает своего максимума в точке $x = \dfrac{1+\sqrt{p}}{k}$.

В случае $s = kp + r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p$ условие эффективности одинаково распределённой системы конкурирующих процессов с учётом (2) определяется неравенством

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(s = kp + r) =$$
$$= (p-1)kT^n + (r-1)(T^n - t) - ((k+1)n + r - 1)\varepsilon \ge 0.$$

С учётом, что $t = T^n/n$, это равносильно $\varepsilon \le \dfrac{[(p-1)nk + (r-1)(n-1)]T^n}{[(k+1)n + r - 1]n}$.

При $x > 0$ функция

$$\varphi_2(x) = \frac{[(p-1)kx + (r-1)(x-1)]T^n}{[(k+1)x + r - 1]x}$$

достигает своего максимума в точке

$$x = \frac{r-1}{(p-1)k+r-1}\left(1+\sqrt{1+\frac{(p-1)k+r-1}{k+1}}\right).$$

Таким образом, теорема 5 доказана.

**4. Оптимальность одинаково распределённых систем конкурирующих процессов.**

*Определение 5.* Эффективная одинаково распределённая система называется *оптимальной*, если величина $\Delta_\varepsilon$ достигает наибольшего значения.

В силу теоремы 1 оптимальную одинаково распределённую систему следует искать среди стационарных одинаково распределённых систем. Тогда с учётом (4) имеем:

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(s \le p) = (s-1)T^n(1-1/n) - (n+s-1)\varepsilon.$$

Введём функцию действительного аргумента $x$ вида

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(x) = (s-1)T^n\left(1-\frac{1}{x}\right) - (x+s-1)\varepsilon, \ \ x \ge 1.$$

Решение задачи об оптимальности одинаково распределённой системы, состоящей из $n$ конкурирующих процессов, для достаточного числа процессоров для всех трех базовых режимов следует из теоремы.

*Теорема 6.* Для того, чтобы эффективная одинаково распределённая система конкурирующих процессов была оптимальной при заданных $2 \le s \le p$, $T^n$, $\varepsilon > 0$, необходимо и достаточно, чтобы она была стационарной и число процессов $n_0$ в системе равнялось одному из чисел

$$\left[\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]+1\right] \cap [2,n],$$

в котором функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает наибольшего значения. Здесь $[x]$ означает наибольшее целое, не превосходящее $x$; $n$ – заданное число.

*Доказательство.*

*Необходимость.* Рассмотрим введённую функцию

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(x) = (s-1)T^n\left(1-\frac{1}{x}\right) - (x+s-1)\varepsilon, \ \ x \ge 1.$$

Согласно определению 5 одинаково распределённая система будет оптимальной в той точке $x$, где функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает своего наибольшего значения. Покажем, что функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает своего наибольшего значения в точке $x = \sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}$. Действительно,

$$\overline{\Delta}'_\varepsilon(x) = \frac{(s-1)T^n}{x^2} - \varepsilon, \ \overline{\Delta}''_\varepsilon(x) = -\frac{2T^n(s-1)}{x^3} < 0,$$

так как $s \ge 2, \ x > 0$.

Следовательно, функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает максимума в точке, где первая её производная обращается в нуль $\overline{\Delta}'_\varepsilon(x) = 0$, т. е.

$$x^* = \sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}.$$

Целочисленными точками, в которых достигается наибольшее значение функции $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$, будут $n_0 = [x^*]$ или $n_0 = [x^*]+1$. Следовательно, в качестве $n_0$ можно выбрать одно из чисел $\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]$, $\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]+1$, в которых функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(s \le p)$ принимает наибольшее значение.

Если же окажется, что ни одна из точек $\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]$, $\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]+1$, в которой функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ принимает наибольшее значение, не принадлежит $[2,n]$, то в качестве оптимальной выбираем эффективную одинаково распределённую систему с числом процессов $n_0 = n$.

В силу отрицательности второй производной исследуемая функция выпукла. Следовательно, точка максимума всегда существует, а значит и существует эффективная одинаково распределённая система конкурирующих процессов в случае, когда $n \to \infty$.

*Достаточность* следует из свойств выпуклости функции $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ на отрезке $[2, n]$.

Для решения задачи об оптимальности одинаково распределённой системы конкурирующих процессов в случае ограниченного параллелизма в асинхронном и втором синхронном режимах введём функции действительного аргумента *x* вида:

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(x) = (s-1)T^n - \frac{(p-1)T^n}{x} - (kx + p - 1)\varepsilon, \tag{13}$$

при $s = kp,\ k > 1$,

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(x) = (s-k-1)T^n - \frac{(r-1)T^n}{x} - \big((k+1)x + (r-1)\big)\varepsilon, \tag{14}$$

при $s = kp + r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p$.

*Теорема 7*. Для того, чтобы эффективная одинаково распределённая система конкурирующих процессов в случае ограниченного параллелизма в асинхронном и втором синхронном режимах была оптимальной при заданных $p \ge 2,\ T^n,\ \varepsilon > 0$, необходимо и достаточно, чтобы она была стационарной и число процессов $n_0$ в системе равнялось одному из чисел:

1) $\left[\left[\sqrt{\dfrac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\dfrac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}\right]+1\right] \cap [2, n]$,

при $s = kp,\ k > 1$,

2) $\left[\left[\sqrt{\dfrac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\dfrac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}}\right]+1\right] \cap [2, n]$,

при $s = kp + r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p$,

в котором функция $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ достигает наибольшего значения, где *[x]* –наибольшее целое, не превосходящее *x*; *n* – заданное число.

*Доказательство.*

*Необходимость*. Для случая

$s = kp,\ k > 1$

функция вида (13) достигает своего наибольшего значения в точке $x^* = \sqrt{\dfrac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}$,

так как $\overline{\Delta}'_\varepsilon(x) = \dfrac{(p-1)T^n}{x^2} - k\varepsilon$.

Как и в случае неограниченного параллелизма целочисленными точками будут $n_0 = [x^*]$ или $n_0 = [x^*]+1$. Следовательно, в качестве оптимальной выбираем эффективную одинаково распределённую систему с числом процессов

$$\left[\sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}\right]+1.$$

В случае $s = kp + r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p$ первая производная функции (14) имеет вид

$$\overline{\Delta}'_\varepsilon(x) = \frac{(r-1)T^n}{x^2} - (k+1)\varepsilon.$$

Следовательно, в качестве $n_0$ можно выбрать одно из значений $\left[\sqrt{\dfrac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}}\right]$ или

$$\left[\sqrt{\frac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}}\right]+1.$$

Если же окажется, что ни одна из точек

$$\left[\sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}\right]+1,$$

$$\left[\sqrt{\frac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\frac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}}\right]+1,$$

в которых функции (13), (14) принимают наибольшее значение, не принадлежат $[2, n]$, то в случае ограниченного параллелизма в качестве оптимальной выбираем эффективную одинаково распределённую систему с числом процессов $n_0 = n$.

*Достаточность* следует из свойств выпуклости функции $\overline{\Delta}_\varepsilon(x)$ при $s > p$ на отрезке $[2, n]$. Действительно, исследуемые функции (13) и (14) выпуклы в силу отрицательности вторых производных:

$$\overline{\Delta}_\varepsilon''(x) = -\frac{2T^n(p-1)}{x^3} < 0,$$

$$\overline{\Delta}_\varepsilon''(x) = -\frac{2T^n(r-1)}{x^3} < 0,\ p \geq 2,$$

$1 \leq r < p,\ x > 0.$

Таким образом, теорема 7 доказана.

**Заключение.** Полученные условия эффективности и оптимальности одинаково распределённых масштабируемых систем конкурирующих взаимодействующих процессов имеют многочисленные области применения. В частности, они могут быть использованы при проектировании системного и прикладного программного обеспечения, ориентированного на масштабируемые многопроцессорные системы, вычислительные сети, а также при решении проблем оптимального использования вычислительных ресурсов. Полученные формулы также служат основой для решения задач оптимизации числа блоков при заданных остальных параметрах МС, нахождения оптимального числа процессоров при заданных объёмах вычислений и (или) директивных сроках реализации вычислительных процессов, исследования всевозможных смешанных режимов организации выполнения параллельных процессов при распределённой обработке, в том числе с учётом ограниченного числа копий структурированного программного ресурса.

**Библиографический список**

1. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. - СПб., 2002. - 608 с.

2. Коваленко Н. С., Самаль С. А. Вычислительные методы реализации интеллектуальных моделей сложных систем. - Мн., 2004. - 166 с.

3. Топорков В. В. Модели распределенных вычислений. - М., 2004. - 320 с.

4. Иванников В. П., Коваленко Н. С., Метельский В. М. О минимальном времени реализации распределенных конкурирующих процессов в синхронных режимах // Программирование. - 2000. - №5. - С. 44–52.

5. Коваленко Н. С., Самаль С. А. Минимизация общего времени выполнения заданных объемов вычислений в синхронных режимах // Кибернетика и системный анализ. - 2003. - №6. - С. 39–47.

6. Павлов П. А. Сравнительный анализ одинаково распределенных конкурирующих процессов с учетом дополнительных системных расходов // Вестник фонда фундаментальных исследований. - 2006. - №1. - С. 55–58.

**References**

1. Voevodin, V. V., Voevodin V.V. Parallel calculations. Saint-Petersburg, 2002. 608 p.

2. Kovalenko, N. S., Samal S. A. Computing methods of realisation of intellectual models of complex systems. Minsk, 2004. 166 p.

3. Toporkov, V. V. Models of distributed calculations. Moscow, 2004. 320 p.

4. Ivannikov, V. P., Kovalenko N. S., Metelsky V. M. Minimum time of realisation of distributed competitive processes in synchronous modes // Programming. 2000. No.5. pp. 44–52.

5. Kovalenko, N. S., Samal S. A. Minimisation of the total time of performing preset volumes of calculations in synchronous modes / / Cybernetics and system analysis. 2003. No.6. pp. 39–47.

6. Pavlov, P. A. Comparative analysis of equally distributed competitive processes in view of additional system expenses // Bulletin of the foundation of basic researches. 2006. №1. pp. 55–58.

## SCALABLE DISTRIBUTED SYSTEMS OF COMPETITIVE INTERACTING PROCESSES AND THEIR OPTIMALITY



Palesky State University

Conditions and criteria of efficiency and optimality of equally distributed systems of competitive interacting processes in conditions of unlimited and limited parallelism are obtained.

*Scalability, asynchronous mode, synchronous mode, distributed process, competitive process, program resource, equally distributed system, stationary system, limited parallelism, unlimited parallelism.*

**Информация об авторе**

**Павлов Павел Александрович**, кандидат физико–математических наук, доцент кафедры высшей математики и информационных технологий Полесского государственного университета. Область научных интересов: сосредоточенная, распределенная, макроконвейерная обработка параллельных вычислительных процессов. E-mail: pin2535@tut.by.

**Pavlov Pavel Aleksandrovich**, candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer of the department of higher mathematics and information technology of Palesky state university, pin2535@tut.by. Area of research: concentrated, distributed processing of parallel computational processes.