

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС СПУСКАЕМОГО АППАРАТА С ТРИГАРМОНИЧЕСКОЙ МОМЕНТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ПРИ ВХОДЕ В АТМОСФЕРУ

© 2010 Е. В. Барина, И. А. Тимбай

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Рассматривается плоское движение вокруг центра масс неуправляемого спускаемого аппарата, аэродинамический восстанавливающий момент которого описывается нечётным рядом Фурье по углу атаки с тремя первыми гармониками. Построена номограмма для определения числа и типа особых точек фазового портрета системы в зависимости от соотношения коэффициентов, стоящих при гармониках разложения. Найдены аналитические формулы для интеграла действия, взятого вдоль сепаратрис, выраженные через элементарные функции и эллиптические интегралы первого и второго рода. Определены моменты перехода между различными областями фазовой плоскости. Для случаев движения, когда при пересечении сепаратрисы фазовая точка может попадать в различные колебательные области, найдены формулы для определения вероятности захвата в ту или иную область.

Спускаемый аппарат, аэродинамический восстанавливающий момент, фазовый портрет, сепаратриса, интеграл действия, вероятность.

Рассматривается плоское движение неуправляемого осесимметричного спускаемого аппарата (СА) относительно центра масс на начальном участке траектории спуска в атмосферу, когда можно пренебречь изменением скорости центра масс и угла наклона траектории, а также гравитационным моментом и аэродинамическим демпфированием. Исследуются случаи, когда в процессе спуска происходит изменение характера движения: вращательное движение переходит в колебательное, колебательное движение «скачкообразно» переходит в колебательное движение с другими амплитудными характеристиками. В [1 - 3] рассмотрены переходные режимы движения СА с синусоидальной и бигармонической моментными характеристиками. В данной работе рассматривается движение СА с зависимостью восстанавливающего момента от угла атаки, имеющей вид тригармонического ряда. Такая зависимость характерна для аппаратов сложной геометрической формы, например, типа «Викинг» [4].

Наряду с тем, как наличие второй гармоники в моментной характеристике обуславливает возможность появления одного дополнительного положения равновесия СА по углу атаки по сравнению со случаем си-

нусоидальной зависимости, добавление третьей гармоники в моментной характеристике может приводить к появлению двух дополнительных положений равновесия, что значительно разнообразит переходные режимы движения СА.

Плоское движение спускаемого аппарата с тригармонической моментной характеристикой относительно центра масс при указанных выше допущениях описывается следующим уравнением [2]:

$$\ddot{\alpha} + a(z) \sin \alpha + b(z) \sin 2\alpha + c(z) \sin 3\alpha = 0, \quad (1)$$

где α - угол атаки; $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ - коэффициенты моментной характеристики; z - медленно меняющийся параметр, переменность которого связана с медленным изменением плотности атмосферы в процессе спуска.

Коэффициенты уравнения движения (1), если зависимость плотности атмосферы от высоты аппроксимировать экспонентой, могут быть представлены в виде [3]:

$$a = a_0 z, \quad b = b_0 z, \quad c = c_0 z,$$

$$a_0 = -m_a S l \rho_0 \frac{V_0^2}{2A}, \quad b_0 = -m_b S l \rho_0 \frac{V_0^2}{2A},$$

$$c_0 = -m_c S l \rho_0 \frac{V_0^2}{2A}, \quad z = e^{\beta(t-t_0)}, \quad \beta = \lambda V_0 |\sin \theta_0|,$$

где m_a, m_b, m_c - постоянные коэффициенты, S - характерная площадь, l - характерный размер, A - поперечный момент инерции СА, V_0 - скорость, θ_0 - угол наклона траектории, ρ_0 - плотность атмосферы в начальный момент времени $t = t_0$, λ - логарифмический градиент плотности атмосферы по высоте.

Для выяснения общих свойств движения СА, описываемого системой (1), воспользуемся методом фазовой плоскости. Интеграл энергии системы в случае невозмущенного движения, когда коэффициенты a, b, c постоянны ($z = const$), имеет вид:

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} - f(\alpha) = h,$$

$$f(\alpha) = (a-c) \cos \alpha + b \cos^2 \alpha + \frac{4}{3} c \cos^3 \alpha. \quad (2)$$

Экстремальные значения функции $f(\alpha)$ соответствуют состояниям равновесия уравнения (1), т.е. особым точкам на фазовой плоскости. Из (2) следует, что в зависимости от значения коэффициентов a, b, c могут существовать две, три или четыре особые точки на отрезке $[0, \pi]$:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi, \quad \cos \alpha_3 = \frac{-b-m}{4c}, \quad \cos \alpha_4 = \frac{-b+m}{4c}, \quad (3)$$

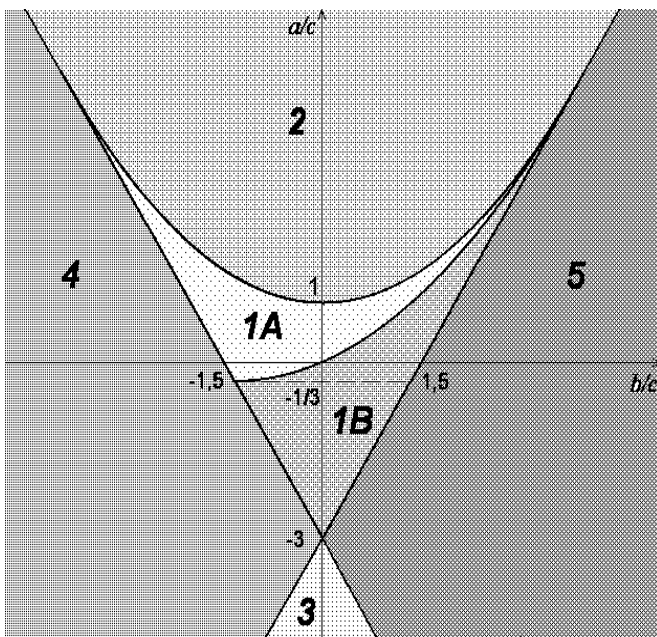
где $m = \sqrt{b^2 - 4ac + c^2}$.

На рис. 1 изображена номограмма для определения области, к которой относятся коэффициенты моментной характеристики СА, и таблица для определения числа и характера особых точек на фазовой плоскости системы. Номограмма разделена на пять областей следующими границами:

$$\frac{a}{c} = \frac{2b}{c} - 3,$$

$$\frac{a}{c} = -\frac{2b}{c} - 3, \quad \frac{a}{c} = \frac{b^2}{4c^2} + 1.$$

В таблице в зависимости от знака коэффициента c и номера области показано, какие положения равно-



№ области	$\alpha_1 = 0$	α_3	α_4	$\alpha_2 = \pi$
$c < 0$				
1A, 1B	Седло	Центр	Седло	Центр
2	Седло	-	-	Центр
3	Центр	-	-	Седло
4	Центр	-	Седло	Центр
5	Седло	Центр	-	Седло
$c > 0$				
1A, 1B	Центр	Центр	Седло	Седло
2	Центр	-	-	Седло
3	Седло	-	-	Центр
4	Седло	Центр	-	Седло
5	Центр	-	Седло	Центр

Рис. 1. Номограмма и таблица для определения числа и типа особых точек фазового портрета

весия являются устойчивыми («центр»), а какие неустойчивыми («седло»). В областях 2 и 3 имеются две особые точки на фазовом портрете системы: 0 и π – этот случай аналогичен случаю физического маятника. В областях 4 и 5 имеются три особые точки на отрезке $[0, \pi]$ – случай аналогичен случаю бигармонической зависимости моментной характеристики. В областях 1А и 1В имеются четыре особые точки: две точки типа «центр» и две типа «седло».

В связи с изменением коэффициентов $a(z), b(z), c(z)$ в процессе движения происходит эволюция фазовых траекторий, в результате которой они могут пересекать сепаратрисы, попадая в различные области фазового портрета, что сопровождается качественным изменением характера движения.

Для описания движения системы с медленно меняющимися параметрами (1) будем использовать интеграл действия, записанный в форме

$$I = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \dot{\alpha} d\alpha, \quad (4)$$

где α_{\min} и α_{\max} – соответственно минимальное и максимальное значения амплитуды угла атаки (при вращении $\alpha_{\min} = -\pi$ и $\alpha_{\max} = \pi$), величина $\dot{\alpha}$ определяется из (2).

Для системы (1) равенство $I = const$ справедливо для большинства начальных условий с точностью $O(\varepsilon \ln \varepsilon)$ на временах порядка $1/\varepsilon$ [5], где ε – малый параметр, характеризующий скорость изменения параметра z . Исключительное множество начальных условий, для которых эта оценка не справедлива, имеют меру $O(\varepsilon^n)$, где $n \geq 1$ – любое наперёд заданное число. Режимы движения, соответствующие данным начальным условиям, называются режимами зависания СА в окрестности неустойчивого равновесия. Эти режимы подробно исследованы в [2].

В основу анализа движения системы положены аналитические выражения для интеграла действия (4). Моменты времени,

соответствующие переходам между различными областями фазового портрета, определяются из равенства выражения интеграла действия, вычисленного вдоль сепаратрисы, значению интеграла действия, вычисленного по начальным условиям движения.

Величина угла атаки на границе перехода от одного типа движения к другому в общем случае зависит от начальных условий углового движения (от законов распределения начальных углов атаки и угловых скоростей), а также от скорости изменения коэффициентов $a(z), b(z), c(z)$. Полагается, что СА за время движения от $t = 0$ до границы перехода совершено несколько оборотов или колебаний.

В случаях, когда при пересечении сепаратрис фазовая точка может попадать в различные колебательные области, возникает задача выбора области продолжения движения. Пусть сепаратрисы l_1, l_2 отделяют внутренние области движения A_1, A_2 от внешней A_3 . Для выбора области продолжения движения A_1 или A_2 используется понятие вероятности P_1 или P_2 захвата в каждую из них. В соответствии с [6] эта вероятность определяется как доля фазового объёма малой окрестности начальной точки движения, «захватываемая» в рассматриваемую область в пределе, когда малый параметр $\varepsilon \rightarrow 0$ и размер окрестности $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \ll \delta$, причём $P_1 + P_2 = 1$. Отношение вероятностей вычисляется по формулам:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}, \quad (5)$$

$$\Theta_i = - \int_{l_i} \frac{\partial [H(\dot{\alpha}, \alpha, z) - H(0, \alpha_4, z)]}{\partial z} \Phi_z dt, \quad (6)$$

$$i = \overline{1, 2},$$

где $H = \frac{\dot{\alpha}^2}{2} - (a-c)\cos\alpha - b\cos^2\alpha - \frac{4}{3}c\cos^3\alpha$ – гамильтониан; $\Phi_z = \dot{z} = \beta z$; $\dot{\alpha} = 0$, $\alpha = \alpha_4$ –

координаты седловой особой точки на фазовом портрете. Интегралы (6) вычисляются вдоль сепаратрис l_1 и l_2 , параметризованных временем t невозмущённого движения по ним. Физический смысл функции Θ_i – скорость приближения площади, ометаемой фазовой траекторией, к площади, ограниченной сепаратрисой.

Следует отметить, что поскольку рассматривается начальный участок траектории спуска, для которого скорость изменения медленно меняющегося параметра $\dot{z} = \beta t > 0$, то будут иметь место только однократные проходы фазовой точки через сепаратрисы из внешних областей во внутренние.

Рассмотрим СА, для которых положение $\alpha_1 = 0$ является устойчивым. Поэтому в дальнейшем будем исследовать только те области, в которых $\alpha_1 = 0$ является центром. Это области 3 и 4 при $c < 0$ и области 1, 2, 5 при $c > 0$ (рис. 1).

Исследуем области 1А, 1В. Они отличаются по количеству особых точек от случаев, когда на СА действует синусоидальный или бигармонический восстанавливающий момент. В области 1А внешняя сепаратриса проходит через $\alpha_2 = \pi$, в области 1В – че-

рез $\alpha_4 = \arccos \frac{-b+m}{4c}$. На границе областей

$$1А \text{ и } 1В \left(\frac{a}{c} = \frac{3b^2}{16c^2} + \frac{b}{2c} \right) \text{ эти сепаратрисы}$$

сливаются. На фазовом портрете, соответствующем области 1А (рис. 2а), имеются пять областей движения: вращательная, внешняя колебательная, в которой содержатся три внутренних колебательных области. В области 1В (рис. 2б) также имеются пять областей движения: вращательная, две внешних колебательных, и в одной из внешних содержатся две внутренних. На границе областей на фазовом портрете имеются четыре области движения: вращательная и три колебательных.

Вычислим необходимые интегралы: I_1 , I_2 – интегралы действия, взятые соответственно вдоль сепаратрис l_1, l_2 , проходящих через седловую точку $\alpha = \alpha_4$; I_3 – интеграл действия, взятый вдоль сепаратрисы l_3 , проходящей через седловую точку $\alpha = \pi$.

Введём дополнительные коэффициенты:

$$f = \sqrt{16c^2 + 48ac},$$

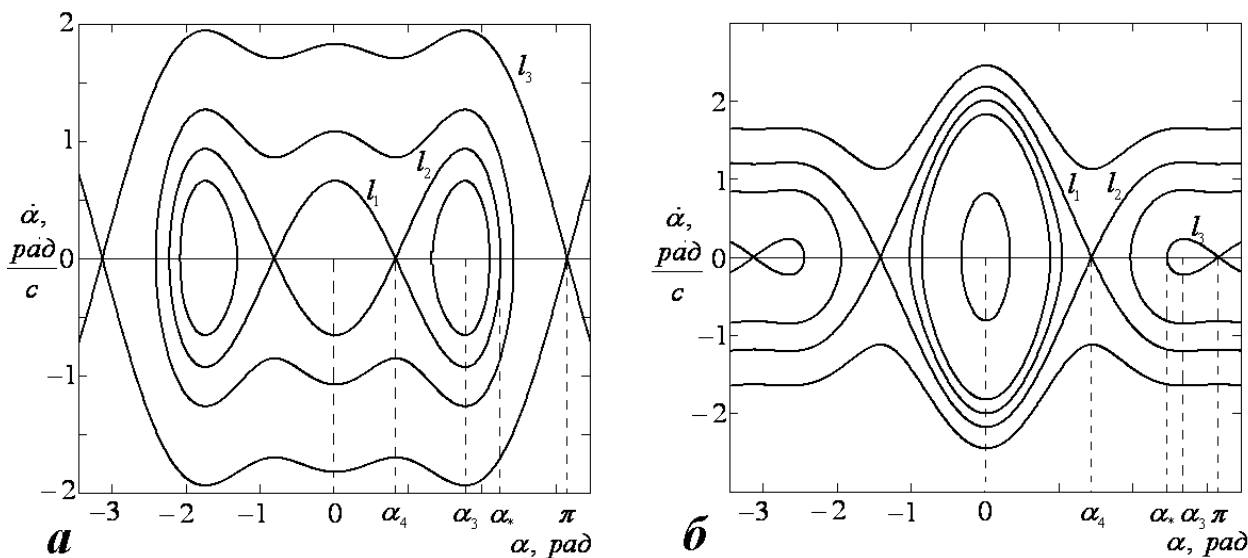


Рис. 2. Фазовые портреты: а) область 1А; б) область 1В

$$d^{A,B} = \sqrt{\mp 9b^2 \mp 24bc \pm 48ac}. \quad (7)$$

Интегралы действия для области 1А, имеют вид:

$$I_1 = \int_{-\alpha_4}^{\alpha_4} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 (F(\varphi_1, k_1) - K(k_1)) + 2q_3 (E(\varphi_1, k_1) - E(k_1)), \quad (8)$$

$$I_2 = \int_{\alpha_4}^{\alpha_*} \dot{\alpha} d\alpha = q_1 + q_2 F(\varphi_1, k_1) + q_3 E(\varphi_1, k_1), \quad (9)$$

где $\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{24mc}{(4c+b+2m)(4c-b+m)}}$,

$$k_1 = \sqrt{\frac{4c+b+2m}{8c}}, \quad \cos \alpha_* = \frac{-b-2m}{4c},$$

$$q_1 = \frac{(4c+3b)\sqrt{2m(4c-m+b)}}{6c\sqrt{(4c-b+m)}},$$

$$q_2 = -\frac{16c^2 + 3b^2 - 6m^2 - 16bc + 4mc + 3bm}{12c\sqrt{3c}},$$

$$q_3 = -\frac{8b-2m}{3\sqrt{3c}};$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\alpha} d\alpha = \frac{8(f+8c-6b)\sqrt{9c-6b+3a}}{3\sqrt{3}(f+16c)} + \frac{\sqrt{f}(3b+4c)}{3\sqrt{3c}} E(\varphi_3, k_3) + \frac{\sqrt{f}(f-4c-3b)}{6\sqrt{3c}} F(\varphi_3, k_3), \quad (10)$$

где $\varphi_3 = 2 \arctg \sqrt{\frac{16c}{f}}$, $k_3 = \sqrt{\frac{f+3b+4c}{2f}}$.

Интегралы действия для области 1В имеют вид:

$$I_1 = \int_{-\alpha_4}^{\alpha_4} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 (F(\varphi_1, k_1) - K(k_1)) + 2q_3 (E(\varphi_1, k_1) - E(k_1)), \quad (11)$$

$$I_2 = \int_{\alpha_4}^{\pi+\alpha_4} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 F(\varphi_1, k_1) + 2q_3 E(\varphi_1, k_1), \quad (12)$$

где $\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{(4c+b+2m)(4c-b+m)}{24mc}}$,

$$k_1 = \sqrt{\frac{8c}{4c+b+2m}},$$

$$q_1 = \frac{(m+2b)\sqrt{2(4c-m+b)(m+4c-b)}}{9c\sqrt{m}},$$

$$q_2 = \frac{\sqrt{b+2m+4c}(b+2m-4c)}{3\sqrt{6c}},$$

$$q_3 = -\frac{(4b-m)\sqrt{b+2m+4c}}{3\sqrt{6c}};$$

$$I_3 = \int_{\alpha_*}^{\pi} \dot{\alpha} d\alpha = \frac{(4c-3b)\sqrt{3c-2b+a}}{6c} + \frac{\sqrt{4c+3b+d}(4c+3b)}{6c\sqrt{3}} (E(k_3) - E(\varphi_3, k_3)) + \frac{-d\sqrt{(4c+3b+d)}}{6c\sqrt{3}} (K(k_3) - F(\varphi_3, k_3)),$$

при $a > -\frac{c}{3}$,

где $\varphi_3 = \arcsin \sqrt{\frac{4c+3b+d}{16c}}$,

$$k_3 = \sqrt{\frac{4c+3b-d}{4c+3b+d}}, \quad \cos \alpha_* = \frac{-3b+4c+d}{8c};$$

$$I_3 = \int_{\alpha_*}^{\pi} \dot{\alpha} d\alpha = \frac{\sqrt{(12c-3b-d)(4c-9b+d)}}{3\sqrt{3c(12c-3b+d)}} + \frac{\sqrt{2d}(3b+4c)}{6c\sqrt{3}}(E(k_3) - E(\varphi_3, k_3)) - \frac{\sqrt{2d}(3b+4c+d)}{12c\sqrt{3}}(K(k_3) - F(\varphi_3, k_3)),$$

при $a < -\frac{c}{3}$,

(14)

где $\varphi_3 = \arcsin \sqrt{\frac{2d}{d-3b+12c}}$,

$$k_3 = \sqrt{\frac{d-3b-4c}{2d}}, \quad \cos \alpha_* = \frac{-3b+4c-d}{8c};$$

$$I_3 = \int_{\alpha_*}^{\pi} \dot{\alpha} d\alpha = \frac{(4c-3b)^{\frac{3}{2}}}{3c\sqrt{6}}, \quad \text{при } a = -\frac{c}{3},$$

(15)

где $\cos \alpha_* = \frac{-3b}{4c}$.

Пусть начальные условия соответствуют вращательному движению СА. Из (8) – (15), учитывая постоянство интеграла действия, можно определить значение коэффициента c в момент перехода из одной области движения в другую через начальные условия. Тогда, учитывая, что

$$c = c_0 \exp(\beta(t-t_0))$$

и полагая $t_0 = 0$, время t_1 перехода из вращения в колебание и время t_2 перехода из внешней колебательной области во внутреннюю определяются по формулам (индексами A и B вверху обозначены области 1А и 1В соответственно):

$$t_1^A = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_3}, \quad t_2^A = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_1 + 2I_2},$$

$$t_1^B = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_1 + I_2}, \quad t_2^B = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0 - I_1}{2I_3}, \quad (16)$$

где интегралы I_1, I_2, I_3 вычисляются по формулам (8) – (15) при

$$a = a_0, \quad b = b_0, \quad c = c_0;$$

значение интеграла действия I_0 определяется по начальным условиям и в общем случае вычисляется по формуле (4). В случае, когда коэффициенты a_0, b_0, c_0 малы по сравнению с угловой скоростью в начальный момент времени, интеграл действия I_0 можно вычислить по формуле: $I_0 = 2\pi\dot{\alpha}_0$.

Пусть начальные условия соответствуют движению во внешней колебательной области. Тогда формула для вычисления времени перехода t_2 из внешней колебательной области во внутреннюю имеет вид:

$$t_2^A = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_1 + 2I_2}, \quad t_2^B = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0}{2I_3}.$$

Вероятности попадания в колебания относительно различных положений равновесия ($\alpha = 0, \alpha = \pm\alpha_3, \alpha = \pi$) с учётом (5), (6) вычисляются следующим образом:

$$P_0^A = \frac{I_1}{I_1 + 2I_2}, \quad P_{\pm\alpha_3}^A = \frac{I_2}{I_1 + 2I_2}, \quad P_0^B = \frac{I_1}{I_1 + I_2},$$

$$P_{\pi}^B = \frac{I_2}{I_1 + I_2}, \quad P_{\pm\alpha_3}^B = \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Исследуем области 2 и 5 (рис. 3). На фазовом портрете, соответствующем области 2 (рис. 3а), имеются две области движения: вращательная и колебательная. На фазовом портрете, соответствующем области 5 (рис. 3б), имеются три области движения: вращательная и две колебательные.

В области 2 имеется только одна сепаратриса, проходящая через $\alpha = \pi$. Выражение для интеграла действия совпадает с выражением (10) для I_3 в области 1А. Задача

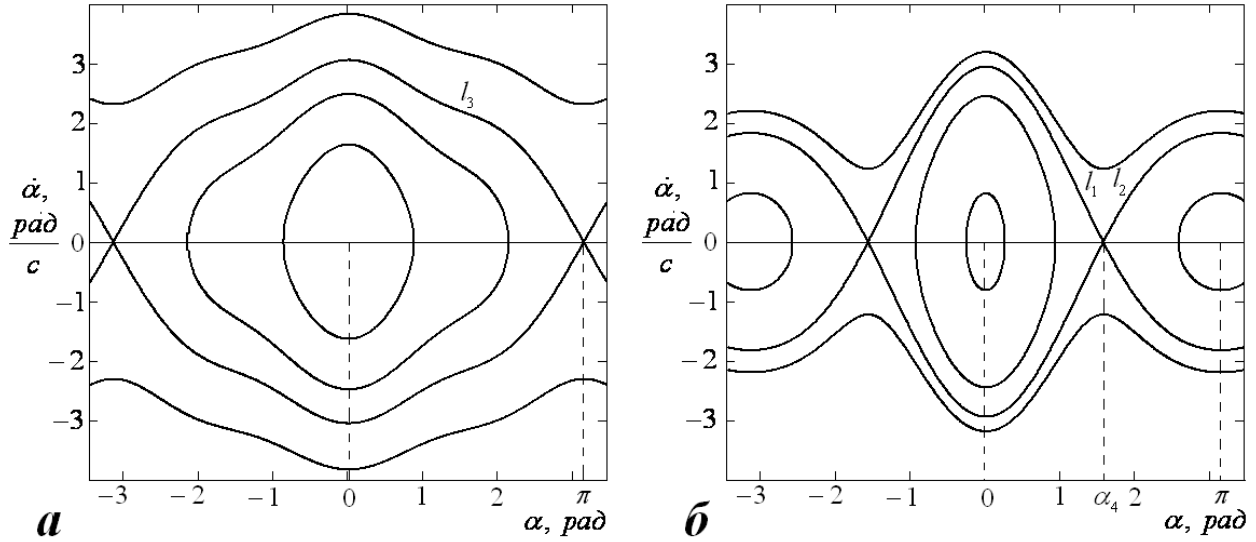


Рис. 3. Фазовые портреты: а) область 2; б) область 5

выбора области продолжения движения не возникает, а время перехода из вращения в колебание можно определить по формуле

$$t = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_3}. \quad (18)$$

В области 5 имеется одна сепаратриса, проходящая через $\alpha = \alpha_4$. Выражения для интегралов действия совпадают с выражениями (11), (12) для I_1 и I_2 в области 1В. Время перехода из вращения в колебание и вероятности попадания в колебания относительно $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ можно определить по формулам

$$t = \frac{2}{\beta} \ln \frac{I_0}{I_1 + I_2}, \quad P_0 = \frac{I_1}{I_1 + I_2},$$

$$P_\pi = \frac{I_2}{I_1 + I_2}. \quad (19)$$

Исследуем области 3 и 4 (рис. 4). На фазовом портрете, соответствующем области 3 (рис. 4а), имеются две области движения: вращательная и колебательная. На фазовом портрете, соответствующем области 4 (рис. 4б), имеются три области движения: вращательная и две колебательные.

В области 3 имеется одна сепаратриса, проходящая через $\alpha = \pi$. Выражение для интеграла действия имеет следующий вид:

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\alpha} d\alpha = \frac{8\sqrt{3c-2b+a}}{3} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2d}(3b+4c)}{3\sqrt{3c}} (E(k_3) - E(\varphi_3, k_3)) -$$

$$- \frac{\sqrt{2d}(4c+3b+d)}{6\sqrt{3c}} (K(k_3) - F(\varphi_3, k_3)), \quad (20)$$

где $\varphi_3 = \arcsin \sqrt{\frac{12c-3b+d}{-4c-3b+d}},$

$$k_3 = \sqrt{\frac{d-3b-4c}{2d}}.$$

Задача выбора области продолжения движения не возникает, а время перехода из вращения в колебание можно определить аналогично области 2 по формуле (18).

В области 4 имеется одна сепаратриса, проходящая через $\alpha = \alpha_4$. Выражения для интегралов действия I_1, I_2 , взятых вдоль сепаратрис l_1 и l_2 , вычисляются по следующим формулам:

$$I_1 = \int_{-\alpha_4}^{\alpha_4} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 (F(\varphi_1, k_1) - K(k_1)) +$$

$$+ 2q_3 (E(\varphi_1, k_1) - E(k_1)), \quad (21)$$

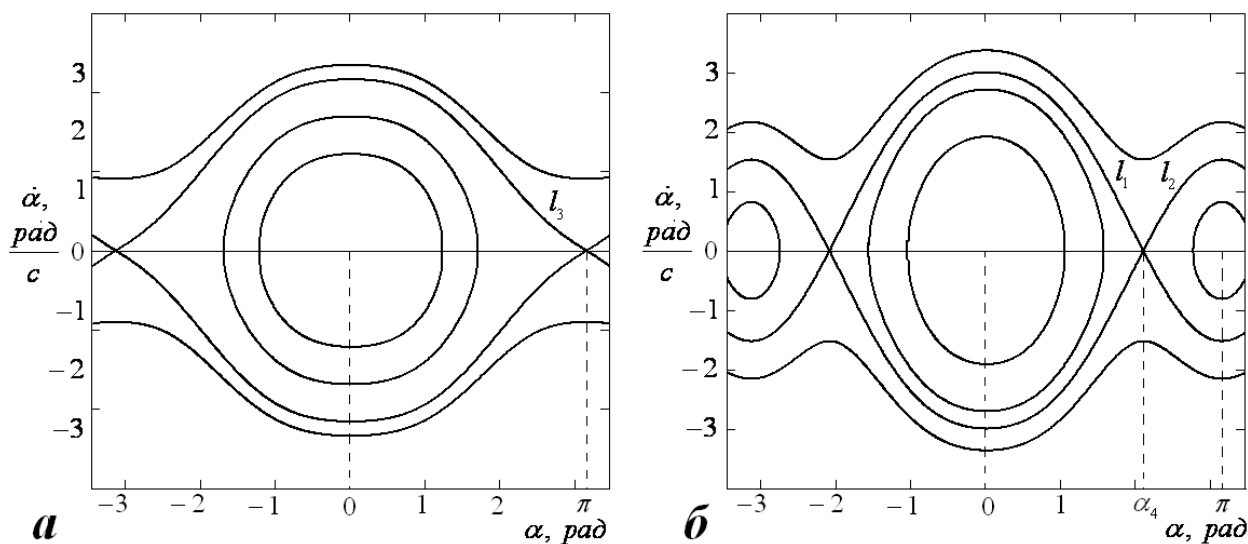


Рис. 4. Фазовые портреты: а) область 3; б) область 4

$$I_2 = \int_{\alpha_4}^{\pi+\alpha_4} \dot{\alpha} d\alpha = 2q_1 + 2q_2 F(\varphi_1, k_1) + 2q_3 E(\varphi_1, k_1), \tag{22}$$

где $\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{m-b+4c}{8c}}$,

$$k_1 = \sqrt{\frac{8c}{4c-b-2m}},$$

$$q_1 = \frac{-\sqrt{2m(4c-m+b)(4c-b+m)}}{6c},$$

$$q_2 = \frac{\sqrt{2}(16ac-5b^2-4bm)}{6c\sqrt{3(b+2m-4c)}},$$

$$q_3 = \frac{(4b-m)\sqrt{2(b+2m-4c)}}{6\sqrt{3}c}.$$

Время перехода из вращения в колебание и вероятности попадания в колебания относительно $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ можно определить аналогично области 5 по (19).

Для иллюстрации переходных режимов движения на рис. 5 показан характер изменения плоского движения СА для следующих начальных данных:

$$a_0 = 0,05 c^{-2}, \quad b_0 = -0,1 c^{-2}, \quad c_0 = 0,1 c^{-2},$$

$$\alpha_0 = 1,5 \text{ рад}, \quad \dot{\alpha}_0 = 0,8 \text{ рад/с}, \quad \beta = 0,03 c^{-1}$$

СА, совершив три полных оборота (6π), в некоторый момент времени t_1 начинает совершать колебательные движения относительно устойчивого положения равновесия $\alpha = 0$, охватывая при этом два неустойчивых положения равновесия $\pm\alpha_4 = \pm 0,819$ и два устойчивых положения равновесия $\pm\alpha_3 = \pm 1,755$. Затем СА в следующий момент времени t_2 начинает совершать колебания относительно устойчивого положения равновесия $-\alpha_3 = -1,755$. Аэродинамические характеристики СА относятся к области 1А ($\frac{a_0}{c_0} = 0,5$, $\frac{b_0}{c_0} = -1$, рис. 1),

фазовый портрет аналогичен приведённому на рис. 2а. Следовательно, вычисления интегралов действия необходимо производить по формулам (8) – (10), а времён перехода и вероятности попадания в колебания относительно различных положений равновесия ($\alpha = 0$, $\alpha = \pm\alpha_3$) – по формулам (16), (17) с индексом А. В результате расчётов:

$$t_1 = 26,576 c, \quad t_2 = 118,661 c, \quad P_0 = 0,282,$$

$$P_{\alpha_3} = 0,359, \quad P_{-\alpha_3} = 0,359.$$

Как видно из рис. 5, результаты численного интегрирования уравнения (1) для вре-

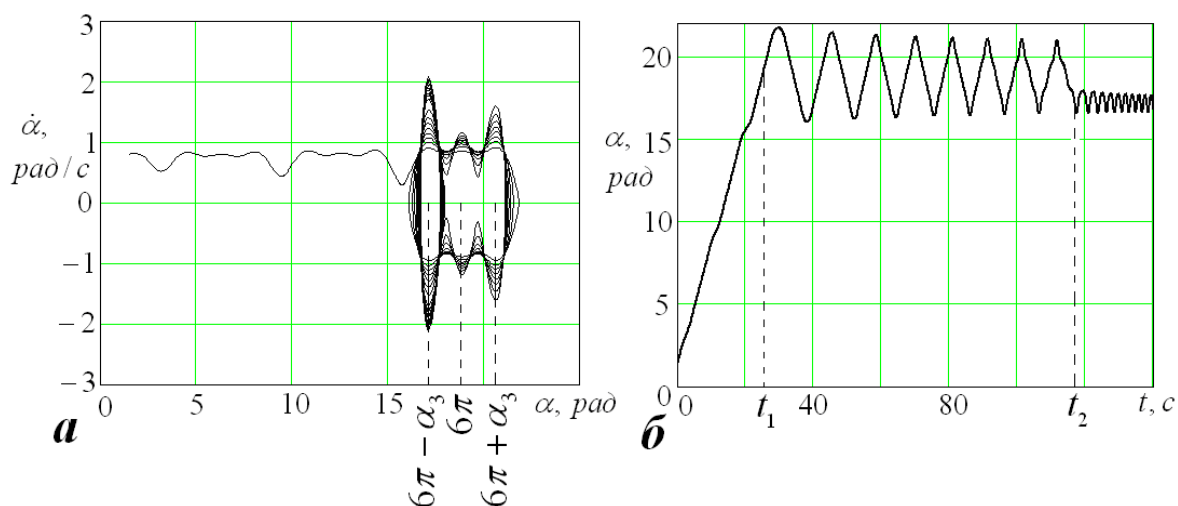


Рис. 5. Характер изменения углового движения СА
а) фазовая траектория; б) зависимость угла атаки от времени

мён перехода с точностью до периода колебаний совпадают со значениями, полученными по аналитическим выражениям.

В [2] рассмотрено плоское движение неуправляемого тела со следующей моментной характеристикой:

$$m(\alpha) = 0,694 \sin \alpha + 0,342 \sin 2\alpha - 0,126 \sin 3\alpha.$$

Коэффициенты, стоящие при гармониках разложения, соответствуют случаю об-

ласти 4 ($\frac{a_0}{c_0} = -5,508$ $\frac{b_0}{c_0} = -2,714$, рис. 1),

фазовый портрет аналогичен приведённому на рис. 4б. Вычисляется вероятность попадания в колебания относительно устойчивого положения равновесия $\alpha = \pi$ путём расчёта по интегральным формулам, а также многократным численным интегрированием дифференциального уравнения (1). Получено значение вероятности $P_\pi = 0,05$. Расчёт, проведённый по формулам (19), (21), (22), дал такой же результат.

Полученные в данной работе формулы позволяют определить времена перехода от одного типа движения к другому, не прибегая к численному интегрированию, а также определить вероятности попадания в ту или иную колебательную область, не проводя статистических расчётов для СА с тригармонической моментной характеристикой.

Библиографический список

1. Кузмак Г. Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу [Текст]/Г. Е. Кузмак – М.: Наука, 1970.
2. Ярошевский В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере [Текст]/В. А. Ярошевский – М.: Машиностроение, 1978.
3. Асланов В. С., Тимбай И. А. Переходные режимы углового движения КА на верхнем участке траектории спуска [Текст]/В. С. Асланов, И. А. Тимбай// Космические исследования. - 2001. - Т. 35. - № 3. - С. 279 – 286.
4. Асланов В. С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. [Текст]/ В. С. Асланов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
5. Нейштадт А. И. Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису [Текст]/А. И. Нейштадт//Физика плазмы. - 1986. - Т.12. - Вып. 8. - С. 992.
6. Лифшиц И. М., Слущкин А. А., Набутовский В. М. Об особенностях движения заряженных частиц в переменном и неоднородном электромагнитном поле [Текст]/И. М. Лифшиц, А. А. Слущкин, В. М. Набутовский// Журн. эксперим. и теорет. физики. - 1961. - Т. 41. - Вып. 3. - С. 939.

References

1. Kuzmak, G. Ye. Dynamics of spacecraft uncontrolled motion during reentry into the atmosphere / G. Ye. Kuzmak – Moscow: Nauka, 1970.
2. Yaroshevsky, V. A. Motion of uncontrolled bodies in the atmosphere / V. A. Yaroshevsky – Moscow: Mashinostroyeniye, 1978.
3. Aslanov, V. S., Timbay I. A., Transient modes of spacecraft angular motion at the upper section of the reentry trajectory / V. S. Aslanov, I. A. Timbay // Kosmicheskiye Issledovaniya (Space Research) 2001. Vol. 35 No. 3, pp. 279 – 286.
4. Aslanov, V. S. Spatial motion of a body during its reentry into the atmosphere / V. S. Aslanov – Moscow: Physmatlit, 2004.
5. Neuschadt, A. I. Variation of Adiabatic Invariant during the crossing of a separatrix / A. I. Neuschadt // Physica Plasmy (Plasma Physics), 1986. Vol.12. Issue 8. p. 992.
6. Lifshits, I. M., Slutskin A. A., Nabutovsky V. M. Peculiarities of charged particle motion in an alternative inhomogeneous electromagnetic field / I. M. Lifshits, A. A. Slutskin, V. M. Nabutovsky // Journal of experimental and theoretical physics. 1961. Vol. 41, Issue 3. p. 939.

ANALYSIS OF PLANE MOTION RELATIVE TO THE CENTRE OF MASS OF A DESCENT CAPSULE WITH THE THREE-HARMONIC MOMENT CHARACTERISTICS DURING ITS REENTRY

© 2010 Ye. V. Barinova, I. A. Timbay

Samara State Aerospace University
named after academician S. P. Korolyov (National Research University)

The paper analyses plane motion of an uncontrolled descent capsule about its centre of mass. The aerodynamic stabilizing moment of the spacecraft by an odd Fourier series by the angle of attack with the first three harmonics. A nomogram for determining the type and number of singular points of the system phase portrait has been constructed depending on the relation of coefficients at decomposition harmonics. Analytical formulae for the action integral taken along the separatrix, expressed through elementary functions and elliptical integrals of the first and second kind have been established. The moments of transition between various areas of the phase plane have been determined. Formulae for assessing the possibility of capture into one region or another have been established for the cases of motion when the phase point may fall into various oscillation regions when crossing the separatrix.

Descent capsule, aerodynamic stabilizing moment, phase portrait, separatrix, action integral, probability.

Информация об авторах

Баринова Елена Витальевна, аспирант кафедры высшей математики Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). Область научных интересов: динамика летательных аппаратов. E-mail: 15545@yandex.ru.

Тимбай Иван Александрович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). Область научных интересов: динамика летательных аппаратов. E-mail: timbai@ssau.ru.

Barinova Yelena Vitalyevna, post-graduate student of the department of higher mathematics, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), 15545@yandex.ru. Area of research: aircraft dynamics.

Timbay Ivan Alexandrovitch, doctor of technical sciences, professor, head of the department of higher mathematics, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), timbai@ssau.ru. Area of research: aircraft dynamics.