

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С УЧЁТОМ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

© 2021

**А. Ф. Шориков** доктор физико-математических наук, профессор;  
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского  
Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург;  
[afshorikov@mail.ru](mailto:afshorikov@mail.ru)

**А. Ю. Горанов** ассистент; Уральский федеральный университет имени первого  
Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург;  
инженер-конструктор; НПО автоматики им. академика Н.А. Семихатова,  
г. Екатеринбург;  
[goranovayu@mail.ru](mailto:goranovayu@mail.ru)

Предлагается алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления сближением двух космических аппаратов (КА) с ограничениями на их фазовые состояния. В качестве исходной модели рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая динамику активного КА (маневрирующего КА) относительно пассивного КА (станции) в центральном поле тяготения Земли в орбитальной системе координат, связанной с центром масс пассивного КА. Сформированная нелинейная модель динамики активного КА линеаризуется относительно заданной опорной фазовой траектории пассивного КА, а затем дискретизируется и приводится к линейному рекуррентному виду. Для сформированной аппроксимирующей линейной дискретной управляемой динамической системы приводится математическая формализация рассматриваемой задачи сближения двух КА в заданный финальный момент времени, качество решения которой оценивается соответствующим выпуклым терминальным функционалом, с учётом наличия геометрических ограничений на фазовые состояния активного КА и управляющие воздействия, связанные с ним, в виде выпуклых многогранников-компактов в соответствующем конечномерном векторном пространстве. На основе общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости линейных дискретных управляемых динамических систем, учитывающего заданные условия и ограничения, а также используя метод прямых и обратных конструкций, в работе предлагается решение задачи оптимального программного терминального управления сближением активного КА с пассивным КА в виде конструктивного алгоритма. В заключительной части статьи приводятся результаты компьютерного моделирования и делаются выводы об эффективности разработанного алгоритма.

*Оптимальное управление; программное управление; терминальное управление; сближение космических аппаратов; области достижимости*

---

*Цитирование:* Шориков А.Ф., Горанов А.Ю. Алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления сближением космических аппаратов с учётом фазовых ограничений // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 1. С. 46-64.  
DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-46-64

### Введение

Проблема управления сближением космических аппаратов (КА) на околоземной орбите или орбите другого небесного тела представляет собой одну из важнейших научно-технических задач космонавтики. При этом в качестве цели процесса управления может быть сближение двух КА, когда отсутствует заданное ограничение на значение относительной скорости между аппаратами в финальный момент времени, или необходима встреча, когда финальная относительная скорость должна быть достаточно мала.

В данной статье рассматривается случай, в котором предполагается, что все необходимые манёвры по сближению аппаратов выполняет активный КА (маневрирующий КА), который для изменения своей траектории имеет двигательную установку с достаточным запасом топлива. Другой КА в процессе сближения не маневрирует и называется пассивным КА (станцией). Желаемым результатом процесса управления активным КА является его сближение с пассивным КА в заданный финальный момент времени при обеспечении наименьших, т.е. минимальных, значений их относительных дальности и скоростей.

Решению задачи оптимального управления сближением КА, начиная с 60-х годов XX века, было посвящено большое количество работ, среди которых можно выделить, например, работы [1 – 4]. С точки зрения математического описания эти подходы к решению задачи оптимального терминального сближения КА при заданных ограничениях классифицируются как детерминированные, стохастические и игровые (конфликтные). Детерминированному подходу отвечает математическая модель движения КА, в которой связь между параметрами движения и временем однозначна [1 – 4]. В стохастических моделях связь между входными и выходными параметрами движения КА известна только приближённо и зависит от качества известных вероятностных характеристик параметров, определяющих движение КА. Игровые модели отражают круг ситуаций при управлении движением КА, когда этот процесс протекает в условиях конфликта или при наличии информационной неопределённости и неконтролируемых возмущений [5 – 8; 11]. Каждый из перечисленных подходов предполагает применение соответствующих теоретических моделей и методов, наилучшим образом отвечающих возможностям и уровню информированности субъектов управления о текущем абсолютном или относительном фазовом состоянии рассматриваемых КА, а также имеющимся условиям и ограничениям на процесс сближения КА в рамках соответствующей математической модели.

Отметим, что большинство существующих подходов к решению задач оптимального управления динамическими объектами в условиях неопределённости базируются на аппарате стохастического моделирования, при применении которого требуется информация о вероятностных характеристиках основных параметров управляемого объекта, а также выполнение очень жёстких требований к условиям реализации рассматриваемого процесса управления, которые, чаще всего, оказываются невыполнимыми. Предлагаемый в работе детерминированный подход к решению задачи оптимального программного терминального управления сближением КА базируется на применении аппарата построения и анализа точных *областей достижимости* [5 – 8; 11] линейных дискретных управляемых динамических систем при наличии геометрических ограничений на априори неопределённые параметры в виде выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) в соответствующих конечномерных векторных пространствах.

В данной статье описывается применение детерминированного подхода к решению задачи оптимального программного терминального управления сближением двух КА, основанного на результатах, представленных в работах [9 – 13]. В этом подходе предполагается, что управляемые и неопределённые априори параметры системы принимают свои значения из некоторых известных множеств, имеющих вид выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) в соответствующих конечномерных векторных пространствах. В качестве исходной модели рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая динамику активного КА относительно пассивного КА в центральном поле тяготения Земли в орбитальной системе координат, связанной с центром масс пассивного КА. Сформированная нелинейная модель динамики активного КА линеаризуется относительно заданной опорной

фазовой траектории пассивного КА, а затем дискретизируется и приводится к линейному рекуррентному виду [14]. Для сформированной аппроксимирующей линейной дискретной управляемой динамической системы приводится математическая формализация рассматриваемой задачи сближения двух КА в заданный финальный момент времени, качество решения которой оценивается соответствующим выпуклым терминальным функционалом, с учётом наличия ограничений на фазовые состояния активного КА и управляющие воздействия, связанные с ним, в виде выпуклых многогранников-компактов в соответствующих конечномерных векторных пространствах.

Предлагаемое решение задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА для сформированной линейной дискретной управляемой динамической системы основывается на *методе прямых и обратных конструкций* (Шориков А.Ф., 1986), описанном в работах [9 – 13], базирующемся на *общем рекуррентном алгебраическом методе* построения прямых и обратных областей достижимости (Шориков А.Ф., 1986) для рассматриваемых динамических систем [9 – 11], который имеет вид конструктивного алгоритма. Предлагаемый алгоритм решения рассматриваемой задачи сближения двух КА с ограничениями на фазовые состояния реализуется в виде конечной последовательности одношаговых операций, состоящих из решений: задач линейного математического программирования, вспомогательных конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, применения операции двойственного описания выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) в соответствующих конечномерных векторных пространствах, задачи выпуклого математического программирования, вспомогательных одношаговых краевых задач.

В данной статье для разработки алгоритма решения рассматриваемой задачи сближения КА, в части построения областей достижимости, используется *модификация общего рекуррентного алгебраического метода* построения областей достижимости, описанная в работе [14].

В заключительной части данной статьи на конкретном модельном примере продемонстрированы результаты применения разработанного алгоритма для решения задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА. Моделирование осуществлялось с использованием созданного авторами специализированного компьютерного программного комплекса в среде MATLAB.

### **Формирование математической модели**

Рассматривается дифференциальная модель движения двух материальных точек в центральном поле тяготения Земли, описывающая динамику двух КА. Предполагается, что пассивный КА не маневрирует, в то время как субъект управления активным КА – игрок  $P$  может корректировать его движение за счёт создания соответствующего управляющего воздействия.

На промежутке времени  $[0, T]$  ( $T$  – финальный момент времени для процесса управления,  $T \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}$  – множество всех натуральных чисел) рассматривается система дифференциальных уравнений относительного движения активного КА в орбитальной системе координат (ОСК), связанной с центром масс пассивного КА, имеющая следующий вид [1 – 4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_*(t) - 2\omega_n(t)\dot{y}_*(t) - \omega_n^2(t)x_*(t) - \dot{\omega}_n(t)y_*(t) + \\ \quad + r_n^2(t)\omega_n^2(t)p^{-1}\left(\sqrt{x_*^2(t) + (r_n(t) + y_*(t))^2 + z_*^2(t)}\right)^{-3}x_*(t) = a_{x_*}(t); \\ \ddot{y}_*(t) + 2\omega_n(t)\dot{x}_*(t) - \omega_n^2(t)y_*(t) + \dot{\omega}_n(t)x_*(t) - \\ \quad - r_n^2(t)\omega_n^2(t)p^{-1}\left(\sqrt{x_*^2(t) + (r_n(t) + y_*(t))^2 + z_*^2(t)}\right)^{-3}(r_n(t) + y_*(t)) = a_{y_*}(t); \\ \ddot{z}_*(t) + r_n^2(t)\omega_n^2(t)p^{-1}\left(\sqrt{x_*^2(t) + (r_n(t) + y_*(t))^2 + z_*^2(t)}\right)^{-3}z_*(t) = a_{z_*}(t), \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $t$  – непрерывное время;  $x_*(t)$ ,  $y_*(t)$ ,  $z_*(t)$  – декартовы геометрические координаты активного КА в ОСК;  $a_{x_*}(t)$ ,  $a_{y_*}(t)$ ,  $a_{z_*}(t)$  – проекции вектора относительного ускорения активного КА в ОСК;  $\omega_n(t)$  – угловая скорость вращения пассивного КА вокруг Земли;  $r_n(t)$  – радиус-вектор, соединяющий центр масс пассивного КА с центром масс Земли;  $p$  – фокальный параметр эллиптической орбиты пассивного КА;  $t \in [0, T]$ .

Система дифференциальных уравнений (1), описывающая относительное движение активного КА в ОСК, является нелинейной, что затрудняет её практическое использование. Вместе с тем, применение к полученной системе метода малых отклонений приводит к формированию модели, являющейся её линеаризацией относительно наперёд заданного движения пассивного КА, рассматриваемого как опорное движение (которое, по предположению, является допустимым, с заданной точностью, для активного КА) [1 – 4], которую можно представить с помощью системы уравнений Клохеси-Уилтшира вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_*(t) - 2\omega_n(t)\dot{y}_*(t) + \omega_n^2(t)(r_n(t)p^{-1} - 1)x_*(t) - \dot{\omega}_n(t)y_*(t) = \hat{a}u_{x_*}(t); \\ \ddot{y}_*(t) + 2\omega_n(t)\dot{x}_*(t) - 2\omega_n^2(t)(r_n(t)p^{-1} + 1)y_*(t) + \dot{\omega}_n(t)x_*(t) = \hat{a}u_{y_*}(t); \\ \ddot{z}_*(t) + \omega_n^2(t)r_n(t)p^{-1}z_*(t) = \hat{a}u_{z_*}(t). \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь  $(\hat{a}u_{x_*}(t), \hat{a}u_{y_*}(t), \hat{a}u_{z_*}(t)) = (a_{x_*}(t), a_{y_*}(t), a_{z_*}(t))$ , где  $u(t) = (u_{x_*}(t), u_{y_*}(t), u_{z_*}(t))$  – вектор управляющего воздействия (управления) игрока  $P$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^3$  (для  $n \in \mathbb{N}$ :  $\mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерное пространство векторов-столбцов);  $\hat{a}$  – значение управляющего ускорения активного КА, генерируемое в результате работы двигательной установки.

Сформированной системе линейных дифференциальных уравнений (2), описывающей относительное движение активного КА в ОСК, ставится в соответствие её дискретная аппроксимация, которая позволяет использовать цифровую вычислительную технику для реализации процесса управления сближением двух рассматриваемых КА.

Процесс перехода от линейной дифференциальной динамической модели (2) к соответствующей системе дискретных рекуррентных уравнений подробно описан в монографии [5] и основан на формировании решения векторного дискретного уравнения в форме Коши вида:

$$x(t+1) = \Phi(t+1, t)x(t) + \left[ \int_t^{t+1} \Phi(t+1, \tau)B(\tau)d\tau \right] u(t), \quad (3)$$

где  $t$  – целочисленный период времени,  $t \in \overline{0, T-1} = \{0, 1, \dots, T-1\}$ ;  $T$  – количество периодов времени,  $T \in \mathbb{N}$ , на которых возможно применение управляющего воздействия  $u(t) \in \mathbb{R}^3$ ;  $x(t)$  – фазовый вектор активного КА,  $x(t) \in \mathbb{R}^6$ ;  $\Phi(t+1, t)$  – фундаментальная матрица Коши размерности  $(6 \times 6)$ .

Тогда в соответствии с (3) разработка алгоритма решения задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух рассматриваемых КА будет осуществляться для линейной дискретной управляемой динамической системы, которая может быть записана в следующем векторно-матричном виде:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

где  $t$  – целочисленный период времени,  $t \in \overline{0, T-1}$ ;  $x(t)$  – фазовый вектор системы,  $x(t) \in \mathbb{R}^6$ ;  $x(0) = x_0$  – заданное начальное значение фазового вектора;  $u(t)$  – управление игрока  $P$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^3$ ;  $A(t)$  – матрица состояния,  $A(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ , при этом предполагается, что для всех  $t \in \overline{0, T-1}$  для матрицы  $A(t)$  существует обратная ей матрица  $A^{-1}(t)$ ;  $B(t)$  – матрица управления,  $B(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ .

Предполагается, что в сформированной линейной дискретной управляемой динамической системе (4) её начальное фазовое состояние  $x(0) = x_0$  априори определено и совпадает с начальным значением соответствующих координат фазового вектора исходной нелинейной дифференциальной системы (1).

Считается, что фазовый вектор активного КА  $x(t)$  и вектор управляющего воздействия  $u(t)$  игрока  $P$  удовлетворяют заданным геометрическим ограничениям:

$$\forall t \in \overline{0, T} : x(t) \in \mathbf{X}^*(t) \subset \mathbb{R}^6, \quad (5)$$

$$\forall t \in \overline{0, T-1} : u(t) \in \mathbf{U}^*(t) \subset \mathbb{R}^3, \quad (6)$$

где множества  $\mathbf{X}^*(t)$ ,  $\mathbf{U}^*(t)$  являются выпуклыми многогранниками-компактами (с конечным числом вершин) в пространствах  $\mathbb{R}^6$  и  $\mathbb{R}^3$  соответственно, имеющими вершинное описание  $V\text{-rep}(\mathbf{X}^*(t))$  и  $V\text{-rep}(\mathbf{U}^*(t))$ , т.е. с помощью соответствующих конечных наборов их крайних опорных вершин [11].

### Постановка задачи оптимизации управления сближением КА

Для математической формализации задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА введём ряд необходимых определений, основывающихся на работе [11].

Множеством допустимых программных управлений игрока  $P$  на фиксированном целочисленном промежутке времени  $\overline{0, T}$ , соответствующим ограничению (6), называется множество

$$\mathbf{U}(\overline{0, T}) = \left\{ u(\cdot) : u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \mathbb{R}^{T \times 3}, \forall t \in \overline{0, T-1}, u(t) \in \mathbf{U}^*(t) \right\}.$$

Следует отметить, что точность реализации процесса сближения оценивается значениями отклонений кинематических параметров пассивного КА и активного КА в финальный момент времени  $T$ , поэтому для оценки качества процесса управления в динамической системе (4) – (6) на промежутке времени  $\overline{0, T}$  целесообразно рассмотреть нижеследующий *терминальный критерий качества – терминальный функционал*.

Для каждого допустимого программного управления  $u(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{0, T})$  игрока  $P$  качество процесса управления в динамической системе (4) – (6) оценивается выпуклым терминальным функционалом  $J_{(\overline{0, T}, x_0)} : \mathbf{U}(\overline{0, T}) \rightarrow \mathbb{R}^1$ , значения которого определяются по формуле

$$J_{(\overline{0, T}, x_0)}(u(\cdot)) = \left\| \bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot)) \right\|_6 = \left\| x_{u(\cdot)}(T) \right\|_6, \quad (7)$$

где  $x_{u(\cdot)}(T) = \bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot)) \in \mathbf{X}^*(T)$  – фазовый вектор, описывающий местоположение и скорость активного КА относительно пассивного КА в финальный момент времени  $T$  и являющийся финальным сечением фазовой траектории  $x_{u(\cdot)}(\cdot) = \bar{x}(\cdot; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot))$  активного КА, соответствующей набору  $(\overline{0, T}, x_0, u(\cdot))$ ;  $\|\cdot\|_6$  – евклидова норма в векторном пространстве  $\mathbb{R}^6$ .

Будем считать, что на промежутке времени  $\overline{0, T}$  игрока  $P$  интересует такой результат рассматриваемого процесса программного терминального управления сближением двух КА, полученный путём выбора его допустимого программного управления  $u(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{0, T})$ , при котором выпуклый терминальный функционал вида (7) принимал бы наименьшее возможное значение.

Таким образом, основываясь на вышесказанном, можно сформулировать *задачу оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА*, динамика которого описывается линейной дискретной системой вида (4) – (6), являющейся аппроксимацией исходной нелинейной дифференциальной системы (1) при наличии выпуклых ограничений на реализации фазового вектора активного КА и управления игрока  $P$ .

**Задача.** Для дискретной управляемой динамической системы (4) – (6), описывающей динамику рассматриваемого процесса сближения двух КА на заданном целочисленном промежутке времени  $\overline{0, T}$  при фиксированном начальном фазовом векторе  $x(0) = x_0$  и имеющихся ограничениях на реализации фазового вектора активного КА и управления игрока  $P$ , требуется найти такое *множество оптимальных программных*

терминальных управлений  $U^{(e)}(\overline{0, T}) \subseteq U(\overline{0, T})$  игрока  $P$ , что для любого управления  $u^{(e)}(\cdot) \in U^{(e)}(\overline{0, T})$  и соответствующей траектории

$$x^{(e)}(\cdot) = \{x^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0, T}} = \left\{ \bar{x}(\cdot; \overline{0, T}, x_0^{(e)}, u^{(e)}(\cdot)) \right\}_{t \in \overline{0, T}}, \quad x^{(e)}(0) = x_0, \quad \forall t \in \overline{0, T}: x^{(e)}(t) \in \mathbf{X}^*(t),$$

терминальный критерий качества  $J_{(\overline{0, T}, x_0)}$ , значения которого вычисляются по формуле (7), принимал бы оптимальное (наименьшее) значение  $J^{(e)}$ , а именно выполнялось следующее условие оптимальности:

$$\begin{aligned} J^{(e)} &= J_{(\overline{0, T}, x_0)}(u^{(e)}(\cdot)) = \min_{u(\cdot) \in U(\overline{0, T})} \left\| \bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u(\cdot)) \right\|_6 = \\ &= \left\| \bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u^{(e)}(\cdot)) \right\|_6 = \left\| x^{(e)}(T) \right\|_6 = \bar{J}(x^{(e)}(T)), \end{aligned}$$

где  $x^{(e)}(T) = \bar{x}(T; \overline{0, T}, x_0, u^{(e)}(\cdot)) \in \mathbf{X}^*(T)$  – оптимальный фазовый вектор, характеризующий местоположение и скорость активного КА относительно пассивного КА в финальный момент времени  $T$ , который является финальным сечением фазовой траектории  $x^{(e)}(\cdot) = \bar{x}(\cdot; \overline{0, T}, x_0, u^{(e)}(\cdot)) \in \mathbf{X}^*(\cdot) = \{\mathbf{X}^*(t)\}_{t \in \overline{0, T}}$  активного КА, соответствующей набору  $(\overline{0, T}, x_0, u^{(e)}(\cdot))$ ;  $\bar{J}: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^1$  – функционал, значения которого для всех  $x(T) \in \mathbb{R}^6$  определяются по формуле:

$$\bar{J}(x(T)) = \|x(T)\|_6. \quad (8)$$

Предлагаемый в данной статье алгоритм решения сформулированной задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА основывается на *методе прямых и обратных конструкций* [9 – 13] и на *общем рекуррентном алгебраическом методе* построения областей достижимости [9 – 11], которые разработаны Шориковым А.Ф. применительно к линейным дискретным управляемым динамическим системам при наличии геометрических ограничений на векторы управляющих воздействий в виде выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) в соответствующих конечномерных векторных пространствах, и описывается в следующих двух разделах.

### Области достижимости линейной дискретной управляемой динамической системы

В математической теории оптимального управления большое внимание уделяется проблеме вычисления или оценки множеств всех возможных состояний, в которых может находиться рассматриваемая линейная дискретная управляемая динамическая система (4) – (6) в заданный момент времени. Эти множества называются областями достижимости [5; 12] и являются важной составляющей при решении различных классов задач оптимального управления и оценивания.

Для рассматриваемого фиксированного промежутка времени  $\overline{\tau, \mathcal{G}} \subseteq \overline{0, T}$  ( $\tau < \mathcal{G}$ ) *прямой областью достижимости*  $\mathbf{G}_+(\tau, \mathbf{X}(\tau), \mathcal{G})$  линейной дискретной управляемой динамической системы (4) – (6) на момент времени  $\mathcal{G}$ , соответствующей набору

$(\tau, \mathbf{X}(\tau)) \in \overline{0, T-1} \times \mathbf{2}^{\mathbb{R}^6}$ , где  $\mathbf{X}(\tau) \subset \mathbf{X}^*(\tau)$ , называется множество, определяемое следующим соотношением:

$$\mathbf{G}_+(\tau, \mathbf{X}(\tau), \mathcal{G}) = \{x(\mathcal{G}): x(\mathcal{G}) \in \mathbb{R}^6, x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ t \in \overline{\tau, \mathcal{G}-1}, x(\tau) \in \mathbf{X}(\tau) \subset \mathbf{X}^*(\tau), x(0) = x_0 \in \mathbf{X}^*(0), u(t) \in \mathbf{U}^*(t)\}. \quad (9)$$

Здесь и далее для любого множества  $M$  символом  $\mathbf{2}^M$  обозначается множество всех его подмножеств.

Нетрудно показать [11], что для рассматриваемой линейной дискретной динамической системы (4) – (6) прямая область достижимости вида (9), является выпуклым многогранником-компактом (с конечным числом вершин) в пространстве  $\mathbb{R}^6$ .

Для рассматриваемого фиксированного промежутка времени  $\overline{\tau, \mathcal{G}} \subseteq \overline{1, T}$  ( $\tau < \mathcal{G}$ ) *обратной областью достижимости*  $\mathbf{G}_-(\mathcal{G}, \mathbf{X}(\mathcal{G}), \tau)$  линейной дискретной управляемой динамической системы (4) – (6) на момент времени  $\tau$ , соответствующей набору  $(\mathcal{G}, \mathbf{X}(\mathcal{G})) \in \overline{0, T-1} \times \mathbf{2}^{\mathbb{R}^6}$ , называется множество, определяемое следующим соотношением:

$$\mathbf{G}_-(\mathcal{G}, \mathbf{X}(\mathcal{G}), \tau) = \{x(\tau): x(\tau) \in \mathbb{R}^6, x(t) = A^{-1}(t)[x(t+1) - B(t)u(t)], \\ t \in \{\mathcal{G}-1, \mathcal{G}-2, \dots, \tau+1, \tau\}, x(\mathcal{G}) \in \mathbf{X}(\mathcal{G}), u(t) \in \mathbf{U}(t)\}. \quad (10)$$

Отметим, что при имеющихся условиях и ограничениях для рассматриваемой линейной дискретной динамической системы (4) – (6) это множество является выпуклым многогранником-компактом (с конечным числом вершин) в пространстве  $\mathbb{R}^6$ .

Для вычисления прямой области достижимости  $\mathbf{G}_+(0, \mathbf{X}(0), t)$ , где  $t \in \overline{1, T}$ , и обратной области достижимости  $\mathbf{G}_-(T, \mathbf{X}(T), t)$ , где  $t \in \{T-1, T-2, \dots, 1\}$ , в работе используется *общий рекуррентный алгебраический метод*, подробно описанный в работах [9-11], основанный на их полугрупповом свойстве:

$$\mathbf{G}_+(0, \mathbf{X}(0), t) = \mathbf{G}_+(t-1, \bar{\mathbf{G}}_+(t-1), t), t \in \overline{1, T} \\ \mathbf{G}_-(T, \mathbf{X}(T), t-1) = \mathbf{G}_-(t, \bar{\mathbf{G}}_-(t), t-1), t \in \{T-1, T-2, \dots, 2\}, \quad (11)$$

где  $\bar{\mathbf{G}}_+(T-1) = \mathbf{G}_+(0, \mathbf{X}(0), T)$ ;  $\bar{\mathbf{G}}_+(0) = \mathbf{X}(0) = \{x_0\}$ ;  $\bar{\mathbf{G}}_-(t) = \mathbf{G}_-(T, \mathbf{X}(T), t)$ ;  $\bar{\mathbf{G}}_-(T) = \mathbf{X}(T)$ , и использующий: алгебраические операции над векторами, свойства и решения конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, возможности симплекс-метода для решения задач линейного математического программирования и операции двойственного описания выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) с помощью конечного числа вершин и с помощью соответствующих конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, а также операции над выпуклыми многогранниками-компактами в соответствующих конечномерных векторных пространствах.

Тогда, учитывая свойства (11), многошаговые процедуры вычисления искомых прямых  $\mathbf{G}_+(0, \mathbf{X}(0), t)$ ,  $t \in \overline{1, T}$  и обратных  $\mathbf{G}_-(T, \mathbf{X}(T), t)$ ,  $t \in \{T-1, T-2, \dots, 1\}$  обла-



стей достижимости линейной дискретной динамической системы (4) – (6), отвечающих соответственно наборам  $(0, \mathbf{X}(0))$  и  $(T, \mathbf{X}(T))$ , сводятся к реализации только одношаговых процедур построения соответственно прямых и обратных областей достижимости на шаг вперёд и на шаг назад на основе построенной предыдущей прямой и обратной области достижимости соответственно.

При этом также используется свойство (см., например, [11;15]): любой выпуклый многогранник-компакт (с конечным числом вершин) может быть представлен двумя способами, т.е. иметь двойственное описание – как выпуклая оболочка конечного числа крайних вершин (*V-rep*) и как множество решений конечной системы линейных алгебраических уравнений и неравенств (*H-rep*), соответствующих крайним опорным гиперплоскостям.

Для вычисления последовательностей прямых и обратных областей достижимости для всех моментов времени  $t \in \overline{1, T}$  используется алгоритм, основывающийся на общем рекуррентном алгебраическом методе [9 – 11] и его модификации, описанной в работе [14].

### Алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления сближением двух КА

Используя приведённые выше определения и результаты работ [9 – 13], можно показать, что поиск решения задачи оптимального программного терминального управления сближением двух КА, соответствующей дискретной управляемой динамической системе (4) – (6) с функционалом качества (8), можно свести к решению следующей последовательности одношаговых вспомогательных подзадач:

- 1) полагается:  $t := 0$ ;  $\bar{\mathbf{G}}_+(t) := \mathbf{X}(0) = \{x_0\}$ ;
- 2) на основе известных множеств  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t))$  и  $V\text{-rep}(\mathbf{U}^*(t))$  – вершинных описаний соответственно множеств  $\bar{\mathbf{G}}_+(t)$  и  $\mathbf{U}^*(t)$ , осуществляется вычисление прямой области достижимости  $\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) = \mathbf{G}_+(t, \bar{\mathbf{G}}_+(t), t+1)$  на шаг вперёд (решение этой задачи сводится к реализации конечной последовательности одношаговых операций – алгебраических действий над векторами, поиска решений задач линейного математического программирования для нахождения множества всех вершин выпуклого многогранника-компакта  $\bar{\mathbf{G}}_+(t+1)$ , и на его основе – формирования множества  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1))$  – вершинного описания прямой области достижимости  $\bar{\mathbf{G}}_+(t+1)$ , которое реализуется согласно модификации общего рекуррентного алгебраического метода, изложенной в работе [14]);
- 3) для сформированной прямой области достижимости  $\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) = \mathbf{G}_+(t, \bar{\mathbf{G}}_+(t), t+1)$ , на основе её вершинного описания  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1))$ , формируется и запоминается соответствующая ей конечная система линейных уравнений и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1))$ , множество решений которой совпадает с множеством  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1)) = \bar{\mathbf{G}}_+(t+1)$ ;
- 4) для множества-ограничения  $\mathbf{X}^*(t+1)$  из (5), на основе его вершинного описания  $V\text{-rep}(\mathbf{X}^*(t+1))$ , формируется и запоминается соответствующая ему конечная си-

стема линейных уравнений и неравенств  $\sum(\mathbf{X}^*(t+1))$ , множество решений которой совпадает с множеством  $H\text{-rep}(\mathbf{X}^*(t+1)) = \mathbf{X}^*(t+1) \mathbf{X}^*(t+1)$ ;

5) для множеств  $\bar{\mathbf{G}}_+(t+1)$  и  $\mathbf{X}^*(t+1)$  из соответствующих им систем линейных алгебраических равенств и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1))$  и  $\sum(\mathbf{X}^*(t+1))$  формируется и запоминается соответствующая им конечная система линейных уравнений и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1)) = \sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1)) \cup \sum(\mathbf{X}^*(t+1))$ , множество решений которой совпадает с множеством  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1)) = \bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1)$ ;

6) если  $t+1 = T$ , то осуществляется переход на пункт 9), в противном случае – осуществляется переход на следующий пункт 7);

7) на основании сформированного множества  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1))$  находится множество  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1))$ , которое является вершинным описанием множества  $\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1)$ ;

8) полагается:  $t := t+1$ ;  $\bar{\mathbf{G}}_+(t) = V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t))$  и осуществляется переход на пункт 2);

9) учитывая ограничения (5) и рекуррентные формулы (11), осуществляется оптимизация выпуклого терминального функционала  $\bar{J} = \bar{J}(x(T))$ , значения которого определяются на основании соотношения (8), на финальном множестве  $\bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T) = \mathbf{G}_+(T-1, \bar{\mathbf{G}}_+(T-1), T) \cap \mathbf{X}^*(T)$ , описываемом множеством решений конечной системы линейных алгебраических уравнений и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T)) = \sum(\bar{\mathbf{G}}_+(T)) \cup \sum(\mathbf{G}_+(T)) \cup \sum(\mathbf{X}^*(T))$ , т.е. на множестве  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T)) = \bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T) = \mathbf{G}_+(T-1, \bar{\mathbf{G}}_+(T-1), T) \cap \mathbf{X}^*(T)$ , путём нахождения множества  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(T) = \mathbf{X}_J^{(e)}(0, \mathbf{X}(0), T)$  финальных фазовых состояний системы (4) – (6) из решения следующей задачи выпуклого математического программирования:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_J^{(e)}(0, \mathbf{X}(0), T) &= \{x^{(e)}(T) : x^{(e)}(T) \in H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T))\}, \\ \bar{J}^{(e)} = \bar{J}(x^{(e)}(T)) &= \min_{x(T) \in \{\mathbf{G}_+(T-1, \bar{\mathbf{G}}_+(T-1), T) \cap \mathbf{X}^*(T)\}} \bar{J}(x(T)) = \min_{x(T) \in H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T))} \bar{J}(x(T)) = \\ &= \min_{x(T) \in H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(T) \cap \mathbf{X}^*(T))} \left\{ \|x(T)\|_6 = \|x^{(e)}(T)\|_6 \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

(решение этой одношаговой оптимизационной задачи можно осуществить, например, с помощью метода Зойтендейка (см., например, [13]);

10) осуществляется аппроксимация (с заданной точностью) выпуклого множества  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(T) = \mathbf{X}_J^{(e)}(0, \mathbf{X}(0), T)$  выпуклым многогранником с вершинным описанием, т.е. выполняется формирование множества  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(T))$ ;

11) полагается:  $t := T-1$ ;

12) на основе известных множеств  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t+1))$  и  $V\text{-rep}(\mathbf{U}^*(t+1))$  – вершинных описаний соответственно множеств  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t+1)$  и  $\mathbf{U}^*(t+1)$  осуществляется вычис-

ление обратной области достижимости  $\bar{\mathbf{G}}_-(t) = \mathbf{G}_-(t+1, \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t+1), t)$  на шаг назад (решение этой задачи сводится к реализации конечной последовательности одношаговых операций – алгебраических действий над векторами, поиска решений задач линейного математического программирования для нахождения множества всех вершин выпуклого многогранника-компакта  $\bar{\mathbf{G}}_-(t)$ , и на его основе – формирования множества  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_-(t))$  – вершинного описания обратной области достижимости  $\bar{\mathbf{G}}_-(t)$ );

13) для сформированной обратной области достижимости  $\bar{\mathbf{G}}_-(t) = \mathbf{G}_-(t+1, \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t+1), t)$ , на основе её вершинного описания  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_-(t))$ , формируется соответствующая ей конечная система линейных уравнений и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_-(t))$ , множество решений которой совпадает с множеством  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_-(t)) = \bar{\mathbf{G}}_-(t)$ ;

14) для множеств  $\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t)$  и  $\bar{\mathbf{G}}_-(t)$  из соответствующих им систем линейных алгебраических равенств и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t)) = \sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t)) \cup \sum(\mathbf{X}^*(t))$  и  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_-(t))$  формируется соответствующая им конечная система линейных уравнений и неравенств  $\sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t)) = \sum(\bar{\mathbf{G}}_+(t)) \cup \sum(\mathbf{X}^*(t)) \cup \sum(\bar{\mathbf{G}}_-(t))$ , множество решений которой совпадает с множеством  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t)) = \bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t) = \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t)$ ;

15) если  $t-1=0$ , то полагается:  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t) = \mathbf{X}(0) = \{x_0\}$  и осуществляется переход на пункт 18, в противном случае – осуществляется переход на следующий пункт 16);

16) на основании сформированного множества  $H\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t)) = \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t)$  находится множество  $V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t))$ , которое является вершинным описанием множества  $\bar{\mathbf{G}}_+(t) \cap \mathbf{X}^*(t) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t) = \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t)$ ;

17) полагается:  $t := t-1$ ;  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t+1) = V\text{-rep}(\bar{\mathbf{G}}_+(t+1) \cap \mathbf{X}^*(t+1) \cap \bar{\mathbf{G}}_-(t+1))$  и осуществляется переход на пункт 12);

18) на основании сформированного набора множеств  $\{\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0, T}}$ , где  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(0) = \mathbf{X}(0) = \{x_0\}$ ,  $\bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(T) = \mathbf{X}_J^{(e)}(0, \mathbf{X}(0), T)$  (нахождение этого набора свелось к реализации конечной последовательности одношаговых операций – алгебраических операций над векторами, поиска решений одношаговых задач линейного математического программирования, а также поиска решений конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, являющихся объединением аналогичных систем, описывающих соответствующие прямые и обратные области достижимости и фазовые ограничения, сформированных на основе их вершинного описания), осуществляется формирование множества допустимых программных управлений  $\tilde{u}^{(e)}(\cdot) \in \tilde{\mathbf{U}}(\overline{0, T})$ , которые определяют множество  $\tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(T), T)$ , описываемое соотношением:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(T)) = \{\tilde{u}^{(e)}(\cdot) : \tilde{u}^{(e)}(\cdot) = \{\tilde{u}^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \tilde{\mathbf{U}}(\overline{0, T}), \\ \tilde{x}^{(e)}(t+1) = A(t)\tilde{x}^{(e)}(t) + B(t)\tilde{u}^{(e)}(t) \in \bar{\mathbf{X}}_J^{(e)}(t+1), t \in \overline{0, T-1}, \tilde{x}^{(e)}(0) = x_0\}$$

(решается с помощью реализации рекуррентной последовательности решений одношаговых краевых задач).

Из результатов работ [9 – 12], [14] следует, что сформированное множество  $\tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T))$  описывает множество всех оптимальных программных терминальных управлений игрока  $P$ , т.е. справедливо равенство:

$$\mathbf{U}^{(e)}(\overline{0, T}) = \tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T)),$$

и порождает соответствующее ему множество

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T)) &= \{\tilde{x}^{(e)}(\cdot) : \tilde{x}^{(e)}(\cdot) = \{\tilde{x}^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0, T}} = \\ &= \{\tilde{x}(t; \overline{0, T}, x_0, \tilde{u}^{(e)}(\cdot))\}_{t \in \overline{0, T}}, \tilde{u}^{(e)}(\cdot) = \{\tilde{u}^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T)), \tilde{x}^{(e)}(0) = x_0\} \end{aligned}$$

всех оптимальных фазовых траекторий активного КА, удовлетворяющих заданному фазовому ограничению (5). Следовательно множество  $\tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T), T)$  описывает множество всех решений рассматриваемой задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА для дискретной динамической системы (4) – (6) с функционалом качества (8), удовлетворяющих условию оптимальности (7).

На основании предыдущих рассуждений можно сделать вывод, что алгоритм формирования множества  $\tilde{\mathbf{U}}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T))$  всех оптимальных программных терминальных управлений, которое обеспечивает описание множества  $\mathbf{X}^{(e)}(\overline{0, T}, \mathbf{X}(0), \bar{\mathbf{X}}_j^{(e)}(T))$  всех оптимальных фазовых траекторий для рассматриваемой задачи сближения активного КА с пассивным КА в финальный момент времени  $T$ , удовлетворяющих фазовому ограничению (5), сводится к реализации конечной последовательности поиска решений только одношаговых задач – выполнения алгебраических операций над векторами, линейного и выпуклого математического программирования, выполнения операций перехода от вершинного описания выпуклых многогранников-компактов (с конечным числом вершин) к их описанию соответствующими конечными системами линейных алгебраических уравнений и неравенств и наоборот – поиска решений конечных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, а также решения одношаговых краевых задач.

Таким образом, решение исходной многошаговой задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения активного КА с пассивным КА свелось к алгоритму, являющемуся реализацией *конечной последовательности решений только одношаговых алгебраических и оптимизационных задач*.

### Численный пример

Эффективность предлагаемого алгоритма решения задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА иллюстрируется на численном модельном примере.

На целочисленном промежутке времени  $\overline{0, T} = \overline{0, t_f} = \overline{0, 4}$  рассматривается линейная дискретная система:  $x(0) = x_0 = (2650; -2540; 2120; -3; 2; 3) \in \mathbb{R}^6$ ;  $A(t)$  – матрица

состояния,  $A(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ;  $B(t)$  – матрица управления,  $B(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  (где  $t \in \overline{0,3}$ ), которые формируются численно при реализации процедур линеаризации системы (1) и дискретизации системы (2).

Ограничения на фазовый вектор и управляющее воздействие имеют следующий конкретный вид:

$$\begin{aligned} x(t) \in X^*(t) &= \{x(t): x(t) \in \mathbb{R}^6, \forall t \in \overline{0,4}, \\ |x_1(t)| &\leq 3000 \text{ м}, |x_2(t)| \leq 3000 \text{ м}, |x_3(t)| \leq 3000 \text{ м}, \\ |x_4(t)| &\leq 7,5 \text{ м/с}, |x_5(t)| \leq 7,5 \text{ м/с}, |x_6(t)| \leq 7,5 \text{ м/с}\}, \\ u(t) \in U^*(t) &= \{u(t): u(t) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \overline{0,3}, \\ |u_1(t)| &\leq 1, |u_2(t)| \leq 1, |u_3(t)| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Численное моделирование проводилось в программной среде MATLAB R2014a на персональном компьютере с процессором Intel® Core™ i7-3770 CPU @ 3.4 GHz, оперативной памятью 8 Gb и с видеокартой NVIDIA GeForce GT 730. Визуализация построения областей достижимости осуществлена с использованием библиотеки инструментов MPT Toolbox для MATLAB. Полученные результаты компьютерного моделирования представлены на рис. 1 и рис. 2, данные для которых размещены в табл. 1 – 3.

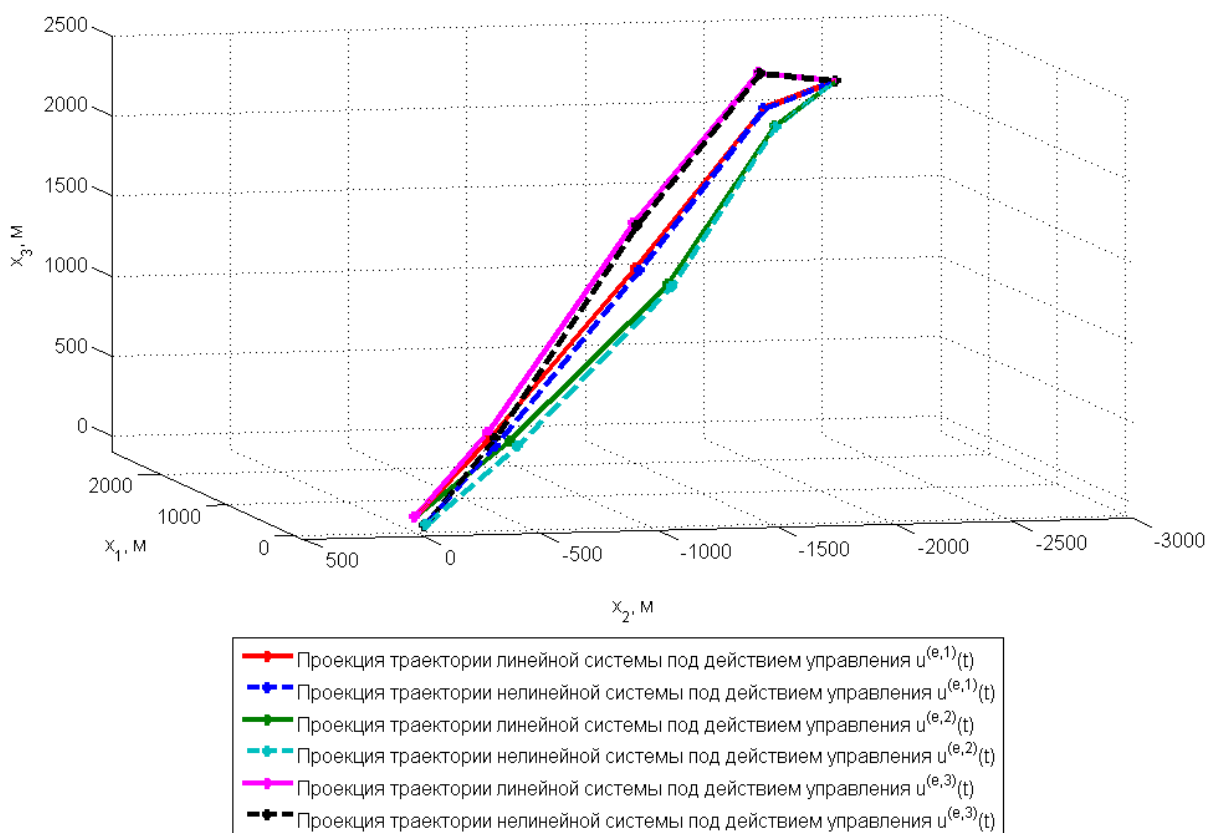


Рис. 1. Проекция геометрических координат фазовых траекторий линейной системы на  $\mathbb{R}^3$

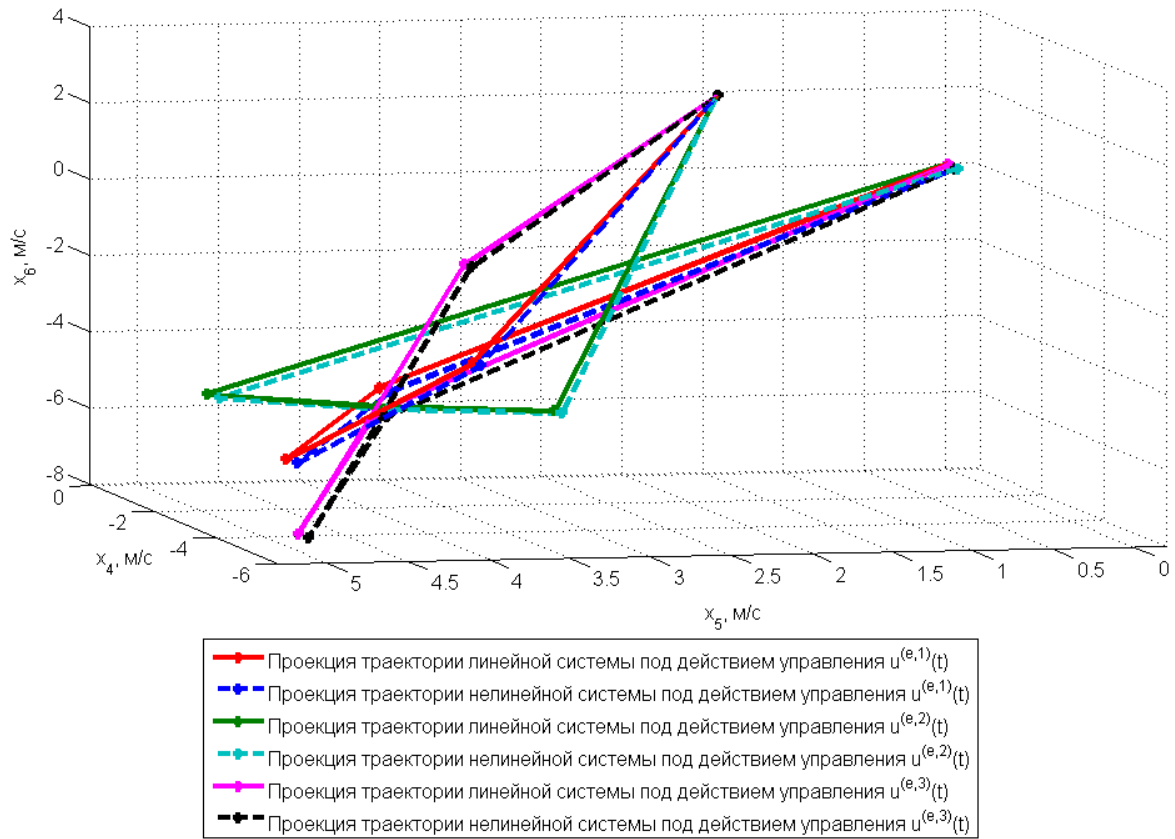

 Рис. 2. Проекции скоростных координат фазовых траекторий линейной системы на  $\mathbb{R}^3$ 

 Таблица 1. Фазовые траектории нелинейной и линейной систем под действием управления  $u^{(e,1)}(t)$ 

	Параметр	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
Управление	$u_1^{(e,1)}(t)$	-0,1206	-0,0337	0,0358	0,0821	-
	$u_2^{(e,1)}(t)$	0,0555	0,0042	-0,0690	-0,1623	-
	$u_3^{(e,1)}(t)$	-0,2164	-0,0883	0,0414	0,1703	-
Нелинейная система $J = 73,19$	$x_1(t)$	2650	1879,7	902,6	200,8	-54,3
	$x_2(t)$	-2540	-2018,0	-1214,5	-397,2	-29,1
	$x_3(t)$	2120	2110,9	1318,9	386,3	-40,6
	$x_4(t)$	-3	-5,47	-5,14	-2,90	-0,12
	$x_5(t)$	2	3,94	5,01	4,01	-0,03
	$x_6(t)$	3	-3,10	-5,68	-4,66	-0,07
Линейная система $J = 0$	$x_1(t)$	2650	1884,2	937,24	234,85	0
	$x_2(t)$	-2540	-2014,2	-1202,0	-375,2	0
	$x_3(t)$	2120	2114,6	1332,6	413,2	0
	$x_4(t)$	-3	-5,42	-5,05	-2,80	0
	$x_5(t)$	2	3,98	5,07	-4,06	0
	$x_6(t)$	3	-3,05	-5,62	-4,58	0

Таблица 2. Фазовые траектории нелинейной и линейной систем под действием управления  $u^{(e,2)}(t)$

	Параметр	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
Управление	$u_1^{(e,2)}(t)$	-0,1254	-0,0034	0,0055	0,0893	-
	$u_2^{(e,2)}(t)$	-0,0373	0,0021	-0,0019	-0,2055	-
	$u_3^{(e,2)}(t)$	-0,2612	-0,0012	0,0001	0,1685	-
Нелинейная система $J = 75,37$	$x_1(t)$	2650	1864,0	937,6	227,6	-55,7
	$x_2(t)$	-2540	-2060,9	-1356,5	-502,2	-32,3
	$x_3(t)$	2120	2002,2	1206,2	382,7	-39,6
	$x_4(t)$	-3	-5,66	-4,59	-3,26	-0,12
	$x_5(t)$	2	3,47	4,34	5,13	-0,03
	$x_6(t)$	3	-4,31	-4,52	-4,61	-0,07
Линейная система $J = 0$	$x_1(t)$	2650	1868,5	954,3	262,05	0
	$x_2(t)$	-2540	-2057,1	-1343,4	-478,2	0
	$x_3(t)$	2120	2005,9	1219,6	480,9	0
	$x_4(t)$	-3	-5,61	-4,50	-3,15	0
	$x_5(t)$	2	3,51	4,40	5,19	0
	$x_6(t)$	3	-4,27	-4,46	-4,54	0

Таблица 3. Фазовые траектории нелинейной и линейной систем под действием управления  $u^{(e,3)}(t)$

	Параметр	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
Управление	$u_1^{(e,3)}(t)$	-0,0879	-0,0899	0,0519	0,0895	-
	$u_2^{(e,3)}(t)$	-0,0559	0,0115	-0,0732	-0,1655	-
	$u_3^{(e,3)}(t)$	-0,1314	-0,2357	0,0846	0,1913	-
Нелинейная система $J = 74,85$	$x_1(t)$	2650	1958,7	1017,6	219,1	-54,8
	$x_2(t)$	-2540	-2024,4	-1232,2	-402,2	-27,0
	$x_3(t)$	2120	2317,1	1575,6	435,4	-43,9
	$x_4(t)$	-3	-4,59	-5,80	-3,11	-0,11
	$x_5(t)$	2	3,83	5,07	4,07	-0,02
	$x_6(t)$	3	-0,81	-7,41	-5,23	-0,82
Линейная система $J = 0$	$x_1(t)$	2650	1963,2	1034,5	253,5	0
	$x_2(t)$	-2540	-2020,6	-1220,1	-381,3	0
	$x_3(t)$	2120	2320,9	1590,6	464,2	0
	$x_4(t)$	-3	-4,54	-5,72	-3,15	0
	$x_5(t)$	2	3,87	5,12	5,19	0
	$x_6(t)$	3	-0,77	-7,34	-4,54	0

Таким образом, можно сделать вывод, что каждое программное управление из множества  $\tilde{U}^{(e)}(\cdot)$  оптимальных программных терминальных управлений, сформированного для линеаризованной дискретной системы с помощью реализации предлагаемого алгоритма решения рассматриваемой задачи сближения КА, разработанного на основе метода прямых и обратных конструкций [11], при подстановке его в уравнения динамики исходной нелинейной дифференциальной системы даёт хороший результат.

### Заключение

В данной работе предложен алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА, динамика которых описывается с помощью системы нелинейных дифференциальных уравнений. Исходная модель рассматриваемого процесса управления линеаризуется относительно заданного опорного движения и полученная линейная дифференциальная система дискретизируется. Для сформированной линейной дискретной управляемой динамической системы формулируется задача оптимального программного терминального управления процессом сближения активного КА с пассивным КА. Для решения этой задачи предлагается алгоритм, который основывается на методе прямых и обратных конструкций [9 – 12], а в части построения областей достижимости используется модификация общего рекуррентного алгебраического метода [9 – 13], описанная работе [14]. Предлагаемый алгоритм решения задачи оптимального программного терминального управления сближением двух КА является реализацией конечной последовательности – выполнения алгебраических операций над векторами и операций над выпуклыми многогранниками-компактами (с конечным числом вершин), поиска решений задач линейного и выпуклого математического программирования, поиска решений систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, а также нахождения решений одношаговых краевых задач. Действие предлагаемого алгоритма иллюстрируется на модельном примере решения задачи управления процессом сближения двух КА.

На основе предлагаемого алгоритма решения рассматриваемой задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА в программной среде MATLAB был разработан комплекс компьютерных программ, с помощью которого было реализовано компьютерное моделирование решения данной задачи на модельном примере. Результаты компьютерного моделирования показали эффективность разработанного алгоритма решения задачи оптимального программного терминального управления процессом сближения двух КА.

Работа выполнена в соответствии с Планом НИР Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

### Библиографический список

1. Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, 1987. 440 с.
2. Ермилов Ю.А., Иванова Е.Е., Пантюшин С.В. Управление сближением космических аппаратов. М.: Наука, 1977. 448 с.
3. Иванов Н.М., Лысенко Л.Н., Мартынов А.И. Методы теории систем в задачах управления космическим аппаратом. М.: Машиностроение, 1981. 255 с.
4. Лебедев А.А., Соколов В.Б. Встреча на орбите. М.: Машиностроение, 1969. 67 с.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.



6. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
7. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
9. Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 1993. № 4. С. 115-127.
10. Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф. Об одном алгоритме построения области достижимости линейной управляемой системы // В сб.: «Негладкие задачи оптимизации и управление». Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 55-61.
11. Шориков А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Уральский университет, 1997. 242 с.
12. Шориков А.Ф. Алгоритм решения задачи оптимального терминального управления в линейных дискретных динамических системах // Сб. научных трудов «Информационные технологии в экономике: теория, модели и методы». Екатеринбург: Уральский государственный экономический университет, 2005. С. 119-138.
13. Шориков А.Ф., Тюлюкин В.А. Описание библиотеки компьютерных программ для моделирования решения задачи апостериорного минимаксного оценивания // Известия Уральского государственного экономического университета. 1999. № 2. С. 36-49.
14. Горанов А.Ю., Шориков А.Ф. Модифицированный рекуррентный метод построения областей достижимости линейной дискретной системы // Сб. трудов Шестой Международной научной конференции «Информационные технологии и системы» (01-05 марта 2017 г., Банное). Челябинск: Челябинский государственный университет, 2017. С. 87-92.
15. Черников С.Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.

## **ALGORITHM FOR SOLVING OPTIMAL OPEN-LOOP TERMINAL CONTROL PROBLEM FOR SPACECRAFT RENDEZVOUS WITH ACCOUNT OF CONSTRAINTS ON THE STATE**

© 2021

- |                       |  |
|-----------------------|--|
| <b>A. F. Shorikov</b> | Doctor of Science (Phys. & Math.), Professor;<br>N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch<br>of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS),<br>Yekaterinburg, Russian Federation;<br><a href="mailto:afshorikov@mail.ru">afshorikov@mail.ru</a>   |
| <b>A. Yu. Goranov</b> | Assistant Lecturer;<br>Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin,<br>Yekaterinburg, Russian Federation;<br><br>Design Engineer;<br>Scientific and Production Association of Automatics named after Academician<br>N.A. Semikhatov, Yekaterinburg, Russian Federation;<br><br><a href="mailto:goranovayu@mail.ru">goranovayu@mail.ru</a> |

The paper proposes an algorithm for solving the optimal open-loop terminal control problem of two spacecraft rendezvous with constraints on their states. A system of nonlinear differential equations that describes the dynamics of the active (maneuvering) spacecraft relative to the passive spacecraft (station) in the central gravitational field of the Earth in the orbital coordinate system of coordinates related to the passive spacecraft center-of-mass is considered as an initial model. The obtained

nonlinear model of the active spacecraft dynamics is linearized relative to the specified reference state trajectory of the passive spacecraft, and then it is discretized and reduced to linear recurrence relations. Mathematical formalization of the spacecraft rendezvous problem under consideration is carried out at a specified final moment of time for the obtained discrete-time controlled dynamical system. The quality of solving the problem is estimated by a convex functional taking into account the geometric constraints on the active spacecraft states and the associated control actions in the form of convex polyhedral-compacta in the appropriate finite dimensional vector space. We propose a solution of the problem of optimal terminal control over the approach of the active spacecraft relative to the passive spacecraft in the form of a constructive algorithm on the basis of the general recursive algebraic method for constructing the availability domains of linear discrete controlled dynamic systems, taking into account specified conditions and constraints, as well as using the methods of direct and inverse constructions. In the final part of the paper, the computer modeling results are presented and conclusions about the effectiveness of the proposed algorithm are made.

*Optimal control; open-loop control; terminal control; spacecraft rendezvous; availability domains*

---

*Citation:* Shorikov A.F., Goranov A.Yu. Algorithm for solving optimal open-loop terminal control problem for spacecraft rendezvous with account of constraints on the state. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2021. V. 20, no. 1. P. 46-64. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-1-46-64

## References

1. Appazov R.F., Sytin O.G. *Metody proektirovaniya traektoriy nositeley i sputnikov Zemli* [Methods of designing trajectories of launch vehicles and Earth satellites]. Moscow: Nauka Publ., 1987. 440 p.
2. Ermilov Yu.A., Ivanova E.E., Pantyushin S.V. *Upravlenie sblizheniem kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft rendezvous control]. Moscow: Nauka Publ., 1977. 448 p.
3. Ivanov N.M., Lysenko L.N., Martynov A.I. *Metody teorii sistem v zadachakh upravleniya kosmicheskim apparatom* [Systems theory method in spacecraft control problems]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1981. 255 p.
4. Lebedev A.A., Sokolov V.B. *Vstrecha na orbite* [Orbital rendezvous]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1969. 67 p.
5. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion control theory]. Moscow: Nauka Publ., 1968. 476 p.
6. Krasovskiy N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizheniy* [Game-theory problems of space traffic rendezvous]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 420 p.
7. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional differential games]. Moscow: Nauka Publ., 1974. 456 p.
8. Chernous'ko F.L., Melikyan A.A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* [Game-theory problems of control and search]. Moscow: Nauka Publ., 1978. 270 p.
9. Tyulyukin V.A., Shorikov A.F. Algorithm for solving terminal control-problems for a linear discrete system. *Automation and Remote Control*. 1993. V. 54, no. 4. P. 632-643.
10. Tyulyukin V.A., Shorikov A.F. Ob odnom algoritme postroeniya oblasti dostizhimosti lineynoy upravlyaemoy sistemy. *V sb.: «Negladkie Zadachi Optimizatsii i Upravlenie»*. Sverdlovsk: UrO AN SSSR Publ., 1988. P. 55-61. (In Russ.)
11. Shorikov A.F. *Minimaksnoe otsenivanie i upravleni v diskretnykh dinamicheskikh sistemakh* [Minimax estimation and control in discrete dynamical systems]. Ekaterinburg: Ural University Publ., 1997. 242 p.
12. Shorikov A.F. Algoritim resheniya zadachi optimal'nogo terminal'nogo upravleniya v lineynykh diskretnykh dinamicheskikh sistemakh. *Sb. nauchnykh trudov «Informatsionnye tekhnologii v ekonomike: teoriya, modeli i metody»*. Yekaterinburg: Ural State University of Economics Publ, 2005. P. 119-138. (In Russ.)
13. Shorikov A.F., Tyulyukin V.A. Description of the package of computer subroutines for simulation of solving the problem of a posteriori minimax estimation. *Izvestiya Ural'skogo*

*Gosudarstvennogo Ekonomicheskogo Universiteta*. 1999. No. 2 P. 36-49. (In Russ.)

14. Goranov A.Y., Shorikov A.F. Modified general recursion algebraic method of the linear control systems reachable sets computation. *Sb. trudov Shestoy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Informatsionnye tekhnologii i sistemy» (01-05 marta 2017 g., Bannoe)*. Chelyabinsk: Chelyabinsk State University Publ., 2017. P. 87-92. (In Russ.)

15. Chernikov S.N. *Lineynye neravenstva* [Linear inequalities]. Moscow: Nauka Publ., 1968. 488 p.