

УДК 532.526.4

## ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ОСНОВЕ ВВЕДЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

© 2010 Е. В. Стефанюк, И. В. Кудинов

Самарский государственный технический университет

С использованием математической модели теплового пограничного слоя, представленной в виде интегрального уравнения Г. Н. Кружилина, на основе введения дополнительных граничных условий разработана методика получения приближённого аналитического решения исходного дифференциального уравнения (уравнения Польшаузена), позволяющая получать решения с заданной степенью точности. Проведено уточнение критериальной зависимости для определения коэффициента теплоотдачи на границе жидкость-стенка, уточнены формулы для определения теплового пограничного слоя. Проведён анализ распределения изотерм в пределах теплового пограничного слоя, исследованы скорости движения изотерм по поперечной координате в зависимости от величины продольной переменной.

*Тепловой пограничный слой, фронт температурного возмущения, дополнительные граничные условия, интегральный метод теплового баланса, изотермы, скорости движения изотерм.*

Известно, что теплообмен между жидкостью и стенкой в значительной степени определяется процессами, протекающими в пограничном слое вблизи стенки. Интенсивность теплообмена характеризуется величиной коэффициентов теплоотдачи на границе жидкость-стенка. Для их определения необходимо иметь аналитическое решение задачи о распределении температуры в тепловом пограничном слое. Точные аналитические решения подобных задач в настоящее время не получены. Приближённые аналитические решения через решение интегральных уравнений Кармана и Польшаузена найдены лишь в первом приближении – их отличие от решений, полученных численным интегрированием исходных дифференциальных уравнений, находится в пределах 8 – 10 %.

При обтекании тела потоком жидкости, имеющей скорость  $v$  (скорость невозмущённого потока), вблизи поверхности тела образуется слой  $\delta(x)$  (гидродинамический пограничный слой), в пределах которого скорость течения изменяется от нуля на стенке до скорости невозмущённого потока (рис. 1).

При наличии разности температур между стенкой и набегающим потоком вблизи стенки наряду с гидродинамическим образуется также тепловой пограничный слой  $\Delta(x)$ , в пределах которого температура

среды изменяется от  $t_{ст}$  до температуры невозмущённого потока  $t_{ср}$  ( $t_{ст} < t_{ср}$ ), где  $t_{ст}$  – температура стенки (рис. 2).

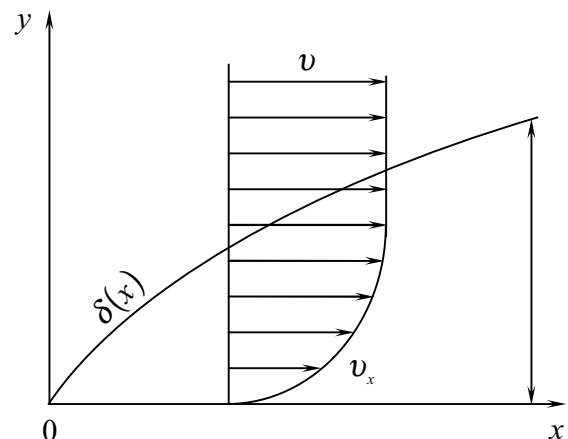


Рис. 1. Схема гидродинамического пограничного слоя

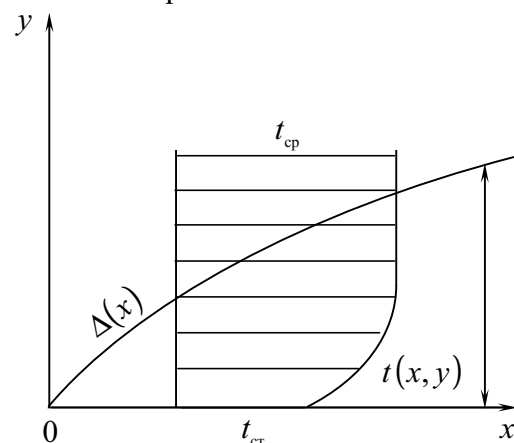


Рис. 2. Схема теплового пограничного слоя

Таким образом, гидродинамический и тепловой пограничные слои представляют собой границы соответствующих фронтов возмущения, отделяющие возмущённый поток от невозмущённого.

Теплообмен в тепловом пограничном слое (рис. 2) описывается уравнением энергии (известным под названием уравнения Польгаузена [1] – [3]) и соответствующими граничными условиями

$$v_x \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} + v_y \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$(0 \leq y \leq \Delta(x); \quad 0 \leq x < \infty);$$

$$t(x, 0) = t_{ст}; \quad (2)$$

$$t(x, \Delta) = t_{ср}; \quad (3)$$

$$\partial t(x, \Delta) / \partial y = 0, \quad (4)$$

где  $t$  – температура;  $v_x, v_y$  – составляющие скорости по координатным осям;  $x, y$  – координаты;  $a$  – коэффициент температуропроводности.

Соотношения (3), (4) представляют условия сопряжения прогретой и непрогретой зон. Условие (3) означает, что температура на границе теплового пограничного слоя (на границе фронта температурного возмущения) равна температуре невозмущённого потока  $t_{ср}$ . Согласно условию (4) тепловой поток не распространяется за пределы пограничного слоя. Математическое доказательство условий (3), (4) дано в [7].

Для получения ещё одного граничного условия запишем уравнение (1) применительно к точке  $y = 0$ . Так как в этом случае  $v_x(0) = v_y(0) = 0$ , то получим граничное условие вида (по сути это есть первое дополнительное граничное условие)

$$\frac{\partial^2 t(x, 0)}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

Получение аналитического решения задачи (1) – (5) представляет значительные математические трудности [1, 3]. Поэтому потребуем, чтобы искомое решение удовлетворяло не уравнению (1), а некоторому осредненному уравнению (1), проинтегрированному по переменной  $y$  в

пределах толщины теплового пограничного слоя  $\Delta(x)$ :

$$\int_0^{\Delta} v_x \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} dy + \int_0^{\Delta} v_y \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} dy = a \int_0^{\Delta} \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} dy. \quad (6)$$

Определив интегралы в (6), после некоторых преобразований получим следующее интегральное уравнение, впервые полученное Польгаузеном [1]:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} v_x [t_{ср} - t(x, y)] dy = a \frac{\partial t(x, 0)}{\partial y}. \quad (7)$$

Уравнение (7) можно также получить из рассмотрения балансовых соотношений по тепловым потокам в пределах теплового пограничного слоя [3].

Введём избыточную температуру по соотношению  $T = t - t_{ст}$ . Тогда  $T_{ср} = t_{ср} - t_{ст}$ . Интегральное уравнение (7) и граничные условия (2) – (4) для избыточной температуры примут вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} v_x [T_{ср} - T(x, y)] dy = a \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y}; \quad (8)$$

$$T(x, 0) = 0; \quad (9)$$

$$T(x, \Delta) = T_{ср}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial T(x, \Delta)}{\partial y} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 T(x, 0)}{\partial y^2} = 0. \quad (12)$$

Найдём решение задачи (8) – (12), используя формулы для определения скорости  $v_x$  в пределах гидродинамического пограничного слоя [4]. Формула для  $v_x$  в первом приближении имеет вид

$$v_x = v \left[ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \right], \quad (13)$$

где  $v$  – скорость невозмущённого набегающего потока;  $\delta(x)$  – толщина гидродинамического пограничного слоя, определяемая по формуле

$$\delta(x) = 4,64\sqrt{\nu x / v}, \quad (14)$$

где  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости.

Возникновение пограничных слоёв (гидродинамического и теплового) обусловлено переносом импульса и теплоты по направлению поперечной координаты  $y$ . Следовательно, толщина каждого из пограничных слоёв определяется интенсивностью соответствующего процесса переноса. Так как характеристикой интенсивности переноса импульса является кинематический коэффициент вязкости, а теплоты – коэффициент температуропроводности, то соотношение толщин этих двух пограничных слоёв должно зависеть от соотношения коэффициентов переноса, т. е. от величины критерия  $Pr = \nu/a$ . Чем больше величина критерия Прандтля, тем более интенсивным является поперечный перенос импульса по сравнению с переносом теплоты, и, следовательно, тем больше в этом случае будет толщина гидродинамического слоя по сравнению с тепловым.

Ввиду того, что толщины гидродинамического и теплового пограничных слоёв должны подчиняться условию  $\Delta(x) \leq \delta(x)$  [1] – [3], то величина критерия Прандтля должна удовлетворять условию  $Pr \geq 1$ . Это условие приближённо выполняется для газов ( $Pr \approx 0,75$ ) и для неэлектропроводных жидкостей ( $Pr > 1$ ) и не выполняется для жидких металлов ввиду высокого значения коэффициента температуропроводности ( $10^{-3} \leq Pr \leq 10^{-2}$ ).

Решение задачи (8) – (12) принимается в виде

$$T(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k(\Delta) y^k, \quad (15)$$

где  $a_k(\Delta)$  – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (9) – (12). После определения коэффициентов  $a_k(k = 0, 3)$  соотношение (15) принимает вид

$$\frac{T}{T_{cp}} = \frac{3}{2} \frac{y}{\Delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\Delta} \right)^3, \quad (16)$$

где  $\Delta(x)$  – толщина теплового пограничного слоя.

Подставив (13) и (16) в интегральное уравнение (8), найдём

$$\frac{d}{dx} \left\{ T_{cp} \nu \delta \left[ \frac{3}{20} \left( \frac{\Delta}{\delta} \right)^2 - \frac{3}{280} \left( \frac{\Delta}{\delta} \right)^4 \right] \right\} = a \frac{dT(x, 0)}{dy}. \quad (17)$$

Дифференцируя (16) по переменной  $y$ , применительно к  $y = 0$  будем иметь

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = \frac{3}{2} \frac{T_{cp}}{\Delta}. \quad (18)$$

Если принять  $\Delta < \delta$ , то вторым членом в левой части уравнения (17) можно пренебречь. Тогда соотношение (17) с учётом (18) примет вид

$$\nu \frac{d}{dx} (\beta^2 \delta) = 10 \frac{a}{\beta \delta}, \quad (19)$$

где  $\beta = \Delta/\delta$ .

Ввиду независимости величины  $\beta$  от координаты  $x$ ,  $d\beta/dx = 0$ . Отсюда получаем

$$\frac{1}{10} \nu \beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = a. \quad (20)$$

Подставив (14) в (20), найдём

$$\Delta(x) = \frac{4,64x}{\sqrt{Re_x} \cdot \sqrt[3]{Pr}}, \quad (21)$$

где  $Re_x = v x/\nu$ ,  $Pr = \nu/a$ .

Соотношения (16), (21) определяют решение задачи (8) – (12) в первом приближении. Результаты расчётов относительных избыточных температур  $\Theta = T/T_{cp} = (t - t_{ct}) / (t_{cp} - t_{ct})$  по формуле (16) в сравнении с точным решением [1] представлены на рис. 3. Их анализ приводит к заключению о том, что расхождение полученных по формуле (16) значений температур от точных их значений находится в пределах 5 – 11%. Причём максимальное расхождение наблюдается вблизи верхней границы теплового пограничного слоя.

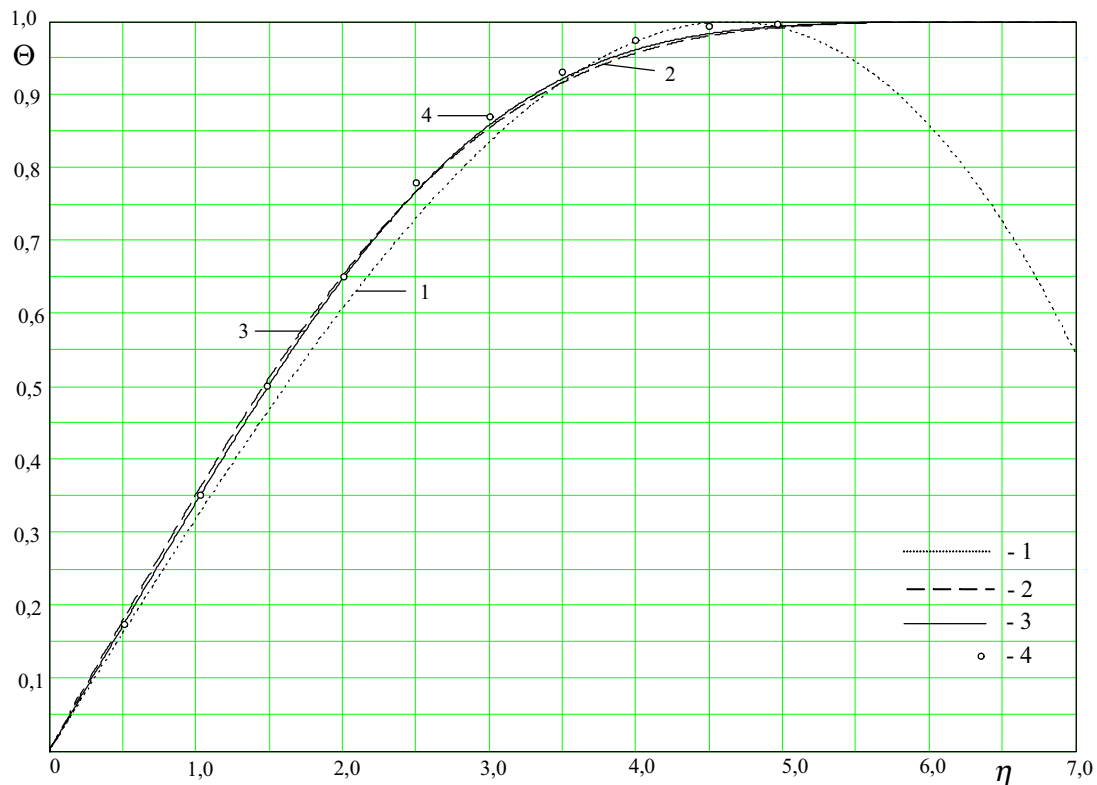


Рис. 3. Распределение безразмерных температур  $\Theta = T/T_{cp}$  в зависимости от безразмерной координаты  $\eta = y\sqrt{v/vx}$ . 1, 2, 3 – соответственно первое, второе и третье приближения; 4 – точное решение [1]

Соотношение (16) благодаря полиномиальной зависимости температуры от координаты  $y$  позволяет построить линии изотерм в пределах толщины теплового пограничного слоя в координатах “ $y - x$ ” (рис. 4). Задавая любые постоянные значения безразмерной температуры  $T/T_{cp} = \Theta$ , для различных значений координаты  $x$  можно найти такие  $y$ , которые удовлетворяют соотношению (16).

Анализ распределения изотерм позволяет заключить, что все они ( $0 \leq \Theta \leq 1$ ) возникают на поверхности стенки в точке  $x = 0, y = 0$ . Изотерма нулевой температуры  $\Theta = 0$  совпадает с осью  $x$ . Изотерма единичной температуры  $\Theta = 1$  совпадает с линией теплового пограничного слоя. Отмечается сгущение изотерм вблизи стенки и их разрежение вблизи границы, отделяющей возмущённый поток от невозмущённого.

На основе графиков рис. 4 по соотношению  $W = \Delta y/\Delta x$  определяются скорости перемещения изотерм по координате  $y$  в зависимости от координаты  $x$  (рис. 5). Их анализ позволяет сделать вывод

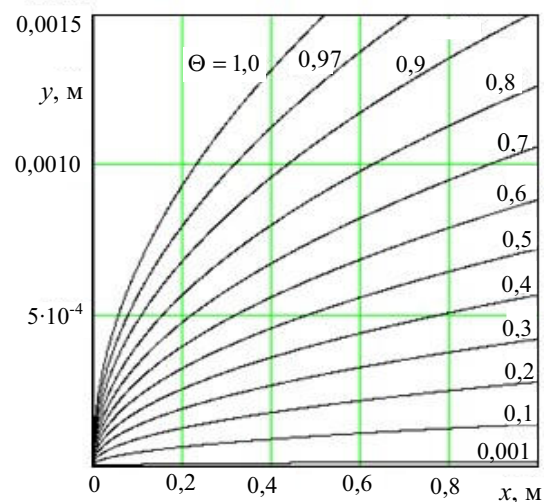


Рис. 4. График распределения изотерм  $\Theta = T/T_{cp}$  в тепловом пограничном слое.

$$Pr = \nu/a = 1, \nu = 5 \text{ м/с}$$

о том, что максимальную скорость перемещения имеет единичная изотерма. Скорость перемещения нулевой изотермы равна нулю. Все изотермы возникают на поверхности стенки в точке  $x = 0, y = 0$ , имея при этом бесконечно большие начальные скорости. Затем по мере продвижения изотерм по координате  $y$  в зависимости от координаты  $x$  их скорости существенно

уменьшаются с последующей стабилизацией изменения по закону, близкому к линейному. Отметим, что наибольший градиент скорости имеют изотермы малого потенциала на относительно небольшом расстоянии по координате  $x$ .

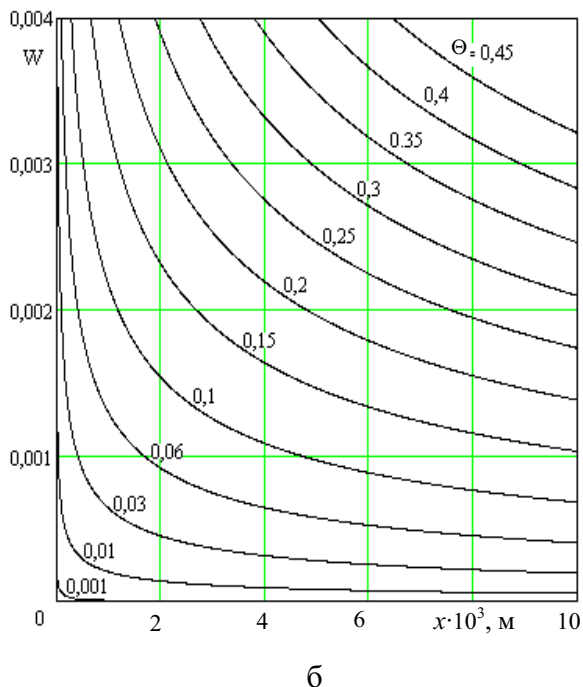
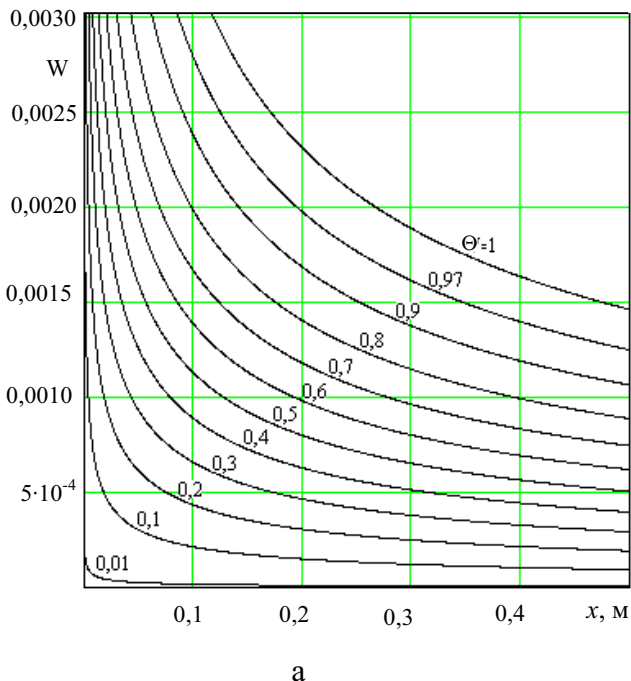


Рис. 5. Графики изменения скоростей движения изотерм  $W = \Delta y / \Delta x$  по координате  $y$  в зависимости от координаты  $x$

Для повышения точности решения задачи (1) – (5) необходимо увеличивать степень полинома (15). Для определения

вновь возникающих при этом неизвестных коэффициентов  $a_k(\Delta)$  будем привлекать дополнительные граничные условия. Принцип их получения заключается в следующем [4] – [6]. Для получения первых из них уравнение (1) применяется в точках  $y = 0$  и  $y = \Delta$ . Именно таким путём было получено дополнительное граничное условие (5). Для получения второго дополнительного граничного условия применим уравнение (1) к точке  $y = \Delta(x)$ , которое с учётом (4) будет иметь вид

$$\frac{\partial t(x, \Delta)}{\partial x} = \frac{a}{v_x} \frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial y^2}. \tag{22}$$

Дифференцируя (2) по переменной  $x$  и сравнивая полученное соотношение с (22), находим второе дополнительное граничное условие (первым из них является соотношение (5)) вида

$$\frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial y^2} = 0. \tag{23}$$

Для получения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (1) по переменной  $y$  и применим полученное соотношение для точки  $y = \Delta(x)$ :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial t(x, \Delta)}{\partial x} + v_x \frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial t(x, \Delta)}{\partial y} + v_y \frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial y^2} = a \frac{\partial^3 t(x, \Delta)}{\partial y^3}. \tag{24}$$

Соотношение (24) с учётом (4), (5), а также того, что  $(\partial v_x / \partial y)_{y=\delta(x)} = 0$ , примет вид

$$\frac{\partial^2 t(x, \Delta)}{\partial x \partial y} = \frac{a}{v_x} \frac{\partial^3 t(x, \Delta)}{\partial y^3}. \tag{25}$$

Дифференцируя (4) по переменной  $x$  и сравнивая полученное соотношение с (25), находим третье дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial^3 t(x, \Delta)}{\partial y^3} = 0. \quad (26)$$

Подставляя (15) при  $n = 6$  в граничные условия (2) – (5), (23), (26), относительно неизвестных коэффициентов  $a_k$  ( $k = \overline{0, 5}$ ) будем иметь систему шести алгебраических линейных уравнений (отметим, что все дополнительные граничные условия для  $t$  и  $T$  идентичны). Её решение имеет вид

$$a_0 = 0; \quad a_1 = \frac{5 T_{cp}}{2 \Delta}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -5 \frac{T_{cp}}{\Delta^3};$$

$$a_4 = 5 \frac{T_{cp}}{\Delta^4}; \quad a_5 = -\frac{3 T_{cp}}{2 \Delta^5}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов  $a_k$  в (15), находим

$$\frac{T(x, y)}{T_{cp}} = \frac{5 y}{2 \Delta} - 5 \left(\frac{y}{\Delta}\right)^3 + 5 \left(\frac{y}{\Delta}\right)^4 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\Delta}\right)^5. \quad (27)$$

Формула для распределения скорости во втором приближении имеет вид [4]:

$$v_x = v \left[ \frac{5 y}{2 \delta} - 5 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + 5 \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^5 \right], \quad (28)$$

где

$$\delta(x) = 7,0356 \sqrt{vx/v}. \quad (29)$$

Подставив (27) и (28) в интегральное уравнение (8) и определив интегралы относительно неизвестной функции  $\Delta(x)$ , получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{v}{5544 dx} \left( 660 \frac{\Delta^2}{\delta} - 165 \frac{\Delta^4}{\delta^3} + 77 \frac{\Delta^5}{\delta^4} - 12 \frac{\Delta^6}{\delta^5} \right) = \frac{5 a}{2 \Delta}. \quad (30)$$

Ввиду того, что  $\Delta < \delta$ , то всеми членами в левой части соотношения (30), кроме первого, можно пренебречь:

$$\frac{165}{1388} v \frac{d}{dx} (\beta^2 \delta) = \frac{5 a}{2 \beta \delta}.$$

Так как величина  $\beta = \Delta/\delta$  не зависит от  $x$ , то последнее уравнение приводится к виду

$$\frac{1}{21} v \beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = a. \quad (31)$$

Подставляя (29) в (31), находим

$$\Delta(x) = \frac{6,661x}{\sqrt{\frac{vx}{v}} \cdot \sqrt[3]{\frac{v}{a}}}. \quad (32)$$

Соотношения (27), (32) представляют решение задачи (1) – (5) во втором приближении. Результаты расчётов безразмерных температур  $\Theta = T/T_{cp}$  по формуле (27) показаны на рис. 3. Их анализ позволяет сделать вывод о том, что уточнение решения во втором приближении по сравнению с первым составляет около 3 % для  $0,5 \leq \eta \leq 3,0$ , а вблизи границы теплового пограничного слоя ( $\eta > 5,0$ ) полученное во втором приближении решение практически совпадает с точным.

Соотношение (27) точно удовлетворяет всем основным (2) – (4) и дополнительным (5), (23), (26) граничным условиям, а также интегральному уравнению (8). По сравнению с первым приближением в данном случае наблюдается более точное выполнение уравнения (1) ввиду выполнения дополнительных граничных условий, согласно которым уравнение (1) точно выполняется в точках  $y = 0$  и  $y = \Delta(x)$ , т. е. на границе фронта температурного возмущения. Так как фронт температурного возмущения изменяется в диапазоне всего рассматриваемого участка координаты  $y$ , то, следовательно, уточнение выполнения уравнения (1) происходит внутри всей области изменения искомой функции.

Найдём дополнительные граничные условия, необходимые для получения решения задачи в третьем приближении. Для этого продифференцируем уравнение (1) по переменной  $y$  и запишем полученное соотношение для точки  $y = 0$ :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial t(x, 0)}{\partial x} + v_x \frac{\partial^2 t(x, 0)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial t(x, 0)}{\partial y} +$$

$$+v_y \frac{\partial^2 t(x,0)}{\partial y^2} = a \frac{\partial^3 t(x,0)}{\partial y^3}. \quad (33)$$

Продифференцируем граничное условие (2) по переменным  $x$  и  $y$ :

$$\frac{\partial t(x,0)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial t(x,0)}{\partial y} = 0. \quad (34)$$

Соотношение (33) с учётом (34) и  $v_x|_{y=0} = v_y|_{y=0} = 0$  приводится к виду

$$\frac{\partial^3 t(x,0)}{\partial y^3} = 0. \quad (35)$$

Соотношение (35) представляет первое дополнительное граничное условие третьего приближения.

Аналогично, путём двух- и трехкратного дифференцирования уравнения (1) по переменной  $y$  и сравнения полученных соотношений с основными и дополнительными граничными условиями и производными от них по переменной  $x$ , применительно к точке  $y = \Delta(x)$  получаем второе и третье дополнительные граничные условия:

$$\frac{\partial^4 t(x, \Delta)}{\partial y^4} = 0; \quad \frac{\partial^5 t(x, \Delta)}{\partial y^5} = 0. \quad (36)$$

Граничные условия (2) – (5), (23), (26), (35), (36) позволяют найти уже девять неизвестных коэффициентов  $a_k(\Delta)$  ( $k = \overline{0, 8}$ ) ряда (15). Подставив (15) в перечисленные граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов  $a_k(\Delta)$  получим систему девяти алгебраических линейных уравнений. Её решение имеет вид:

$$a_0=0; \quad a_1=\frac{8T_{cp}}{3\Delta}; \quad a_2=0; \quad a_3=0; \quad a_4=\frac{70T_{cp}}{3\Delta^4};$$

$$a_5=56\frac{T_{cp}}{\Delta^5}; \quad a_6=-56\frac{T_{cp}}{\Delta^6}; \quad a_7=\frac{80T_{cp}}{3\Delta^7}; \quad a_8=-5\frac{T_{cp}}{\Delta^8}.$$

Подставляя найденные коэффициенты  $a_k(\Delta)$  в (15), находим

$$\frac{T(x,y)}{T_{cp}} = \frac{8y}{3\Delta} - \frac{70}{3}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^4 + 56\left(\frac{y}{\Delta}\right)^5 - 56\left(\frac{y}{\Delta}\right)^6 + \frac{80}{3}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^7 - 5\left(\frac{y}{\Delta}\right)^8. \quad (37)$$

Формула для распределения скорости  $v_x$  в третьем приближении имеет вид [4]:

$$v_x = v \left[ \begin{array}{l} \frac{8y}{3\delta} - \frac{70}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 + 56\left(\frac{y}{\delta}\right)^5 \\ -56\left(\frac{y}{\delta}\right)^6 + \frac{80}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^7 - 5\left(\frac{y}{\delta}\right)^8 \end{array} \right], \quad (38)$$

где

$$\delta(x) = 7,7931\sqrt{vx/v}. \quad (39)$$

Отметим, что в третьем приближении, как и во всех предыдущих, формулы для безразмерных температур и скоростей полностью совпадают, что можно объяснить полной аналогией интегральных уравнений гидродинамического и теплового пограничных слоев, а также всех основных и дополнительных граничных условий.

Подставляя (37) в интегральное уравнение (8), относительно неизвестной функции  $\Delta(x)$  приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dx} \left\{ -\frac{v}{196911} \left[ \begin{array}{l} -19448\frac{\Delta^2}{\delta} + 3672\frac{\Delta^7}{\delta^6} \\ +99\frac{\Delta^9}{\delta^8} + 6644\frac{\Delta^5}{\delta^4} \\ -7344\frac{\Delta^6}{\delta^5} - 935\frac{\Delta^8}{\delta^7} \end{array} \right] \right\} = \frac{8a}{3\Delta}. \quad (40)$$

Так как  $\Delta < \delta$ , то всеми членами в левой части уравнения (40), кроме первого, можно пренебречь.

$$\frac{19448}{196911} v \left[ \frac{d}{dx} (\beta^2 \delta) \right] = \frac{8a}{3\beta\delta}. \quad (41)$$

Учитывая, что  $\beta = \Delta/\delta$  не зависит от  $x$ , находим

$$\frac{1}{27} \nu \beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = a. \quad (42)$$

Подставив в (42) соотношение (39), получим

$$\Delta(x) = \frac{7,491x}{\sqrt{\text{Re}_x} \cdot \sqrt[3]{\text{Pr}}}. \quad (43)$$

Соотношения (37), (43) представляют решение задачи (1) – (5) в третьем приближении. Результаты расчётов по формуле (37) в сравнении с точным решением [2] приведены на рис. 3. Их анализ позволяет заключить, что отклонение полученных по формуле (37) безразмерных температур от их точных значений не превышает 2 %.

Дополнительные граничные условия, необходимые для получения решения задачи (1) – (5) в четвёртом приближении, имеют вид

$$\frac{\partial^4 t(x,0)}{\partial y^4} = 0; \quad \frac{\partial^6 t(x,\Delta)}{\partial y^6} = 0; \quad \frac{\partial^7 t(x,\Delta)}{\partial y^7} = 0. \quad (44)$$

После определения неизвестных коэффициентов  $a_k(\Delta)$  ( $k = \overline{0,11}$ ) соотношение (15) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_{cp}} = & \frac{11}{4} \frac{y}{\Delta} - \frac{231}{2} \frac{y^5}{\Delta^5} + 462 \frac{y^6}{\Delta^6} - 825 \frac{y^7}{\Delta^7} + 825 \frac{y^8}{\Delta^8} - \\ & - \frac{1925}{4} \frac{y^9}{\Delta^9} + 154 \frac{y^{10}}{\Delta^{10}} - 21 \frac{y^{11}}{\Delta^{11}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Формула для скоростей  $v_x$  в четвёртом приближении записывается в виде, аналогичном формуле (45), где  $\delta(x)$  определяется следующим образом:

$$\delta(x) = 8,2572 \sqrt{\nu x / \nu}. \quad (46)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $\Delta(x)$  имеет вид

$$\frac{5}{156} \nu \beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = a. \quad (47)$$

Подставляя (46) в (47), находим

$$\Delta(x) = \frac{8,017x}{\sqrt{\frac{\nu x}{\nu}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\nu}{a}}}. \quad (48)$$

Соотношения (45), (48) представляют решение задачи (1) – (5) в четвёртом приближении. Результаты расчётов по формуле (45) показывают, что расхождение с точным решением не превышает 0,5 %. Сравнение результатов расчётов безразмерных температур в первом и четвёртом приближениях показано на рис. 6.

На рис. 7 даны результаты расчётов по формуле (45) для различных значений критерия Прандтля ( $Pr = \nu/a = 0,6; 1,0; 3,0; 15,0$ ) в сравнении с точным решением [1], [2]. Как видно из рисунка, для  $Pr = 1; 3; 15$  полученные по формуле (45) значения безразмерных температур  $\Theta = T/T_{cp} = (t - t_{ct})/(t_{cp} - t_{ct})$  практически совпадают с их точными значениями. Расхождение результатов, составляющее около 3 %, наблюдается для  $Pr = 0,6$ , т. е. для газов.

На основе полученных выше зависимостей для скорости и температуры в пределах соответствующих пограничных слоёв и использования дифференциального уравнения конвективной теплоотдачи

$$\frac{T}{T_{cp}} = \frac{11}{4} \frac{y}{\Delta} - \frac{231}{2} \frac{y^5}{\Delta^5} + 462 \frac{y^6}{\Delta^6} - 825 \frac{y^7}{\Delta^7} + 825 \frac{y^8}{\Delta^8} - \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{y=0} = \alpha (T_{cp} - T_{ct}), \quad (49)$$

можно определить коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{\lambda}{(T_{cp} - T_{ct})} \frac{\partial T(x,0)}{\partial y}, \quad (50)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

Если использовать решение в первом приближении (16), то для коэффициента теплоотдачи получим формулу

$$\alpha = 1,5 \frac{\lambda}{\Delta(x)}. \quad (51)$$



Для решения (45) в четвертом приближении будем иметь

$$\alpha = 2,75 \frac{\lambda}{\Delta(x)}. \quad (52)$$

Подставляя (21) в (51), определим критерий

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0,3232 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}. \quad (53)$$

Подставив (48) в (52), получим

$$Nu_x = 0,3430 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}. \quad (54)$$

Отсюда следует, что расхождение коэффициентов Нуссельта в критериальных уравнениях теплоотдачи в первом и четвертом приближениях составляет 1,98 %.

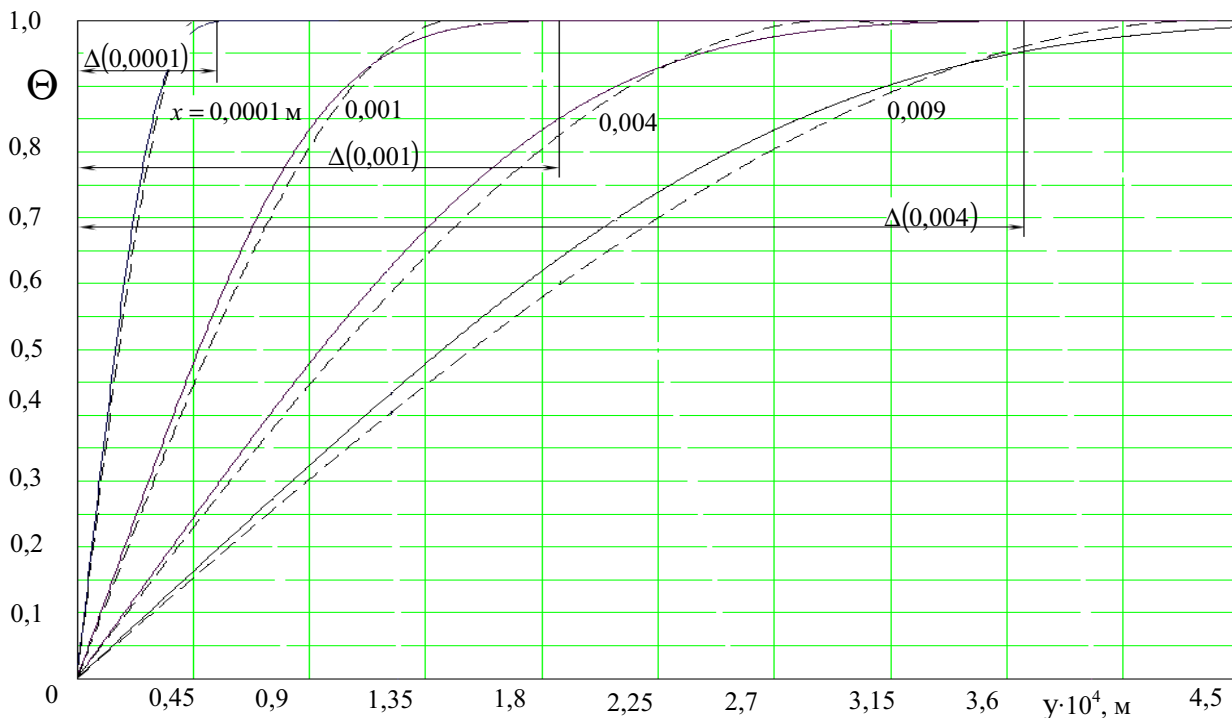


Рис. 6. Изменение безразмерных температур  $\Theta = T/T_{cp}$  в пределах теплового пограничного слоя. - - - - по формуле (16) (первое приближение); — — — по формуле (45) (четвертое приближение)

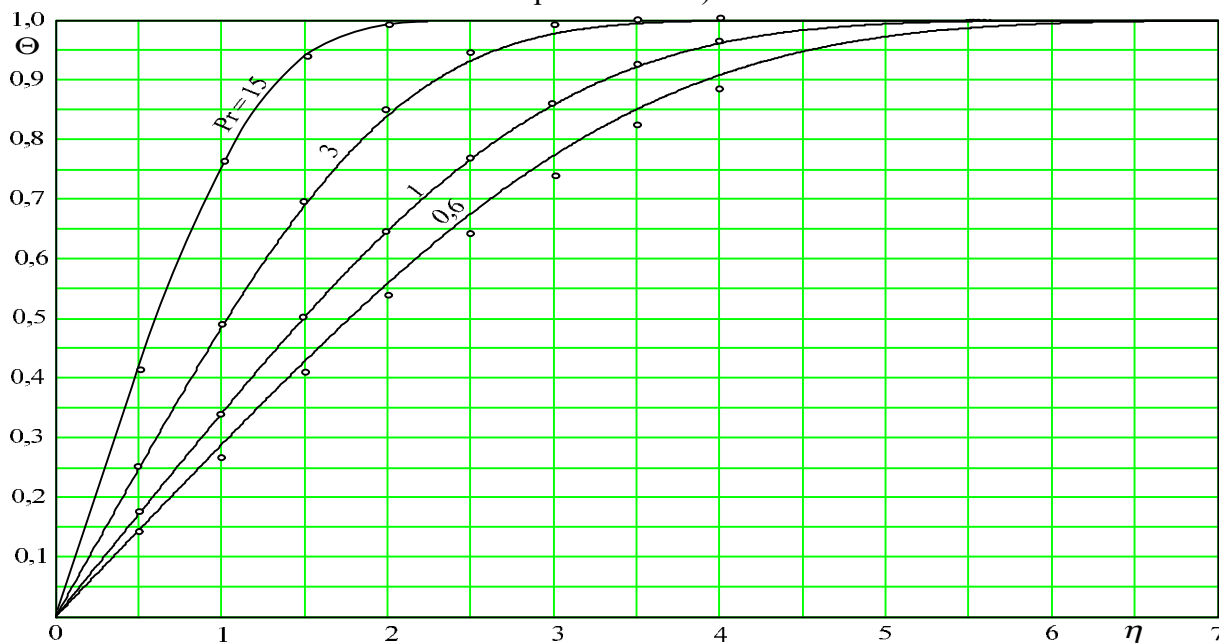


Рис. 7. Распределение безразмерных температур  $\Theta = T/T_{cp}$  в зависимости от безразмерной координаты  $\eta = y\sqrt{v/\nu x}$  для различных значений критерия Прандтля ( $Pr = \nu/a$ ). — — — по формуле (45); ○ — точное решение [1]

По результатам проведённых исследований можно сделать следующие выводы.

1. На основе математической модели теплового пограничного слоя, включающей интегральное уравнение (7), путём использования дополнительных граничных условий разработана методика получения уточнённых аналитических решений исходного дифференциального уравнения пограничного слоя (1), предложенного Польшаузенем. Дополнительные граничные условия позволяют применять аппроксимационное представление решения с возможностью определения такого числа его слагаемых, которые позволяют получать аналитические решения с заданной степенью точности.

2. Дополнительные граничные условия находятся из дифференциального уравнения Польшаузена путём выполнения этого уравнения и производных от него в граничной точке ( $y = 0$ ) и на фронте температурного возмущения (на границе пограничного слоя). Так как диапазон изменения фронта возмущения охватывает весь диапазон изменения поперечной координаты ( $0 \leq y \leq \Delta(x)$ ), то, следовательно, для всех значений переменной  $x$ , которым

соответствуют значения переменной  $y$ , обозначающие линию пограничного слоя, уравнение Польшаузена выполняется точно, в чём можно убедиться непосредственной подстановкой соотношений (16), (27), (37), (45) в (7). Расчёты показывают, что с увеличением числа приближений (степени аппроксимирующего полинома) решение всякий раз уточняется.

3. Выполнен анализ распределения изотерм в пределах теплового пограничного слоя и показано их сгущение вблизи поверхности стенки на весьма малом расстоянии по координате  $y$ . Проведён анализ изменения скоростей движения изотерм по поперечной координате  $y$  в зависимости от величины продольной координаты  $x$  и показано, что наибольшее изменение скорости их движения наблюдается в узком пристеночном слое и на незначительном отрезке вдоль координаты  $x$ .

4. На основе полученных уточнённых аналитических решений уравнения Польшаузена уточнены формулы для определения коэффициентов теплоотдачи на границе “жидкость-стенка” на величину 1,98 %. Уточнены формулы для определения толщины теплового пограничного слоя.

### Библиографический список

1. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя [Текст] / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1969.
2. Юдаев, Б. Н. Теплопередача [Текст]: учебник для вузов / Б. Н. Юдаев. – М.: Высшая школа, 1981.
3. Болгарский, А. В. Термодинамика и теплопередача [Текст] / А. В. Болгарский, Г. А. Мухачев, В. К. Щукин. – М.: Высшая школа, 1975.
4. Стефанюк, Е. В. Получение аналитического решения уравнений гидродинамического пограничного слоя на основе введения дополнительных граничных условий [Текст] / Е. В. Стефанюк, Б. В. Аверин, И. В. Кудинов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. Специальный выпуск: “Актуальные вопросы тепло- и массообмена, энергоэффективность, исследование вихревых закрученных потоков”. – Самара. Самарский научный центр РАН, 2008. – С. 39-46.
5. Кудинов, В. А. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях [Текст] / В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, Е. В. Стефанюк. – М.: Высшая школа, 2008.
6. Кудинов, В. А. Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения [Текст] / В. А. Кудинов, Е. В. Стефанюк // Известия АН. Энергетика. – 2008. – №4. – С. 122-138.

## References

1. Schlichting, G. Boundary layer theory / G. Schlichting. – Moscow: Nauka (Science), 1969.
2. Yudayev, B. N. Heat transfer: Textbook for higher school / B. N. Yudayev. – Moscow: Vysshaya shkola (Higher school), 1981.
3. Bolgarsky, A. V. Thermodynamics and heat transfer / A. V. Bolgarsky, G. A. Mukhatchyov, V. K. Shchukin. – Moscow: Vysshaya shkola (Higher school), 1975.
4. Stefanyuk, Ye. V. Obtaining an analytical solution of hydrodynamic boundary layer equations on the basis of introducing additional boundary conditions / Ye. V. Stefanyuk, B. V. Averin, I. V. Kudinov // News of the Samara Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences. Special issue: “Topical questions of heat and mass exchange, power efficiency, research of vortex swirled flows”. – Samara. Samara Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, 2008. – PP. 39-46.
5. Kudinov, V. A. Heat conduction and thermoelasticity in multi-layer structures / V. A. Kudinov, B. V. Averin, Ye. V. Stefanyuk. – Moscow: Vysshaya shkola (Higher school), 2008.
6. Kudinov, V. A. Heat conductivity problems on the basis of defining the temperature perturbation front / V. A. Kudinov, Ye. V. Stefanyuk // Izvestiya (news) of the Academy of Sciences. Power engineering. – 2008. – No. 4. – PP. 122-138.

### OBTAINING THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE HEAT BOUNDARY LAYER EQUATION BASED ON INTRODUCING ADDITIONAL BOUNDARY CONDITIONS

© 2010 Ye. V. Stefanyuk, I. V. Kudinov

Samara State Aerospace University

A method of obtaining an approximate analytical solution of the initial differential equation (Polgauzen equation) has been developed using a mathematical model of the heat boundary layer presented in the form of Kruzhilin integral equation on the basis of introducing additional boundary conditions. The method developed makes it possible to obtain solutions with the specified degree of accuracy. Criterial dependence for defining the convective heat exchange coefficient at the fluid-wall boundary has been refined, the formulae for defining the heat boundary layer have been revised. Isotherm distribution within the heat boundary layer has been analysed, the velocity of isotherm motion along the transverse coordinate depending on the value of the longitudinal variable has been investigated.

*Heat boundary layer, temperature perturbation front, additional boundary conditions, integral method of heat balance, isotherm, isotherm motion velocities.*

#### Информация об авторах

**Стефанюк Екатерина Васильевна**, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры “Теоретические основы теплотехники и гидромеханика” Самарского государственного технического университета, [stef-kate@yandex.ru](mailto:stef-kate@yandex.ru). Область научных интересов: аналитические методы решения краевых задач теплопроводности, тепломассопереноса и термоупругости.

**Кудинов Игорь Васильевич**, аспирант кафедры “Прикладная математика и информатика” Самарского государственного технического университета, [igor\\_koudinov@mail.ru](mailto:igor_koudinov@mail.ru). Область научных интересов: аналитические методы решения краевых задач теплопроводности, тепломассопереноса и термоупругости.

**Stefanyuk Yekaterina Vasilyevna**, candidate of technical science, senior lecturer of the department “Theoretical foundations of heat engineering and hydromechanics”, Samara State Aerospace University, [stef-kate@yandex.ru](mailto:stef-kate@yandex.ru). Area of research: analytical methods of solving boundary problems of heat conduction, heat and mass transfer and thermoelasticity.

**Kudinov Igor Vasilyevitch**, post-graduate student of the department “Applied mathematics and information science”, Samara State Aerospace University, [igor\\_koudinov@mail.ru](mailto:igor_koudinov@mail.ru). Area of research: analytical methods of solving boundary problems of heat conduction, heat and mass transfer and thermoelasticity.