

О ДЛИНЕ ВОССТАНАВЛИВАЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ БЕЗ ПОТЕРИ ИНФОРМАЦИИ

© 2009 Т. Э. Шульга

Саратовский государственный социально-экономический университет

Рассматривается задача управления поведением систем дискретного типа в условиях, когда отсутствует или не исправно аппаратное дублирование и невозможна или нецелесообразна непосредственная модификация их поведения в процессе функционирования, т.е. управления поведением этих систем на основе их функциональной избыточности. В качестве математической модели системы используется конечный детерминированный автомат. Даются оценки длин восстанавливающих последовательностей для класса групповых автоматов.

Управление поведением, функциональная избыточность, конечный детерминированный автомат, групповой автомат, восстанавливающая последовательность.

Введение

Современному состоянию общей теории управляющих систем характерно использование для модификации поведения двух основных типов избыточностей: аппаратной (структурной) и функциональной (временной) [1]. Аппаратная избыточность подразумевает введение в состав системы дополнительных резервных копий элементов, на которые может быть возложена задача реализации заданного функционирования при выходе из строя основной части или при необходимости модификации поведения системы. Функциональная избыточность предполагает возможность использовать свойства текущего закона функционирования для формирования на выходах требуемой совокупности реакций за счет имеющегося в данный конкретный момент или искусственно создаваемого резерва времени (организация “повторного счета”, повторный запуск логической операции, измененной в результате нарушения и т. п.). При этом для формирования на выходе требуемой совокупности реакций на вход следует подавать специальные последовательности входных символов, которые мы будем называть восстанавливающими. Восстанавливающая последовательность - это последовательность входных символов, которая, будучи применима при любом текущем состоянии системы, в качестве последнего выходного символа даст требуе-

мый выходной символ. Если для данной системы возможно построить восстанавливающие последовательности для каждой требуемой реакции из некоторой заданной совокупности реакций, то будем говорить, что система обладает свойствами функциональной избыточности. Функциональная избыточность может выявляться в созданной системе при решении задачи управления поведением, а также целенаправленно создаваться на этапе проектирования системы, например, с целью восстановления ее поведения в случаях предполагаемых неисправностей. Если функциональная избыточность выявлена в уже созданной системе, то возникает вопрос о способе построения восстанавливающих последовательностей для этой системы и их длинах. Если речь идет о целенаправленном создании функциональной избыточности на этапе проектирования, то данное проектирование целесообразно проводить, исходя из соображений минимальности длин восстанавливающих последовательностей для данной системы.

В данной работе в качестве математической модели дискретных систем с памятью рассматривается модель конечного детерминированного автомата (КДА) и решается задача оценки длин восстанавливающих последовательностей для класса так называемых групповых автоматов, моделирующих поведение систем без потери информации.

Постановка задачи управления

Будем рассматривать автоматы Медведева [2], то есть автоматы вида

$$A=(X,S,\delta), \tag{1}$$

где $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - множество входных сигналов, $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ - множество выходных сигналов, $S=\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ - множество состояний, $\delta: X \times S \rightarrow S$ - функция переходов. Введем обозначения: X^* - множество слов алфавита X , S^* - множество слов алфавита S . Не ограничивая общности состояния автомата, можно занумеровать натуральными числами: $S=\{1, 2, \dots, m\}$.

Определение 1. Пусть текущее поведение системы M моделируется автоматом $A=(X,S,\delta)$, $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, а требуемое - автоматом $B=(X,S,\delta')$, $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Без ограничения общности будем считать

$$\delta'_{x_i}(s) \neq \delta_{x_i}(s), \dots, \delta'_{x_h}(s) \neq \delta_{x_h}(s),$$

$$\delta'_{x_{h+1}}(s) = \delta_{x_{h+1}}(s), \dots, \delta'_{x_n}(s) = \delta_{x_n}(s).$$

Положим, что существует возможность управления системой M на основе свойств функциональной избыточности, если

$$(\forall i, i = \overline{1, h}) (\exists t_i \in X^*)$$

такое, что $\delta'_{x_i}(s) = \delta_{x_i}(s)$. Последовательность t_i , будем называть *восстанавливающей последовательностью для преобразования δ'_{x_i}* .

Фундаментальной основой для решения задачи управления поведением на основе свойств функциональной избыточности (далее - задачи управления поведением) является теория универсальных автоматов – перечислителей.

Определение 2. Пусть автомат $A=(X,S,\delta)$ реализует семейство отображений $\{\overline{\delta}_p\}_{p \in X^*}$ вида $\overline{\delta}_p: S \rightarrow S^*$ и генерирует множество последовательностей состояний

$$L(X^*) = \{s | (\exists s^* \in S^*) (\exists p \in X^*) : \overline{\delta}_p(s^*) = s\}.$$

Тогда под поведением автомата A как *перечислителя* будем понимать множество $L(X^*)$ последовательностей состояний, генерируемых этим автоматом.

Определение 3. КДА $A=(X,S,\delta)$ является универсальным перечислителем для автоматов $\{A_i\}_{i \in I}$ семейства I (где $L(X_i^*)$ - множество, перечислимое автоматом $A_i, i \in I$), если выполняется условие

$$(\forall i \in I) L(X_i^*) \subseteq L(X^*).$$

Определение возможности управления поведением системы эквивалентно ответу на вопрос: является ли автомат A , моделирующий текущее поведение системы, универсальным перечислителем для автомата B , моделирующего требуемое поведение системы.

Задача построения универсального автомата - перечислителя относительно произвольного семейства КДА, а следовательно, и задача управления поведением системы, является алгоритмически неразрешимой [3]. Поэтому в настоящее время предпринимаются попытки выделить классы, для которых эта задача имеет решение. Один из таких классов – класс групповых КДА, которые моделируют так называемые системы без потери информации.

Определение 4. Автомат $A=(X,S,\delta)$ вида (1) называют *групповым* или *перестановочным*, если $\forall x \in X$ - функция переходов данного автомата в виде подстановки:

$$\delta_x: \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \end{pmatrix}$$

$$s_i \neq s_j, i \neq j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \tag{2}$$

т.е. $s_x = (s_1, s_1, \dots, s_m)$ - перестановка на множестве $\{1, 2, \dots, m\}$.

Известно [4], что любую подстановку можно представить с помощью произведений попарно независимых циклов. Например,

$$\text{мер, } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1,3)(4,6). \text{ Именно}$$

такую запись подстановок и будем использовать в данной работе для краткости.

Обозначим $G_A = \langle \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_n} \rangle = \langle \delta \rangle$ группу автомата A вида (1), порожденную

отображениями состояний $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_n}$ вида

(2). Элементы группы $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_n}$ представляют собой систему образующих этой группы. Будем называть их *порождающими подстановками группы автомата*.

Обозначим класс групповых автоматов с заданным числом состояний m через GA_m . Именно для этого класса и будем решать задачу построения универсального перечислителя.

Задача построения

универсального перечислителя

Очевидно, что автомат с m состояниями, который порождает все возможные $m!$ подстановки вида (2), то есть автомат, группа которого совпадает с симметрической группой степени m [4], является универсальным перечислителем для класса GA_m . Обозначим симметрическую группу степени m через SG_m . Известно, что в качестве системы образующих SG_m можно взять, например, множество всех элементов этой группы, или множество всех элементов без единицы, или систему перестановок $\{(1,2), (1,2,\dots,m)\}$. В качестве системы образующих симметрической группы при $m > 2$ не может выступать какой-либо один элемент этой группы, так как такая симметрическая группа не является циклической. Отсюда следует справедливость следующих утверждений.

Утверждение 1. Для класса групповых автоматов с m состояниями и для любого семейства автоматов из этого класса всегда можно построить конечное непустое множество универсальных перечислителей.

Утверждение 2. Мощность множества входных сигналов n любого универсального перечислителя для класса групповых автоматов с m ($m > 2$) состояниями может находиться в интервале от 2 до $m!$. Универсальный перечислитель для класса GA_2 может иметь один входной символ, инициирующий подстановку (1,2).

Утверждение 3. Пусть множество подстановок $GenA$ является произвольным подмножеством из n элементов группы SG_m , порождающим группу SG_m . Тогда автомат с n входными сигналами, m состояниями и сис-

темой образующих $GenA$ является универсальным для GA_m .

В дальнейшем будем говорить о нахождении универсального перечислителя, обладающего некоторыми свойствами минимальности. С практической точки зрения важны две характеристики минимальности универсального перечислителя с числом состояний m : количество реализуемых преобразований (то есть количество входных сигналов) и длина восстанавливающей последовательности, с помощью которой можно породить любое преобразование из класса GA_m , которую можно определить как длину группы универсального автомата.

Определение 5. Длиной группы G в системе образующих Gen называют максимальную из длин ее элементов, где длина элемента группы – это минимальное число сомножителей из Gen в представлении элемента. Длиной группового автомата A будем называть длину его группы.

Очевидно, что длина автомата A с группой G_A переставляет максимальную длину из длин минимальных восстанавливающих последовательностей всех элементов группы G_A .

Как видно из определения 5, длина группы зависит от системы образующих группы, то есть длина автомата (а значит и длины восстанавливающих последовательностей для этого автомата) зависит от вида и количества порождающих подстановок этого автомата (т.е. подстановок, задающих функции перехода).

Очевидно, что с точки зрения длины восстанавливающей последовательности минимальным будем универсальный перечислитель, содержащий все подстановки класса GA_m (то есть все элементы симметрической группы порядка m). Тогда длина восстанавливающей последовательности всегда будет равна 1. Однако на практике такой перечислитель строить нецелесообразно, так как количество его входных сигналов равно $m!$.

Поэтому предложим несколько универсальных перечислителей с минимальным количеством входных сигналов и оценим их с точки зрения длины восстанавливающей последовательности. Для этого рассмотрим

известные системы образующих симметрической группы и оценим длину симметрической группы относительно данных систем образующих.

Оценка длины групп универсальных перечислителей для класса групповых автоматов

Все $m!$ подстановок группы автомата, универсального для GA_m , можно расположить в таком порядке, что каждая следующая будет получаться из предыдущей одной транспозицией*, причем начинать можно с любой перестановки, то есть всякая подстановка представима в виде произведения транспозиций. От любой перестановки из m символов можно перейти к любой другой перестановке из тех же символов при помощи нескольких транспозиций. Следовательно, в качестве системы образующих симметрической группы можно взять множество всех транспозиций.

Теорема 1. Групповой автомат $A=(S,X,\Delta_1)$, $|S|=m$, $|X|=C_m^2$, функции переходов которого представлены множеством всех транспозиций

$$\Delta_1 = \{(i_1, i_2), i_1 \in S, i_2 \in S, i_1 \neq i_2\},$$

является универсальным перечислителем для автоматов из класса GA_m . Длина восстанавливающей последовательности для данного универсального перечислителя относительно любого заданного преобразования с числом состояний m не превышает $m-1$.

Доказательство. Система Δ_1 является известным базисом симметрической группы [5]. Докажем вторую часть утверждения.

Любая подстановка представляется как произведение попарно независимых циклов. Пусть подстановка g представляет собой цикл длины 2, тогда это и есть подстановка из Δ_1 , т.е. длина элемента g группы SG_m равна 1.

Пусть подстановка g представляет собой цикл длины 3. Легко увидеть, что он может быть порожден не менее чем двумя подстановками из Δ_1 и всегда может быть

порожден 2 подстановками из Δ_1 , причем справедливо равенство

$$(i,j,k)=(i,j)*(i,k)=(i,k)*(j,k)=(i,k)*(k,j) \\ i, j, k \in S, i \neq j \neq k.$$

То есть длина элемента g группы SG_m равна 2.

По индукции получаем, что цикл длины k ($3 \leq k \leq m$) не может быть порожден менее чем $k-1$ подстановкой из Δ_1 и всегда может быть порожден $k-1$ подстановкой из Δ_1 , причем справедливо равенство

$$(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_2) * (i_1, i_3) * \dots * (i_1, i_k) = \\ = (i_1, i_k) * (i_2, i_k) * \dots * (i_{k-1}, i_k) = \\ = (i_1, i_k) * (i_k, i_{k-1}) * (i_{k-1}, i_{k-2}) * \dots * (i_3, i_2). \tag{3}$$

Пусть теперь подстановка g представляет собой произведение k независимых циклов. Для степеней d_i этих циклов всегда справедливо неравенство $d_1 + d_2 + \dots + d_k \leq m$.

Как было показано выше, цикл длины d_i порождается не более чем $d_i - 1$ подстановками из Δ_1 . Максимальное количество k циклов длины 2 в разложении произвольной подстановки степени m равно $m-1$. То есть подстановка g может быть порождена не более чем $d_1 - 1 + d_2 - 1 + \dots + d_k - 1 \leq m - 1$ подстановками из Δ_1 . Теорема доказана.

Таким образом, если универсальный автомат с m состояниями задан системой образующих Δ_1 , то длина восстанавливающей последовательности не будет превышать $m-1$ символов, причем равенство (3) из доказательства *теоремы 1* позволяет получить различные варианты восстанавливающей последовательности минимальной длины для любой заданной подстановки степени m , не производя промежуточных вычислений подстановок из группы SG_m .

Например, пусть универсальный автомат для класса GA_4 задан системой подстановок Δ_1 : $\delta_{x_1} = (1, 2), \delta_{x_2} = (1, 3), \delta_{x_3} = (1, 4), \delta_{x_4} = (2, 3), \delta_{x_5} = (2, 4), \delta_{x_6} = (3, 4)$.

* Транспозицией называется такое преобразование перестановки, при котором меняются местами какие-либо два символа, а остальные символы остаются на своих местах

Пусть требуется породить преобразование $\delta = (1,4,2,3)$. Согласно (3) и учитывая, что $(i,j)=(j,i)$, получаем

$$(1,4,2,3)=(1,4)*(1,2)*(1,3)=(1,3)*(3,4)*(2,3)=(1,3)*(2,3)*(2,4).$$

Следовательно, в качестве восстанавливающей последовательности можно взять последовательности $x_3x_1x_2, x_2x_6x_4, x_2x_4x_5$.

Теорема 2. Групповой автомат $A=(S,X,\delta)$, $|S|=m>2$, $|X|=m-1$, функции переходов которого представлены подстановками $\Delta_2 = \{(1,i), i = \overline{2,m}\}$, является универсальным перечислителем для класса автоматов GA_m . Длина восстанавливающей последовательности для данного универсального перечислителя относительного любого заданного преобразования с числом состояний m не превышает $3(m/2-1)+1$, если m – четное, и $3[m/2]^*$, если m – нечетное.

Доказательство. Система Δ_2 является известным базисом симметрической группы [5]. Докажем вторую часть утверждения.

Любую транспозицию вида (i,j) , где $i \neq 1$ (то есть подстановку из множества $\Delta_1 - \Delta_2$), можно представить в виде произведения двух подстановок длины трех подстановок из Δ_2 длины 3, а именно:

$$(i,j)=(1,i)*(1,j)*(1,i), \quad i \neq 1.$$

Рассмотрим, каким образом вычисляется длина элементов группы SG_m в системе образующих Δ_2 .

Если подстановка g представляет собой цикл длиной 2, то либо это подстановка из Δ_2 (т.е. ее длина равна 1), либо подстановка из $\Delta_1 - \Delta_2$ (т.е. ее длина равна 3).

Если подстановка g представляет собой цикл длины 3 вида $(1,i,j)$ (или эквивалентные циклы $(i,j,1), (j,1,i)$), то ее согласно (3.3.1) можно разложить $(1,i,j)=(1,i)*(1,j)$, то есть ее длина равна 2.

Если подстановка g представляет собой цикл длины 3 вида (i,j,k) , где $i \neq 1, j \neq 1, k \neq 1$, то ее согласно (3.3.1) и (3.3.2) можно разложить

$$(i,j,k)=(i,j)*(i,k)=(1,i)*(1,j)*(1,i)*(1,i)*(1,k)*(1,i).$$

А так как $(1,i)*(1,i)=E$, то

$$(i,j,k)=(1,i)*(1,j)*(1,k)*(1,i),$$

то есть ее длина равна 4.

По индукции получаем следующее.

Если подстановка g представляет собой цикл длины k ($2 \leq k \leq m$) вида $(1,i_2, \dots, i_k)$ (или эквивалентные циклы), то

$$(1,i_2, \dots, i_k) = (1,i_2) * (1,i_3) * \dots * (1,i_k), \quad (4)$$

то есть ее длина равна $k-1$.

Если подстановка g представляет собой цикл длины k ($2 \leq k \leq m$) вида (i_1, \dots, i_k) , где $i_j \neq 1, j = \overline{1,k}$, то

$$(i_1, \dots, i_k) = (1,i_1) * (1,i_2) * \dots * (1,i_k) * (1,i_1), \quad (5)$$

то есть ее длина равна $k+1$.

По индукции получаем следующее. Пусть теперь подстановка g представляет собой произведение k независимых циклов. Очевидно, что длина подстановки g равна сумме длин k подстановок, каждая из которых порождена соответствующим циклом в разложении g .

Таким образом максимальное увеличение (в 3 раза) длины элемента в системе образующих Δ_2 по сравнению с системой образующих Δ_1 получим для таких элементов группы SG_m , для которых в представлении вида (3) встречаются подстановки вида (i,j) , где $i \neq 1$. А значит максимальную длину будут иметь элементы, представляющие произведение, содержащее максимально возможное количество таких подстановок (т.е. циклов длины 2 из $\Delta_1 - \Delta_2$).

Максимальное количество циклов длины 2 в разложении подстановки степени m равно $[m/2]$.

Если m - четное, то максимальное количество таких циклов равно $m/2$, но как минимум один из этих циклов представляет собой подстановку множества Δ_2 (то есть элемент длины 1), а остальные (максимум $m/2-1$) - подстановки множества $\Delta_1 - \Delta_2$ (т.е. элементы длины 3). Таким образом, максимальная длина элемента группы SG_m , представленного в виде произведения попарно

* Округление до целого вниз

независимых циклов длины 2, в этом случае равна $3(m/2-1)+1$.

Если m - нечетное, то максимальное количество таких циклов равно $[m/2]$, причем все эти циклы могут представлять собой подстановки множества $\Delta_1-\Delta_2$ (т.е. элементы длины 3). Таким образом, максимальная длина элемента группы SG_m , представленного в виде произведения попарно независимых циклов длины 2, в этом случае равна $3[m/2]$. Теорема доказана.

Таким образом, если универсальный автомат с m состояниями задан системой образующих Δ_2 , то длина восстанавливающей последовательности не будет превышать $3(m/2-1)+1$, если m – четное, и $3[m/2]^*$, если m – нечетное, причем равенства (4) и (5) из доказательства *теоремы 2* позволяют получить восстанавливающую последовательность минимальной длины для любой заданной подстановки степени m , не производя промежуточных вычислений подстановок из группы SG_m .

Например, пусть универсальный автомат для класса GA_6 задан системой подстановок Δ_2 :

$$\delta_{x_1} = (1,2), \delta_{x_2} = (1,3),$$

$$\delta_{x_3} = (1,4), \delta_{x_4} = (1,5), \delta_{x_5} = (1,6).$$

Пусть требуется породить преобразование $\delta = (2,3,5)(4,6)$. Согласно (5) получаем $(2,3,5) = (1,2)*(1,3)*(1,5)*(1,2)$, $(4,6) = (1,4)*(1,6)*(1,4)$.

Следовательно, в качестве восстанавливающей последовательности можно взять последовательность $x_1x_2x_4x_1x_3x_5x_3$.

Пусть теперь требуется осуществить преобразование $\delta = (1,3,5)$. Согласно (4) получаем $(1,3,5) = (1,3)*(1,5)$, то есть в качестве восстанавливающей последовательности можно взять последовательность x_2x_4 .

Прежде чем сформулировать аналогичную теорему для еще одной известной системы образующих симметрической группы, докажем следующую лемму, определяющую вид произведений подстановок в этой системе образующих.

Лемма 1. Пусть дано множество подстановок $\Delta_3 = \{\delta_i = (i, i+1)\}_{i=1, \overline{m-1}}$. Любую подстановку g из Δ_3 можно представить в виде

$$g = g_1 * g_2,$$

где g_1 - любое произведение из элементов Δ_3 , не содержащее подстановки δ_{m-1} , а $g_2 = \delta_{m-1} * \delta_{m-2} * \dots * \delta_{m-k}$, $k \in \overline{1, m-1}$ или $g_2 = E$.

Доказательство. Так как для любого элемента g из Δ_3 выполняется равенство $g^{-1} = g$, то можно считать, что подстановки δ_i^{-1} , $i \in \overline{1, m-1}$ в искомую подстановку g_1 не входят. Таким образом, если в g не входит δ_{m-1} , то утверждение леммы верно.

Предположим, что $g = g_1 * \delta_{m-1} * g_2$, где g_1 не содержит подстановки δ_{m-1} . В этом случае докажем утверждение леммы индукцией по длине $l(g_2)$ подстановки g_2 . При $l(g_2) = 0$ оно очевидно. Допустим, что оно верно при всех g_2 с условием $l(g_2) \leq t$, и покажем, что оно верно и при $l(g_2) = t+1$. Если $g_2 = \delta_{m-1} * \delta_{m-2} * \dots * \delta_{m-r}$, то утверждение леммы верно. Поэтому будем считать, что

$$g = g_1 * \delta_{m-1} * \dots * \delta_{m-r} * \delta_p * g_2,$$

где $p \neq m-r-1$, $1 \leq r \leq m-1$. Будем применять к произведению g различные элементарные преобразования в зависимости от параметра p .

Так как для любой подстановки h из Δ_3 справедливо равенство $h^2 = E$, то при $p = m-r$ заменим в g перестановку $\delta_{m-r} * \delta_p$ тождественной подстановкой.

Так как для перестановок из Δ_3 справедливо равенство

$$h_i * h_j = h_j * h_i, i, j \in \overline{1, m-1}, |i-j| > 1$$

для $m > 3$, то при $p < m-r-1$ переставим в g перестановку δ_p последовательно с перестановками $\delta_{m-r}, \dots, \delta_{m-2}$. В полученном произведении

$$g_1 * \delta_{m-1} * \dots * \delta_{p+1} * \delta_p * \delta_{p-1} * \delta_p * \delta_{p-2} * \dots * \delta_{m-2} * g_2$$

заменим слово $\delta_p * \delta_{p-1} * \delta_p$ словом $\delta_{p-1} * \delta_p * \delta_{p-1}$. (Это возможно сделать, так как для перестановок из Δ_3 справедливо равенство

* Округление до целого вниз

$h_i * h_{i+1} * h_i = h_{i+1} * h_i * h_{i+1}, i \in \overline{1, m-2}$ для $m > 2$.
 Затем переставим δ_{p-1} с $\delta_{p+1}, \dots, \delta_{m-2}$. Таким образом, мы получим произведение g , которое не содержит подстановки δ_{m-1} или имеет вид $g'_1 * \delta_{m-1} * g'_2$, где g'_1 не содержит δ_{m-1} , а $l(g'_2) \leq t$. По предположению индукции полученное произведение g эквивалентно произведению искомого вида. Лемма доказана.

Теорема 3. Групповой автомат $A=(S, X, \delta), |S|=m > 2, |X|=m-1$, функции переходов которого представлены подстановками $\Delta_3 = \{(i, i+1), i \in \overline{1, m-1}\}$, является универсальным перечислителем для класса автоматов GA_m . Длина восстанавливающей последовательности для данного универсального перечислителя относительно любого заданного преобразования с числом состояний m не превышает $m(m-1)/2$.

Доказательство. Система Δ_3 является известным базисом симметрической группы [5]. Докажем вторую часть утверждения.

Согласно лемме 1 любую подстановку g из Δ_3 можно представить в виде $g = g_1 * g_2$, где g_1 - любое произведение из элементов Δ_3 , не содержащее подстановки δ_{m-1} , а $g_2 = \delta_{m-1} * \delta_{m-2} * \dots * \delta_{m-k}$, или $g_2 = E$.

Тогда индукций по m легко показать, что любую подстановку из Δ_3 можно представить в виде

$$\delta_{i_1} * \delta_{i_1-1} * \dots * \delta_{i_1-j_1} * \delta_{i_2} * \delta_{i_2-1} * \dots * \delta_{i_2-j_2} * \delta_{i_3} * \delta_{i_3-1} * \dots * \delta_{i_3-j_3}, \quad (6)$$

где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m-1$,

$$0 \leq j_p < i_p, p \in \overline{1, k}.$$

Самое длинное слово вида (6) имеет вид

$$\delta_1 * \delta_2 * \delta_1 * \delta_3 * \delta_2 * \delta_1 * \dots * \delta_{m-1} * \dots * \delta_2 * \delta_1$$

и длину $m(m-1)/2$. Теорема доказана.

Заметим, что при использовании системы подстановок Δ_2 и Δ_3 в качестве порождающих подстановок универсального перечислителя мы получаем одинаковое количество входных сигналов универсального пе-

речислителя для класса автоматов GA_m , но длина восстанавливающей последовательности для Δ_3 будет больше длины восстанавливающей последовательности для Δ_2 (при $m > 3$). То есть, использование системы подстановок Δ_2 предпочтительнее Δ_3 в качестве порождающих подстановок универсального перечислителя для класса автоматов GA_m .

Перейдем к поиску универсальных автоматов с минимальным количеством состояний, то есть с системой образующих, состоящей из двух подстановок степени m . Самой известной такой системой является система, состоящая из транспозиции двух элементов и циклической подстановки всех m элементов.

Теорема 4. Групповой автомат $A=(S, X, \delta), |S|=m > 2, |X|=2$, функции переходов которого представлены подстановками $\Delta_4 = \{(1, 2), (1, 2, \dots, m)\}$, является универсальным перечислителем для класса автоматов GA_m , причем его длина при $m=3$ равна 2, а при $m > 3$ больше длины универсального перечислителя с системой порождающих подстановок Δ_3 .

Доказательство. Система Δ_4 является известным базисом симметрической группы [5].

При $m=3$ легко проверить (с помощью свойств элементов систем $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$), что все элементы $(3!=6)$ группы SG_m порождаются словами длины 2. Действительно:

$$\begin{aligned} (1, 2) &= (1, 2), (1, 2, 3) = (1, 2, 3) \\ () &= (1, 2) * (1, 2) \\ (1, 3) &= (1, 2) * (2, 3) * (1, 2) = (1, 2) * (1, 2, 3) \\ (2, 3) &= (1, 2) * (1, 3) * (1, 2) = (1, 2, 3) * (1, 2). \end{aligned}$$

Для доказательства второй части теоремы при $m > 3$ достаточно показать, что каждая подстановка из Δ_3 , кроме подстановки $(1, 2)$, представлена произведением подстановок из Δ_4 (что в общем случае дает увеличение числа сомножителей в представлении элемента группы SG_m). Действительно:

$$\begin{aligned} (i, i+1) &= (1, 2, \dots, m)^{-(i-1)} (1, 2) (1, 2, \dots, m)^{i-1}, \\ i &= \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

Так как $\forall k \in N$ для подстановки $(1, 2, \dots, m)$ справедливо $(1, 2, \dots, m)^{-k} = (1, 2, \dots, m)^{m-k}$, то получаем

$$(i, i+1) = (1, 2, \dots, m)^{m-i+1} (1, 2) (1, 2, \dots, m)^{i-1},$$

то есть каждая подстановка из Δ_3 представляется в виде произведения $m+1$ слагаемого из Δ_4 . Теорема доказана.

Однако можно предложить универсальный перенумератор с двумя входными сигналами и с меньшей длиной, чем универсальный перенумератор с системой порождающих подстановок Δ_4 .

Теорема 5. Групповой автомат $A=(S, X, \delta)$, $|S|=m>2$, $|X|=2$, функции переходов которого представлены подстановками $\Delta_5 = \{(1, 2, \dots, m-1), (1, 2, \dots, m)\}$, является универсальным перенумератором для класса автоматов GA_m , причем его длина при $m=3$ равна 2, а при $m>3$ меньше длины универсального перенумератора с системой порождающих подстановок Δ_4 .

Доказательство. Система подстановок Δ_5 является системой образующих для группы SG_m . Чтобы доказать это утверждение, достаточно показать, что любая подстановка из рассмотренных ранее известных систем образующих может быть представлена подстановками из Δ_5 . Действительно, любая подстановка из Δ_3 может быть представлена в виде произведения подстановок из Δ_5 следующим образом:

$$(i, i+1) = (1, 2, \dots, m)^{-i+1} (1, 2, \dots, m-1) (1, 2, \dots, m)^i, \\ i = \overline{1, m-2},$$

$$(m, m+1) = (1, 2, \dots, m) (1, 2, \dots, m-1)^{-1}.$$

Таким образом, автомат A с порождающей системой подстановок Δ_5 является универсальным для класса автоматов GA_m .

При $m=3$ $\Delta_4 = \Delta_5$ и из теоремы 4 следует, что длина автомата A в этом случае равна 2.

Так как $\forall k \in N$ для подстановки $(1, 2, \dots, m)$ справедливо $(1, 2, \dots, m)^{-k} = (1, 2, \dots, m)^{m-k}$, а для подстановки $(1, 2, \dots, m-1)$ справедливо $(1, 2, \dots, m-1)^{-k} = (1, 2, \dots, m-1)^{m-k-1}$, то из равенств (*), (**) получаем

$$(i, i+1) = (1, 2, \dots, m)^{m-i-1} (1, 2, \dots, m-1) (1, 2, \dots, m)^i, \\ i = \overline{1, m-2},$$

$$(m, m+1) = (1, 2, \dots, m) (1, 2, \dots, m-1)^{m-2}.$$

То есть любая подстановка из Δ_3 представляется в виде произведения m или $m-1$ или сомножителей из Δ_5 . В то время как любая подстановка из Δ_3 представляется в виде произведения $m+1$ сомножителей из Δ_4 . Таким образом, длина произвольной подстановки из SG_m относительно системы Δ_5 в общем случае будет меньше длины подстановки относительно системы Δ_4 . Теорема доказана.

В таблице 1 приведено число входных сигналов n универсального перенумератора для GA_m и максимальные длины восстанавливающих последовательностей d в зависимости от числа состояний группового автомата m для каждой из систем образующих универсального перенумератора, рассмотренных в теоремах 1 – 5. Данные по длине восстанавливающей последовательности для систем Δ_4, Δ_5 получены в результате применения метода построения всех элементов группы автомата, порождаемых входными словами минимальной длины (метод 1, см. ниже).

Таблица 1. Длины восстанавливающих последовательностей в системах образующих $\Delta_1 - \Delta_5$

m	Δ_1		Δ_2		Δ_3		Δ_4		Δ_5	
	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d
3	3	2	2	3	2	3	2	2	2	2
4	6	3	3	4	3	6	2	5	2	5
5	10	4	4	6	4	10	2	11	2	8
6	15	5	5	7	5	15	2	18	2	12
7	21	6	6	9	6	21	2	25	2	17
8	28	7	7	10	7	28	2	35	2	23
9	36	8	8	12	8	36	2	45	2	35

Метод нахождения длины группы произвольного группового автомата

Для нахождения длины группы произвольного группового автомата (то есть для оценки длины восстанавливающих последовательностей) можно использовать следующий метод.

Метод 1.

Вход: Групповой автомат $A=(X,S,\delta)$, $|X|=n$, $|S|=m$ с порождающими подстановками $\delta_{x_i}, i = \overline{1, n}$, моделирующими текущее поведение системы.

Выход: Список G всех подстановок, порождаемых словами минимальной длины автомата A , и соответствующий ему список T слов входного алфавита, D - длина группы автомата A .

Шаг 1.

Положим $G = \{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_n}\}$ - множество порождающих подстановок автомата A , в которое в дальнейшем будем записывать подстановки группы автомата A , порождаемые словами минимальной длины.

Шаг 2.

Если существует тождественная подстановка $\delta_{x_p} \in G$, удаляем δ_{x_p} из G , присваиваем $x=x_p$, удаляем x_p из X , иначе переходим к шагу 3.

Шаг 3.

Положим $T=X$ (то есть множество слов длины 1, в которое будем в дальнейшем добавлять слова минимальной длины). Присваиваем $r_1=1$, $r_2=|X|$, $r=r_2$ (заметим, что $|X|=n$, если среди порождающих подстановок автомата не было тождественной, и $|X|=n-1$ в противном случае). Фактически r_1 и r_2 - номера первого и последнего слова в множестве T одинаковой длины (на данном шаге - длины 1), r - номер очередного построенного слова. Положим $k=2$ (длина искомых слов).

Шаг 4.

а) Строим слова длины k . Для каждого слова $t_j \in T$, $j = \overline{r_1, r_2}$ строим слово $t=t_j x_p$, где $x_i (i = \overline{1, |X|})$, то есть слово длины k , префиксом которых являются слово длины $k-1$ из множества T . Для каждого слова следующие действия:

- вычисляем подстановку $\delta_t = \delta_{t_j} \delta_{x_i}$;

- если $\delta_t \notin G$, то δ_t добавляем в множество G , увеличиваем r на 1, а t добавляем в множество T .

б) Изменяем значения $r_1=r_2+1$, $r_2=r$, $k=k+1$, то есть переходим к построению слов длины $k+1$. Если порядок группы G меньше порядка группы автомата A , то переходим к шагу 3а. Иначе переходим к шагу 4.

Шаг 5.

Возвращаем $D=k-1$. (Длина последнего построенного слова равна $k-1$, это и есть длина группы автомата A).

Шаг 6.

Если $x=x_p$, то добавляем в T слово x_p , а в множество G - тождественную подстановку. Возвращаем T и G .

Данный метод реализован в свободно распространяемой библиотеке GroupAutomata [6] функцией GroupAMin.

Таким образом, в данной статье предложены различные универсальные перечислители для класса групповых автоматов, то есть модели систем, обладающих функциональной избыточностью относительно класса систем без потери информации. Для каждого из предложенных универсальных перечислителей дана оценка длин восстанавливающих последовательностей, а также предложен метод нахождения минимальной длины восстанавливающей последовательности относительно произвольного преобразования для автоматов рассматриваемого класса.

Библиографический список

1. Пархоменко П. П., Согомонян Е. С. Основы технической диагностики, оптимизации алгоритмов диагностирования, аппаратные средства. - М.: Энегоиздат, 1981.
2. Медведев Ю. Т. О классе событий, допускающих представление в конечном автомате// Автоматы: Пер. с англ. - М., 1956. - С. 385-401.
3. Сытник А. А. Перечислимость при восстановлении поведения автоматов. // Доклады РАН. - 1993. - Т. 328. - № 1.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1975. - 345с.

5. Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А. Алгебра: Учебник в 2-х томах. Т1. - М.: Гелиос АРВ, 2003.
6. Шульга Т. Э. Библиотека функций GroupAutomata <http://www.seun.ru/faculty/FIIT/KTOIT/GroupAutomata.rar>.
- which admits the representing by finite automaton // Automata: – Moscow, 1956. – P.385-401.
3. Sytnik A.A. A.A. Enumerability and renewal of automaton behavior. //Reports of RAS. 1993. V.328. № 1.
4. Kurosh A.G. The course of higher algebra. Moscow: The Science , 1975. - 345с.
5. Gluhov M.M., Elizarov V.M., Nechaev V.P. Algebra V1. - Moscow: Gelios APB, 2003.
6. Shulga T.E. Function library GroupAutomata <http://www.seun.ru/faculty/FIIT/KTOIT/GroupAutomata.rar>.

References

1. Parhomenko P.P., Sogomonyan E.S. The foundation of technical diagnosis, optimization of diagnosis algorithms, hardware. - Moscow: Energoizdat, 1981.
2. Medvedev U.T. About events class

LENGTH OF RESTORATION SEQUENCES FOR SYSTEMS WITHOUT INFORMATION LOSS

© 2009 T. E. Shulga

Saratov State Socio-Economical University

The paper deals with the problem of controlling the behaviour of discrete type systems in case when hardware back-up is absent or faulty, and direct modification of their behaviour in the process of functioning, i. e. controlling the behaviour of these systems on the basis of their functional redundancy, is impossible or not expedient. A finite determinate automaton is used as a mathematical model of the system. The lengths of restoration sequences for the class of group automata are estimated.

Behaviour control, functional redundancy, finite determinate automaton, group automaton, restoration sequence.

Информация об авторах

Шульга Татьяна Эриковна, кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета информатики и информационных технологий, Саратовский государственный социально-экономический университет. Область научных интересов: математическая кибернетика, теория автоматов, теория управления систем, информационные технологии в образовании. E-mail: shulga@ssea.runnet.ru.

Shulga, Tatiana Erikhovna, candidate of physical and mathematical science, dean of the faculty of information science and information technologies, Saratov State Socio-Economical University. Area of research: mathematical cybernetics, theory of automata, theory of system control, information technologies in education. E-mail: shulga@ssea.runnet.ru.

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени академика С. П. КОРОЛЁВА

№ 4 (20)

2009

Корректор **Карпова Л. М.**
Компьютерная вёрстка **Коломиец В. В.**
Переводчик **Безрукова Е. И.**

Каталожная цена: 1000 руб.

Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Тираж 200. Заказ _____

Отпечатано в издательстве
Самарского государственного аэрокосмического университета
443086 Самара, Московское шоссе, 34

**Правила оформления статей для журнала
«Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета
имени академика С. П. Королёва»**

1. Статья представляется в двух экземплярах, распечатанных на лазерном принтере на одной стороне бумаги в режиме качественной печати, а также в электронном виде на отдельном носителе ответственному секретарю редакционной коллегии журнала Прохорову Александру Георгиевичу по адресу: 443086, Самара, Московское шоссе, 34, 212а – 3А, тел.: (846) 267 48 41, электронная почта: vest@ssau.ru.

2. Текст статьи представляется в формате Microsoft Word на дискетах, CD или DVD. Объём статьи - до 10 страниц формата А4. Имя файла определяется по фамилии первого автора: фамилия.doc. Поля - по 2 см с каждой стороны, текст - кегль 12, одинарный междустрочный интервал. Выравнивание: по ширине страницы. Шрифты - Times New Roman, Symbol. Отступ первой строки абзаца - 1 см. Страницы должны быть пронумерованы.

Замена буквы «ё» на букву «е» недопустима. Написание в тексте буквы «ё» является обязательным.

3. Допускается наличие рисунков, формул и таблиц по тексту.

Рисунки могут быть созданы средствами Microsoft Word/Excel или в форматах JPEG, GIF, TIFF, PNG. Подпись к рисунку начинается со слова «Рис.» и номера по порядку, подпись располагается снизу, выравнивание – по центру. Для ссылки по тексту статьи на рисунок 1 следует использовать сокращение: рис. 1.

Для математических выражений и формул следует использовать Microsoft Equation 3.0 и буквы латинского (*Times New Roman, курсив, размер 12*) и греческого (*Symbol, курсив, размер 12*) алфавитов. Формулы, на которые в статье делаются ссылки, следует печатать с новой строки, при этом формулы нумеруются в порядке следования по тексту статьи. Номер формулы и ссылка на неё в тексте обозначается числом в круглых скобках: (1), (2), (3). Длина формулы на строке строго ограничена – до 80 мм (допускается перенос на следующие строки).

Заголовок таблицы начинается со слова «Таблица» и её номера по порядку, заголовок размещается сверху, выравнивание – по левому краю. Для ссылки по тексту статьи на таблицу 1 следует использовать сокращение: табл. 1.

4. Библиографический список оформляется отдельным разделом в конце статьи, при этом литературные источники располагаются в порядке их использования по тексту статьи в виде нумерованного списка, и оформляется в соответствии с действующим ГОСТ.

5. К тексту статьи прилагается направление организации (если авторы не являются сотрудниками СГАУ), рецензия специалиста по научному направлению статьи (не являющегося сотрудником подразделения, где работают авторы), акт экспертизы, информация об авторах для опубликования в журнале. На отдельной странице указываются сведения об авторах для служебного пользования: фамилия, имя, отчество, должность, учёная степень, учёное звание, место работы, служебный и домашний адреса, телефон, электронная почта. Статья должна быть подписана всеми авторами.

6. Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются. Рукописи и сопроводительные документы не возвращаются. Датой поступления рукописи считается день получения редакцией окончательного текста.

7. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Образец оформления

УДК 536.04

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ СЛОЖНОЙ ЗАМКНУТОЙ СТРУКТУРЫ НА БОРТУ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ КОСМИЧЕСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ

© 2006 Г. П. Аншаков¹, В. В. Бирюк², В. В. Васильев², В. В. Никонов², В. В. Салмин²

¹ФГУП ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс»

²Самарский государственный аэрокосмический университет

(аннотация статьи объёмом 50...150 слов, кегль: 10)

(ключевые слова объёмом 8-12 слов, кегль: 10, начертание: курсив)

(текст статьи)

(библиографический список)

(информация об авторах для опубликования: фамилия, имя, отчество, учёная степень, учёное звание, должность, место работы, электронная почта, область научных интересов - до 10 слов)

THERMAL FIELDS SIMULATING OF COMPLEX CLOSED STRUCTURE ABOARD RESEARCH SPACE LABORATORY

© 2006 G. P. Anshakov¹, V. V. Biruk², V. V. Vasiliev², V. V. Nikonov², V. V. Salmin²

¹«Progress» Design Bureau

²Samara State Aerospace University

(аннотация статьи - на английском языке)

(ключевые слова - на английском языке)

(библиографический список - на английском языке)

(информация об авторах - на английском языке)