УДК 620.179.14

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИХРЕТОКОВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ИЗДЕЛИЙ ПРЕРЫВИСТОЙ СТРУКТУРЫ

© 2010 А. В. Полулех, Г. М. Гайнуллина

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Представлено решение задачи по расчёту параметров поля вихревых токов при взаимодействии вихретокового датчика с однородной структурой первичного поля с двумя протяжёнными эллиптическими цилиндрами. Полученное выражение для векторного потенциала позволяет рассчитать напряжённости магнитного и электрического полей, а также вносимые параметры датчиков.

Математическая модель, вихретоковый преобразователь, векторный потенциал, эллиптический цилиндр, электромагнитное поле.

При разработке вихретоковых преобразователей (ВТП) для контроля изделий прерывистой формы представляет интерес анализ взаимодействия поля ВТП с несколькими протяжёнными изделиями ограниченных размеров. При теоретических исследованиях с достаточной для практических расчётов точностью такие изделия можно представить в виде электропроводящих эллиптических цилиндров.

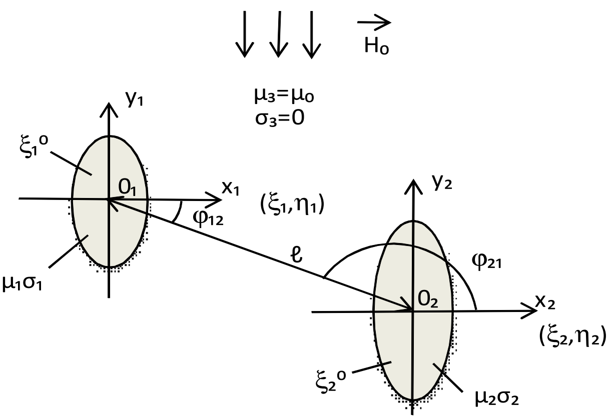

Рис. 1. Расчётная модель в виде двух бесконечно длинных эллиптических цилиндров, находящихся в однородном квазистационарном магнитном поле ВТП

В работе рассматривается задача о двух бесконечно длинных эллиптических цилиндрах с параллельными осями $0Z_1$, $0Z_2$, электропроводностями σ_1, σ_2, магнитными проницаемостями μ_1, μ_2, расположенных в однородном квазистационарном магнитном поле ВТП $H=H_oe^{j\omega t}$, направленном по нормали к осям цилиндров (рис. 1). H_o – напряжённость поля, ω – угловая частота. Требуется определить параметры вторичного поля (поля вихревых токов).

Строгое решение задачи по расчёту электромагнитного поля от воздействия двух или большего числа контролируемых объектов может быть получено на основе использования классического метода разделения переменных в сочетании с теоремами сложения для гармонических функций [1, 2]. Применим этот метод для решения поставленной задачи. Вследствие линейности рассматриваемых сред векторный потенциал поля вне цилиндров можно представить в виде

$$\vec{A}_3=\vec{A}_0+\vec{A}_{p1}+\vec{A}_{p2}\,, \qquad (1)$$

где $\vec{A}_{p1},\vec{A}_{p2}$ – векторные потенциалы поля вихревых токов (вторичного поля) первого и второго цилиндров; $\vec{A}_0=\mu_0 f\vec{H}_0 ch\xi cos\eta$ – векторный потенциал однородного магнитного поля, записанный в системе координат эллиптического цилиндра ξ, η.

Свяжем с каждым из цилиндров локальные системы координат эллиптического цилиндра (ξ_1, η_1, Z_1), (ξ_2, η_2, Z_2) с центрами 0_1 и 0_2. С учётом бесконечной аксиальной длины цилиндров уравнение Гельмгольца для векторного потенциала преобразуется в локальной системе координат (ξ_i, η_i, Z_i) (i=1,2) к виду

$$\frac{\partial^2 A_{pi}}{\partial \xi_i^2}+\frac{\partial^2 A_{pi}}{\partial \eta_i^2}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{f_i\left(ch^2\xi_i-\cos^2\eta_i\right)}\cdot\left(\frac{\partial^2 A_i}{\partial \xi_i^2}+\frac{\partial^2 A_i}{\partial \eta_i^2}\right)+\kappa_i^2 A_i=0 \quad (3)$$

где A_i – векторные потенциалы поля внутри цилиндров; κ_i^2=-$j\omega\mu_i\sigma_i$, μ_i, σ_i – магнитная проницаемость и электропроводность i-ого цилиндра, f – межфокусное расстояние эллиптических цилиндров.

В уравнениях (2), (3) под A понимается z-ый компонент векторного потенциала, остальные компоненты которого равны нулю в силу бесконечной длины цилиндров. Для однозначного определения полей в системе уравнений (2), (3) необходимо добавить условия на границе раздела сред и на бесконечности [1]:

$$\begin{cases} A_p = A_i \\ \dfrac{1}{\mu_3}\dfrac{\partial A_3}{\partial \xi_i}=\dfrac{1}{\mu_i}\dfrac{\partial A_i}{\partial \xi_i} \\ \lim\limits_{\xi\to\infty} A_3=0, \xi_i=\xi_i^2\left(i=1,2\right) \end{cases} \qquad (4)$$

где ξ^0_i – координата поверхности i-ого цилиндра.

Решения уравнений (2), (3), не имеющие особенностей в объёмах рассматриваемых тел и удовлетворяющие условию на бесконечности, имеют следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} A_{p1}&=\sum_{n=1}^{\infty} bn^{(1)}e^{-n\xi_1}\cos\left(n\eta_1\right),\\ A_1&=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}ce_n\left(\xi_1,q_1\right)ce_n\left(\eta_1 q_1\right),\\ A_{p2}&=\sum_{n=1}^{\infty} bn^{(2)}e^{-n\xi_2}\cos\left(n\eta_2\right),\\ A_2&=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)}ce_n\left(\xi_2 q_2\right)ce_n\left(\eta_2 q_2\right), \end{aligned} \qquad (5)$$

где $q_i=\dfrac{1}{4}\kappa_i^2 f_i^2, ce_n$ – функции Матье n-ого порядка.

Неизвестные коэффициенты разложения $a_n^{(i)}, b_n^{(i)}$ определяются из граничных условий. При подстановке A_{p2} в граничные условия для первого цилиндра или функции A_{p1}, в граничные условия для второго цилиндра используется теорема сложения, позволяющая записать гармонические функции одной локальной системы координат через функции другой системы:

$$\begin{aligned} e^{-m\xi_i}\cos\left(m\eta_i\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j^{m+n}\left(n+m-1\right)!}{2^{m+n-1}m!\left(n-1\right)!}\\ &\times\frac{\sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\left(\frac{f_{s/}}{l}\right)^n\left(\frac{f_i}{l}\right)^m\\ &\times\left[ch\left(n\xi_s\right)\cos\left(n\eta_s\right)\cos\left(n+m\right)\varphi_{is}\right.\\ &\left.+sh\left(n\xi_s\right)\sin\left(n\eta_s\right)\sin\left(n+m\right)\varphi_{is}\right] \end{aligned} \qquad (6)$$

где l расстояние между центрами цилиндров, s=1.2; i=2,1.

Данная теорема сложения получена из известных теорем сложения для волновых функций эллиптического цилиндра [1] при условии, что постоянная распространения к $\to 0$.

Подставляя (5) в граничные условия (4) и используя соотношения (6), получим систему уравнений для определения коэффициентов разложения. Представим функцию Матье 1-ого рода в виде разложения в ряд по тригонометрическим функциям: $ce_n\left(\eta_i,q_i\right)=\sum_{r=0}^{\infty}A_T^n\left(q_i\right)\cos\left(r\eta_i\right)$,

где постоянные коэффициенты A_r^n, зависящие от q_i, находятся из рекуррентных соотношений [1].

Из сравнения отдельных тригонометрических составляющих в силу ортогональности тригонометрических функций следует, что в решении данной системы существуют только члены рядов с индексом n=1. Для остальных членов справедливо равенство $a_n^{(i)}=b_n^{(i)}=0\left(n\rangle 1\right)$. Коэффициенты $a_1^{(i)}, b_1^{(i)}$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} -b_0 f_1 \mathrm{ch}\xi_1^0 + b_1^{(1)} e^{-\xi_1^0} - b_1^{(2)} \left(\dfrac{f_1 f_2}{2l^2}\right) \mathrm{ch}\xi_1^0 \cos 2\varphi_{12} = \\ a_1^{(1)} ce_1\left(\xi_1^0, q_1\right) A_1^1\left(q_1\right) \\ -b_0 f_1 \mathrm{ch}\xi_1^0 - b_1^{(1)} e^{-\xi_1^0} - b_1^{(2)} \left(\dfrac{f_1 f_2}{2l^2}\right) \mathrm{ch}\xi_1^0 \cos 2\varphi_{12} = \\ \dfrac{\mu_0}{\mu_1} a_1^{(1)} ce_1^{/}\left(\xi_1^0, q_1\right) A_1^1\left(q_1\right) \\ -b_0 f_2 \mathrm{ch}\xi_2^0 + b_1^{(2)} e^{-\xi_2^0} - b_1^{(1)} \left(\dfrac{f_1 f_2}{2l^2}\right) \mathrm{ch}\xi_2^0 \cos 2\varphi_{12} = \\ a_1^{(2)} ce_1\left(\xi_2^0, q_2\right) A_1^1\left(q_2\right) \\ b_0 f_2 \mathrm{ch}\xi_2^0 - b_1^{(2)} e^{-\xi_2^0} - b_1^{(1)} \left(\dfrac{f_1 f_2}{2l^2}\right) \mathrm{ch}\xi_2^0 \cos 2\varphi_{12} = \\ \dfrac{\mu_0}{\mu_2} a_1^{(2)} ce_1^{/}\left(\xi_2^0, q_2\right) A_1^1\left(q_2\right) \end{cases}, \quad (7)$$

где $ce_1^{/}$ – производная модифицированной функции Матье 1-ого рода по аргументу.

Векторный потенциал вторичного поля может быть записан в любой локальной системе координат. Так, например, в координатах первого цилиндра выражение для векторного потенциала вторичного поля будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} A_p &= A_{p1} + A_{p2} = b_1^{(1)} \cdot e^{-\xi_1} \cos\eta_1 \\ &+ b_1^{(2)} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^{m+1} \cdot m}{2^m \cdot \sin\left(m\dfrac{\pi}{2}\right)} \times \left(\frac{f_i}{l}\right)^m \cdot \left(\frac{f_2}{l}\right) \\ &\times \left[\mathrm{ch}\left(m\xi_1\right)\cos\left(m\cdot\eta_1\right)\cos\left(m+1\right)\cdot\varphi_{21} \right. \\ &\left. + \mathrm{sh}\left(m\xi_1\right)\cdot\sin\left(m\eta_1\right)\cdot\sin\left(m+1\right)\cdot\varphi_{21}\right] \end{aligned}, \quad (8)$$

Аналитическое выражение (8) для векторного потенциала вторичного поля позволяет по известным методикам рассчитать распределения напряженности магнитного и электрического полей, а также вносимые параметры вихретоковых преобразователей заданной формы.

Полученные результаты могут использоваться при разработке методов измерения расстояний между краями листовых изделий; при разработке преобразователей, предназначенных для контроля смещения изделий ограниченных размеров в плоскости ВТП; при определении количества листовых изделий и в ряде других случаев неразрушающего контроля плоских изделий ограниченных размеров.

Библиографический список

1. Иванов, Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах [Текст] / Е. А. Иванов. – Минск: Наука и техника, 1968.
2. Полулех, А. В. Моделирование дефектных изделий ограниченных размеров при электромагнитном контроле [Текст] / А. В. Полулех // Известия вузов. Электромеханика. – 1985. – №9. – С.19-25.
3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – М.: Наука, 1978. – 296 с.

References

1. Ivanov, Ye. A. Diffraction of electromagnetic waves on two bodies / Ye. A. Ivanov. – Minsk: Nauka i tekhnika (Science and engineering), 1968.
2. Polulekh, A. V. Modeling defective samples of limited dimensions under electromagnetic control / A. V. Polulekh // Izvestia vuzov (University transactions). Electromechanics.–1985. – No.9. – pp.19-25.
3. Beytmen, G. Highest transcendental functions / G. Beytmen, A. Erdeyn. – Moscow: Nauka (Science), 1978. – 296 p.

MATHEMATICAL MODEL OF AN EDDY CURRENT CONVERTER FOR TESTING DISCONTINUOUS STRUCTURE SAMPLES

Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov
(National Research University)

The paper presents the solution of a problem in calculating the parameters of an eddy current field when the eddy current transducer interacts with the homogeneous structure of the primary field with two extended elliptical cylinders. The expression derived for the vector potential makes it possible to calculate the strength of both magnetic and electric fields as well as the transducer parameters being introduced.

Mathematical model, eddy current converter, vector potential, elliptical cylinder, electromagnetic field.

Информация об авторах

Полулех Александр Владимирович, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры «Электротехника», Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет), (846) 2674837. Область научных интересов: математическое моделирование, комплексы программ.

Гайнуллина Гелия Мухаматкамиловна, ведущий инженер, ассистент кафедры «Общая информатика», Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет), (846) 2674837. Область научных интересов: математическое моделирование, комплексы программ.

Polulekh Alexander Vladimirovitch, associate professor, candidate of technical science, associate professor of the department “Electrical engineering”, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), (846) 2674837. Area of research: mathematical modeling, software complexes.

Gainullina Gelia Mukhamatkamilovna, leading engineer, assistant of the department “General information science”, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), (846) 2674837. Area of research: mathematical modeling, software complexes.