УДК 519.71

ЗАДАЧИ СИНТЕЗА И АНАЛИЗА ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ПОВЕДЕНИЕМ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ИЗБЫТОЧНОСТИ ДЛЯ КЛАССА ГРУППОВЫХ АВТОМАТОВ

© 2009 А. А. Сытник[1], Т. Э. Шульга[2], Н. С. Вагарина[2]

[1] Саратовский государственный технический университет
[2]Саратовский государственный социально-экономический университет

Исследуется возможность управления поведением систем дискретного типа на основе свойств функциональной избыточности. При данном типе управления для формирования на выходах требуемой совокупности реакций используются только свойства текущего закона функционирования за счет имеющегося в данный конкретный момент или искусственно создаваемого резерва времени. В качестве математической модели системы рассматривается конечный детерминированный автомат, а в качестве основы для решения задачи - теория универсальных автоматов-перечислитлей. В работе приведено решение задач синтеза и анализа теории универсальных автоматов для класса групповых автоматов. Разработана и описана свободно распространяемая библиотека функций для работы с групповыми автоматами.

Управление поведением, функциональная избыточность, групповой автомат, универсальная перечислимость, библиотека функций GAP.

Введение

Задача управления поведением дискретной системой на основе свойств функциональной избыточности ставится в тех случаях, когда отсутствует (неисправно) аппаратное дублирование и невозможна (нецелесообразна) непосредственная модификация текущего поведения за счет внутреннего перепроектирования. Будем говорить, что система обладает свойствами функциональной избыточности, если возможно использовать свойства текущего закона функционирования для формирования на выходах требуемой совокупности реакций. Функциональная избыточность может выявляться в созданной системе при решении задачи управления поведением, а также целенаправленно создаваться на этапе проектирования системы, например, с целью восстановления ее поведения в случаях предполагаемых неисправностей.

В качестве математической модели системы будем использовать конечный детерминированный автомат (КДА). Основой для решения рассматриваемой задачи является теория универсальных автоматов, возникновение которой связано с работами К. Шеннона, М. Минского, Дж. фон Неймана [1],[2]. Универсальный автомат – это автомат, способный моделировать, порождать, воспроизводить заданный спектр поведений или объектов.

Определение возможности управления поведением системы на основе свойств функциональной избыточности эквивалентно ответу на вопрос: может ли автомат A, описывающий текущее поведение системы, моделировать каким-либо образом поведение автомата B, описывающего требуемое поведение системы, т.е. является ли автомат A универсальным для автомата B. Если прямую задачу нахождения для автомата B универсального автомата A называют задачей синтеза, то обратную к ней - нахождение для автомата A семейства автоматов, для которого A является универсальным, называют задачей анализа. Таким образом, задачу управления поведения можно решать двумя способами: либо проверять, принадлежит ли автомат B решению задачи анализа для автомата A, либо для автомата B решить задачу синтеза универсального автомата и проверить, является ли A этим решением.

Известно, что задача управления поведением дискретной системой на основе свойств функциональной избыточности для класса КДА алгоритмически неразрешима [3]. Поэтому в настоящий момент предпринимаются попытки выделить классы, для которых эта задача имеет решение. Одним из таких классов является класс так называемых групповых автоматов.

С алгебраической точки зрения приложение последовательности входных сигналов индуцирует на множестве внутренних состояний автомата преобразование, представляющее произведение преобразований, индуцируемых каждым из входных сигналов этой последовательности. То есть все возможные преобразования, индуцируемые автоматом, представляют собой конечную полугруппу преобразований относительно операции умножения. Различные автоматы могут иметь одинаковые полугруппы и, следовательно, могут производить одинаковую работу. Этот факт может быть использован при решении многих задач теории автоматов, в том числе и при решении задачи управления поведением на основе свойств функциональной избыточности. Если все подстановки автомата являются перестановками, то для каждого элемента полугруппы автомата существует обратный, то есть полугруппа автомата фактически является группой. Групповые автоматы также называют автоматами без потери информации.

В ходе исследований была разработана библиотека функций GroupAutomata [4], предназначенная для работы с групповыми автоматами и реализующая все основные методы теории универсальных автоматов. Библиотека функций разработана в свободно распространяемой, открытой и расширяемой системе компьютерной алгебры GAP [5], которая является уникальным всемирным совместным научным проектом, объединяющим специалистов в области алгебры, теории чисел, математической логики, информатики и других наук из различных стран мира. Библиотека функций GroupAutomata распостаняется по лицензии BSD, вместе с библиотекой предоставляется подробное описание функций. Открытая система GAP позволяет любому исследователю, имеющему минимальный опыт работы с данной системой, использовать ее в своей работе, исправлять и добавлять новые функции.

Формальная постановка задачи

Будем рассматривать автоматы вида

$$A=(X,S,\delta) \qquad (1)$$

с множеством входных сигналов $X=\{x_1,x_2,...x_n\}$, множеством состояний $|S|=m$ и функцией переходов $\delta: X\times S\to S$. Обозначим X^* - множество слов алфавита X, $\overline{\delta}_p$ - функцию переходов, реализуемую при подаче входного слова $p\in X^*$.

Занумеруем состояние автомата натуральными числами $S=\{1,2, . . . ,m\}$.

Определение 1. Пусть автомат $A=(X,S,\delta)$ реализует семейство отображений $\{\overline{\delta}_p\}_{p\in X^*}$ вида $\overline{\delta}_P: S\to S^*$ и генерирует множество последовательностей состояний

$$L(X^*)=\{s\,|\,(\exists\ s^*\in S)(\exists\ \ p\in X^*):\overline{\delta}_p(s^*)=s\}.$$

Тогда под поведением автомата A как перечислителя будем понимать множество $L(X^*)$ последовательностей состояний, генерируемых этим автоматом.

Определение 2. КДА $A=(X,S,\delta)$ является универсальным перечислителем для автоматов $\{A_i\}_{i\in I}$ семейства I (где $L(X_i^*)$ - множество, перечислимое автоматом $A_i, i\in I$), если выполняется условие: $(\forall i\in I)\ \ L(X_i{}^*)\subseteq L(X^*)$.

Определение 3. Автомат $A=(X,S,\delta)$ вида (1) называют *групповым* или *перестановочным*, если $\forall x\in X$ функция переходов данного автомата в виде подстановки:

$$\delta_x:\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & m\\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m\end{pmatrix}, \qquad (2)$$
$$s_i\neq s_j,\ i\neq j,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m},$$

т.е $s_x=(s_0,s_1,...,s_{m-1})$ - перестановка на множестве $\{1,2,\ldots,m\}$.

Обозначим $G_A=\langle\delta_{x_1},\delta_{x_2},...,\delta_{x_n}\rangle=\langle\delta\rangle$ группу автомата A вида (1), порожденную отображениями состояний $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, ..., \delta_{x_n}$ вида (2). Элементы этой группы имеют вид $\overline{\delta}_{x_{j1}^{\beta_{j1}} x_{j2}^{\beta_{j2}} ... x_{jk}^{\beta_{jk}} ...}$, где $0 \le \beta_{j_j} \le \alpha_{j_i}$, α_j - порядок элемента δ_{x_j}.

Элементы группы $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, ..., \delta_{x_n}$ представляют собой систему образующих этой группы. Будем называть их *порождающими подстановками группы автомата*.

Очевидно, что множество G_A является порождающим множеством для множества $L(X^*)$ последовательностей состояний, генерируемых этим автоматом (относительно операции умножения $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, ..., \delta_{x_n}$).

Обозначим GA_m - класс всех групповых автоматов с m состояниями.

Определение 4. Порядком автомата будем называть порядок его группы, то есть количество элементов в ней.

Известно [6], что любую подстановку можно представить с помощью произведений попарно независимых циклов. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1,3)(4,6)$. Именно такую запись подстановок и будем использовать в данной работе для краткости. Тождественную подстановку будем обозначать ().

Отметим, что система GAP предоставляет возможность работы с подстановками и группами подстановок, причем подстановки задаются в ней именно в виде произведений попарно независимых циклов. Однако имеются функции, которые преобразуют заданный список (нижнюю строку подстановки) в произведение попарно независимых циклов и наоборот. Таким образом, не представляет сложности для заданного автомата определить, является ли он групповым, а если является, то задать порождающие его подстановки в виде произведений попарно независимых циклов, построить группу автомата и найти все элементы этой группы. В библиотеке функций GroupAutomata имеются, в частности, функции, которые:

- для заданного детерминированного автомата A возвращают список подстановок, порождающих его группу, если автомат групповой (функция ListPermA);
- для заданного детерминированного автомата A возвращают его группу, если автомат групповой (функция GroupA);
- для заданного детерминированного автомата A возвращают список всех элементов его группы, если автомат групповой (функция ListGroupA);
- для заданного детерминированного автомата A вычисляют порядок автомата, если автомат групповой (функция OrderA);
- по заданному списку подстановок строяит групповой автомат (функция GetAutomata).

Известно [6], что число различных перестановок из m символов (степени m) равно $m!$. Группа всех возможных подстановок из m символов называется симметрической группой степени m. Таким образом, порядок симметрической группы степени m, то есть число элементов в ней, равно $m!$.

Из определения универсального перечислителя и из того факта, что группа автомата G_A является порождающим множеством для множества $L_A(X^*)$ последовательностей состояний, генерируемых этим автоматом, следует справедливость следующих утверждений.

Утверждение 1. Групповой автомат с m состояниями является универсальным перечислителем для класса групповых автоматов с m состояниями тогда и только тогда, когда он порождает симметрическую группу степени m, или иными словами, если его порядок равен $m!$.

Утверждение 2. Групповой автомат $A=(X,S,d)$ является универсальным перечислителем для семейства групповых автоматов $\{A_i\}_{i\in I} : A_i = (X_i, S, \delta^{(i)})$, тогда и только тогда, когда $(\forall i \in I)\ G_{A_i} \subseteq G_A$, где G_A - группа автомата A, G_{A_i} - группа автомата A_i.

На основании этих утверждений всегда можно проверить, является ли заданный групповой автомат с m состояниями универсальным перечислителем для заданного семейства автоматов и является ли он универсальным автоматом для класса GA_m. Например, в библиотеке функций GroupAutomata данная проверка осуществляется функциями IsUniversal1 и IsUniversalG соответственно.

Другие условия универсальности автомата для класса GA_m могут быть получены на основании свойств симметрической группы перестановок. Одним из наиболее важных результатов, полученных таким образом, является следующая теорема, показывающая, что универсальный перечислитель может быть построен из любого группового автомата, реализующего нетождественное преобразование, добавлением не более одного преобразования на множестве состояний .

Теорема 1 [7]**.** Пусть дан групповой автомат $A=(S,X,\delta)$, $|S|=m>2$, $|X|=n$. Тогда $\forall x \in X, \delta_x \in \{\delta\}_{x\in X}$, при условии, что δ_x - нетождественная подстановка, существует автоматная подстановка γ степени m такая, что автомат $A' = (S, X', \{\delta_x, \gamma\})$, $|X'|=2$ является универсальным перечислителем для автоматов из класса GA_m. Исключение составляют автоматные подстановки: (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3).

Доказательство данной теоремы фактически дает способ нахождения подстановки γ.

Приведем формальные постановки задач синтеза и анализа теории универсальных автоматов для групповых автоматов.

Задача синтеза. Пусть дано семейство групповых автоматов $\{A_i\}_{i\in I} : A_i = (X_i, S, \delta_i)$. Требуется построить групповой автомат $A=(X,S,\delta)$, который является универсальным для семейства автоматов $\{A_i\}_{i\in I}$.

Задача анализа. Пусть дан групповой автомат $A=(X,S,\delta)$. Построить семейство групповых автоматов $\{A_i\}_{i\in I} : A_i = (X_i, S, \delta_i)$ таких, что автомат A является универсальным для данного семейства. Задачи синтеза и анализа теории универсальных автоматов для класса групповых автоматов с заданным числом состояний.

Критерий универсальности для класса групповых автоматов

Очевидно, что если групповой автомат с m состояниями является универсальным для класса автоматов GA_m, то он является универсальным и для любого семейства автоматов из этого класса. Однако с точки зрения решения задач управления поведением на основе свойств функциональной избыточности имеет смысл получить способы решения задач теории универсальных автоматов не для класса всех групповых автоматов в целом, а для заданных семейств групповых автоматов. В этом случае так же необходим критерий, позволяющий определить универсальность автомата. Этот критерий дает следующая теорема.

Теорема 2. Групповой автомат $A=(X,S,\delta)$ является универсальным перечислителем для семейства групповых автоматов $\{A_i\}_{i\in I} : A_i = (X_i, S, \delta^{(i)})$ тогда и только тогда, когда $(\forall i \in I)(\forall x \in X_i)\ \delta_x^{(i)} \in G_A$, где G_A - группа автомата A.

Доказательство.

По определению автомат A является универсальным перечислителем для семейства автоматов $\{ A_i \}_{i\in I}$, если

$$(\forall i \in I)\ L(X_i^*) \subseteq L(X^*),$$

а так как группа автомата G_A является порождающим множеством для множества $L_A(X^*)$, то значит и $G_{A_i} \subseteq G_A$. То есть нам надо показать справедливость утверждения $(\forall x \in X_i)\delta_x^{(i)} \in G_A \Leftrightarrow G_{A_i} \subseteq G_A$. Без ограничения общности фиксируем i. Тогда необходимость утверждения очевидна. Докажем достаточность.

Пусть

$$(\forall x_j \in X_i),\ j = \overline{1,|X_i|}\ \ G_A . \tag{3}$$

Докажем, что в этом случае $G_{A_i} \subseteq G_A$, то есть $\forall t \in X_i^*, |t| > 1$, выполняется следующее условие: $\overline{\delta}_t^{(i)} \in G_{A_i} \Rightarrow \overline{\delta}_t^{(i)} \in G_A$.

Так как справедливо (3), то

$$(\forall x_j \in X_i),\ j=\overline{1,|X_i|}\ (\exists t_j \in X^*)\cdot$$
$$\cdot\,\delta^{(i)}_{x_j} = \bar{\delta}_{t_j}, \bar{\delta}_{t_j} \in G_A. \qquad (4)$$

Элементы группы G_{A_i} делятся на элементы двух видов. Покажем, что элементы и того и другого вида принадлежат группе G_A.

1) Рассмотрим элементы группы G_{A_i} вида $\bar{\delta}^{(i)}_{x_j^\alpha}, j=\overline{1,|X_i|}, \alpha>1$. Так как справедливо равенство (4), то $\bar{\delta}^{(i)}_{x_j^\alpha} = \bar{\delta}_{t_j^\alpha}$. Покажем, что $\bar{\delta}_{t_j^\alpha} \in G_A$. Действительно, так как $t_j^\alpha \in X^*$, подстановка $\bar{\delta}_{t_j^\alpha}$ является элементом группы G_A, а следовательно, и $\bar{\delta}^{(i)}_{x_j^\alpha}$ является элементом группы G_A. Таким образом,

$$\bar{\delta}^{(i)}_{x_j^\alpha} \in G_A,\ j=\overline{1,|X_i|}, \alpha>1.$$

Следовательно,

$$(\forall x_j \in X_i)(\exists t_j \in X^*)\bar{\delta}^{(i)}_{x_j^\alpha} = \bar{\delta}_{t_j}. \qquad (5)$$

2) Рассмотрим элементы множества G_{A_i} вида $\bar{\delta}^{(i)}_{x_{j1}^{\beta_{j1}} x_{j2}^{\beta_{j2}} \ldots x_{jk}^{\beta_{jk}}}$. Согласно утверждению (5), $(\forall x_{j_\mu} \in X_i)(\exists t_{j_\mu} \in X^*)\ \bar{\delta}^{(i)}_{x_{j_\mu}^{\beta_{j_\mu}}} = \delta_{t_{j_\mu}}$. Следовательно, $\bar{\delta}^{(i)}_{x_{j1}^{\beta_{j1}} x_{j2}^{\beta_{j2}} \ldots x_{jk}^{\beta_{jk}}} = \bar{\delta}_{t_{j1} t_{j2} \ldots t_{jk}}$. Так как $t_{j_1} t_{j_2} \ldots t_{j_k} \in X^*$, то $\bar{\delta}_{t_{j1} t_{j2} \ldots t_{jk}}$ является элементом группы G_A, а следовательно,

$$\bar{\delta}^{(i)}_{x_{j1}^{\beta_{j1}} x_{j2}^{\beta_{j2}} \ldots x_{jk}^{\beta_{jk}}} \in G_A.$$

Теорема доказана.

Таким образом, согласно данной теореме для того, чтобы определить, является ли заданный групповой автомат универсальным для некоторого семейства групповых автоматов, необходимо построить список элементов группы и проверить, принадлежат ли все функции переходов каждого автомата из семейства этому списку. Очевидно, что такую проверку имеет смысл осуществлять, если группа заданного автомата отличается от симметрической группы степени *m*, где *m* – число состояний заданного автомата. Функция библиотеки GroupAutomata, реализующая такую проверку, - IsUniversal.

Пример 1.

Пусть дан автомат $A=(X,S,\delta)$, $|S|=m=6$, $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $\delta_{x_1}=(1,3)$, $\delta_{x_2}=(1,3)(4,6)$, $\delta_{x_3}=(3,4)$ и семейство автоматов $\{A_1, A_2\}$:

$A_1=(X_1,S,\delta^{(1)})$, $|S|=6$, $|X_1|=2$,
$\delta^{(1)}{}_{x_1}=(1,4,6,3)$, $\delta^{(1)}{}_{x_2}=(1,6,3)$.

$A_2=(X_2,S,\delta^{(2)})$, $|S|=6$, $|X_2|=3$,
$\delta^{(2)}{}_{x_1}=(1,4,3)$, $\delta^{(2)}{}_{x_2}=(5,6)$.

Определим, является ли автомат *A* универсальным перечислителем для семейства автоматов $\{A_1, A_2\}$.

Строим группу автомата *A* и записываем каждый элемент группы в виде попарно независимых циклов:

G_A=[(), (4,6), (3,4), (3,4,6), (3,6,4), (3,6), (1,3), (1,3)(4,6), (1,3,4), (1,3,4,6), (1,3,6,4), (1,3,6), (1,4,3), (1,4,6,3), (1,4), (1,4,6), (1,4)(3,6), (1,4,3,6), (1,6,4,3), (1,6,3), (1,6,4), (1,6), (1,6,3,4), (1,6)(3,4)].

Порядок группы равен 24≠6!, следовательно, автомат *A* не является универсальным перечислителем для класса автоматов GA_6.

Функции переходов автомата A_1 (1,4,6,3) и (1,6,3) принадлежат группе G_A. Следовательно, *по теореме 2* автомат *A* является универсальным перечислителем для автомата A_1. (Если бы мы построили группу автомата A_1, то убедились бы, что и A_1 является универсальным перечислителем для *A*, то есть их группы совпадают). Функции переходов автомата A_2 (5,6) не принадлежат группе G_A. Следовательно, *по теореме 2* автомат A не является универсальным перечислителем для семейства автомата A_2. Таким образом, автомат A не является универсальным перечислителем для семейства автоматов $\{A_1, A_2\}$.

Решение задачи анализа теории универсальных групповых автоматов

Используя критерий универсальности для групповых автоматов, можно предложить простой метод построения всех универсальных перечислителей с определенным числом входных сигналов для заданного семейства автоматов.

Метод 1.

Вход: Семейство групповых автоматов $\{A_i\}_{i\in I} : A_i = (X_i, S, \delta_i)$, где с числом состояний m, число входных сигналов универсального перечислителя n.

Выход: Все групповые автоматы A=(X,S,δ) с числом состояний m и числом входных сигналов n, которые являются универсальными для семейства автоматов $\{A_i\}_{i\in I}$.

Шаг 1. $(\forall i \in I)(\forall x \in X_i)\ \delta_x^{(i)}$ записываем в множество подстановок L.

Шаг 2. Генерируем группу G, порождаемую подстановками множества L.

Шаг 3. Строим S_n - множество всевозможных n-ок элементов из множества элементов группы G (его мощность равна C_{ord}^{n}, где ord – порядок группы G).

Шаг 4. Из множества S_n исключаем те n-ки, которые порождают группу, не совпадающую с G.

Шаг 5. Для каждого элемента множества S_n строим автомат

$A_{n_i} = (X_{n_i}, S, \delta_{n_i})\ i = \overline{1, |S_n|}$,

где $|X_{n_i}| = n$, $|S|$=m, δ_{n_i} - i-ая n-ка множества S_n.

Данный метод представлен в библиотеке GroupAutomata функций AllUniversalA.

Кроме того, на основе критерия универсальности можно предложить следующий метод синтеза универсального перечислителя с минимальным количеством входных сигналов для семейства автоматов.

Метод 2.

Вход: Семейство групповых автоматов $\{A_i\}_{i\in I} : A_i = (X_i, S, \delta_i)$, где с числом состояний m.

Выход: Групповой автомат A=(X,S,δ) с минимальным числом входных сигналов, который является универсальным для семейства автоматов $\{A_i\}_{i\in I}$.

Шаг 1. $(\forall i \in I)(\forall x \in X_i)\ \delta_x^{(i)}$ записываем в множество подстановок L.

Шаг 2. Генерируем группу G, порождаемую подстановками множества L.

Шаг 3. Находим минимальную систему образующих Gen группы G с k элементами. (Очевидно, k=1, если группа G циклическая, и k=2 в противном случае).

Шаг 4. Строим автомат A =(X,S,δ), |S|=6, |X|=k, функции переходов которого представлены подстановками множества Gen.

Данный метод реализован в библиотеке функций GroupAutomata функций MinimalUniversal.

Пример 2.

Пусть дано семейство автоматов $\{A_1, A_2\}$:

A_1=(X_1,S,$\delta^{(1)}$), A_2=(X_2,S,$\delta^{(2)}$) $|S|$=6, $|X_1|$=2, $|X_2|$=2, $\delta^{(1)}{}_{x_1}$=(1,3), $\delta^{(1)}{}_{x_2} = (1,3)(4,6)$, $\delta^{(2)}{}_{x_1} = (3,4)$, $\delta^{(2)}{}_{x_2} = ()$.

Требуется найти минимальный универсальный перечислитель. Применим *метод 2.*

Шаг 1. Строим множество L={(1,3), (1,3)(4,6), (3,4), ()}.

Шаг 2. Строим группу, порожденную этим множеством: G=[(), (4,6), (3,4), (3,4,6), (3,6,4), (3,6), (1,3), (1,3)(4,6), (1,3,4), (1,3,4,6), (1,3,6,4), (1,3,6), (1,4,3), (1,4,6,3), (1,4), (1,4,6), (1,4)(3,6), (1,4,3,6), (1,6,4,3), (1,6,3), (1,6,4), (1,6), (1,6,3,4), (1,6)(3,4)].

Шаг 3. Находим минимальную систему образующих для этой группы Gen= = [(3,6,4), (1,4,3,6)].

Шаг 4. Строим автомат A =(X,S,δ), $|S|$=6, $|X|$=2, функции переходов которого представлены подстановками

δ_{x_1}=(3,6,4), $\delta_{x_2} = (1,4,3,6)$.

Отметим, что построенный автомат не является универсальным для класса GA_6.

Если группа автомата A обладает некоторыми особыми свойствами, то для проверки универсальности необязательно строить все элементы группы автомата A. Рассмотрим случай, когда группа автомата является циклической.

Определение 5. Будем называть автомат $A=(X,S,\delta)$ групповым циклическим автоматом с образующим элементом $\delta_{x_p} \in G_A$, если его группа является циклической группой с образующим элементом δ_{x_p}, то есть $\{\delta_{x_p}\} = G_A$.

Для семейства циклических групповых автоматов на основании свойств циклических групп [8] можно сформулировать следующее достаточное условие универсальности автомата.

Теорема 3.

Даны семейства групповых циклических автоматов $\{A_i\}_{i\in I} : A_i = (X_i, S, \delta^{(i)})$ с циклическими группами, причем группа автомата $A_i\ (\forall i \in I)$ имеет порядок порядков n_i и порождающий элемент $\delta^{(i)}_{x_p}$. Для того, чтобы групповой автомат $A=(X,S,\delta)$ являлся универсальным перечислителем для семейства $\{A_i\}_{i\in I}$, достаточно, чтобы

$(\forall i \in I)\ (\delta^{(i)}_{x_p})^{k_i} \in \{\delta_x\}_{x\in X}$,

где k_i – взаимно просто с n_i, $(0\le k_i<n)$.

Следовательно, для того, чтобы построить универсальный автомат для семейства циклических групповых автоматов, достаточно в качестве функций переходов универсального автомата взять по одному (любому) образующему элементу для каждого из автоматов семейства.

Пример 3.

Рассмотрим семейство циклических групповых автоматов $\{A_1, A_2\}$, где

$A_1=(X_1,S,\delta^{(1)})$, $|S|=4$, $|X_1|=2$, $\delta^{(1)}{}_{x_1} = (1,4,3)$,

$\delta^{(1)}{}_{x_2} = ()$.

$A_2=(X_2,S,\delta^{(2)})$, $|S|=4$, $|X_2|=3$,

$\delta^{(2)}{}_{x_1} = (1,2,4,3)$, $\delta^{(2)}{}_{x_2} = (1,3,4,2)$,

$\delta^{(2)}{}_{x_3} = (1,4)(2,3)$.

Построим универсальный автомат для этого семейства. Берем образующие элементы для автомата A_1, A_2, например

$\delta_{x_1} = \delta^{(1)}{}_{x_1} = (1,4,3)$, $\delta_{x_2} = \delta^{(2)}{}_{x_1} = (1,2,4,3)$

соответственно, и получаем автомат $A=(X,S,\delta)$, $|S|=4$, $|X|=2$, $\delta_{x_1} = \delta^{(1)}{}_{x_1} = (1,4,3)$, который по *теореме 3* является универсальным для семейства $\{A_1, A_2\}$.

Заметим, что условие *теоремы 3* не является необходимым для универсального автомата некоторого семейства.

Решение задачи анализа теории универсальных групповых автоматов

Перейдем к решению задачи анализа теории универсальных групповых автоматов.

Пусть G_A - группа автомата A. Тогда согласно *теореме 2* автомат, поведение которого моделируется любым подмножеством функций данного множества, будет перечисляться автоматом A и никакой автомат, поведение которого моделируется функциями, не принадлежащими этому множеству, не будет перечисляться автоматом A. Таким образом, можно предложить следующий метод построения семейства автоматов

$\{A_i\}_{i\in I} : A_i = (X_i, S, \delta_i)$,

для которого автомат A является универсальным перечислителем, который и представляет собой решение задачи анализа универсального автомата.

Метод 3.

Вход: Групповой автомат $A=(X,S,\delta)$, число входных сигналов p.

Выход: семейство групповых автоматов $\{A_i\}_{i\in I} : A_i = (X_i, S, \delta_i)$, $|X_i|=p$ таких, что автомат A является универсальным для данного семейства.

Шаг 1. Если автомат является универсальным для семейства GA_m, то любое семейство автоматов с m состояниями является решением задачи анализа. Метод завершен.

Шаг 2. Строим G_A - группу автомата *A*. Пусть ее порядок $\left|G_A\right| = t$.

Шаг 3. Строим все подмножества данного множества мощности *p* $\{F_k\}_{k=\overline{1,C_t^p}}$. Заметим, что таких подмножеств будет C_t^p (число сочетаний из *t* по *p*).

*Шаг 4***.** Строится C_t^p автоматов следующим образом. $\forall i, i=\overline{1,C_t^p}$ конструируется автомат

$A_i = (X, S, \delta_i)$,

где $X_k = \{x_1, x_2, ...x_p\}$, а функции переходов моделируются подстановками множества $\{F_i\}$.

Данный метод реализован функцией UniversalAnalis библиотеки GroupAutomata.

Пример 4.

Дан автомат *A*=(*X*,*S*,*δ*) , |*S*|=4, |*X*|=2, $\delta_{x_1} = (1,2)$, $\delta_{x_2} = (3,4)$.

Требуется построить семейство автоматов с числом входных сигналов *p*=2, для которого *A* является универсальным. Применим *метод 3*.

Шаг 1. Автомат *A* не является универсальным для семейства GA_4, поэтому переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Строим G_A -группу автомата *A*=[(), (3,4), (1,2), (1,2)(3,4)]. Ее порядок =4.

Шаг 3. Строим все подмножества G_A мощности 2: $\{F_k\}_{k=\overline{1,6}}$:

[(),(3,4)], [(),(1,2)], [(),(1,2)(3,4)], [(3,4), (1,2)][(3,4), (1,2)(3,4)], [(1,2), (1,2)(3,4)].

*Шаг 4***.** Строится 6 автоматов

$\{A_i\}_{i=\overline{1,6}} : A_i = (X, S, \delta^{(i)})$, |*X*|=2,

где

$\delta^{(1)}{}_{x_1} = ()$, $\delta^{(1)}{}_{x_2} = (3,4)$;

$\delta^{(2)}{}_{x_1} = ()$, $\delta^{(2)}{}_{x_2} = (1,2)$;

$\delta^{(3)}{}_{x_1} = ()$, $\delta^{(3)}{}_{x_2} = (1,2)(3,4)$;

$\delta^{(4)}{}_{x_1} = (3,4)$, $\delta^{(4)}{}_{x_2} = (1,2)$;

$\delta^{(5)}{}_{x_1} = (3,4)$, $\delta^{(5)}{}_{x_2} = (1,2)(3,4)$;

$\delta^{(6)}{}_{x_1} = (1,2)$, $\delta^{(6)}{}_{x_2} = (1,2)(3,4)$.

Таким образом, в данной статье приведены решения как задачи синтеза, так и задачи анализа теории управления поведением систем на основе свойств функциональной избыточности для класса групповых автоматов.

Библиографический список

1. Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов. - М.: Мир, 1971. - 382 с.

2. Автоматы / Сборник статей под ред. К. Шеннона. - М.: Иностранная литература, 1956. - 403 с.

3. Сытник А. А. Перечислимость при восстановлении поведения автоматов. //Доклады РАН. - 1993. - Т.328. - № 1. – С. 39-41.

4. Шульга Т. Э. Библиотека функций GroupAutomata http://www.seun.ru/faculty/FIIT/KTOIT/GroupAutomata.rar.

5. The GAP Group, GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.10; 2007. (http://www.gap-system.org).

6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1975. – 345 с.

7. Сытник А. А., Вагарина Н. С. Модели автоматов-перечислителей при проектировании отказоустойчивых дискретных систем //Материалы V международной конференции «Автоматизация проектирования дискретных систем». Мн.: ОИПИ НАН Беларуси. – 2004. Т. 1. - С. 79-86.

8. Курош А. Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967. - 648 с.

References

1. John von Neumann. Theory of self-reproducing automatons. Moscow. 1971. 382 c.

2. Automatons // Collected works under the editorship K. Sannon. Moscow: Foreign literature. 1956. 403 c.

3. Sytnik A.A. Enumerability and renewal of automaton behavior. //Reports of RAS. 1993. V.328. № 1.

4. Shulga T.E. Function library GroupAutomata http://www.seun.ru/faculty/FIIT/KTOIT/GroupAutomata.rar.

5. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.10; 2007. (http://www.gap-system.org).

6. Kurosh A.G. The course of higher algebra. Moscow.: The Science , 1975. - 345c.

7. Sytnik A.A., Vagarina N.S. Models of automation- enumerators for engineering fail-safe discrete systems //Proceedings of V International Conference «Computer-aided design of discrete devices». Minsk, 2004, V 1, P. 79-86

8. Kurosh A.G. Group theory. – M.: The Science, 1967. - 648 p.

PROBLEMS OF SYNTHESIS AND ANALYSIS OF THE SYSTEM BEHAVIOUR CONTROL THEORY ON THE BASIS OF FUNCTIONAL REDUNDANCY PROPERTIES FOR THE CLASS OF GROUP AUTOMATA

© 2009 A. A. Sytnik[1], T. E. Shulga[2], N. S. Vagarina[2]

[1]Saratov State Technical University
[2]Saratov State Socio-Economical University

The possibility of controlling the behaviour of the discrete type systems on the basis of functional redundancy properties is investigated. To form the required output combination of reactions only the properties of the current law of functioning due to the time reserve available at the given moment or artificially created are used for this type of control. A finite determinate automaton is considered as a mathematical model of the system, while the theory of universal enumerating automata is used as the basis for solving the problem. The paper presents a solution of synthesis and analysis problem of the universal automata theory for the class of group automata. A free distributed function library for working with group automata is developed and described.

Behaviour control, functional redundancy, group automaton, universal enumerability, GAP function library.

Информация об авторах

Сытник Александр Александрович, доктор технических наук, профессор, действительный член РАЕН, первый проректор, Саратовский государственный технический университет. Область научных интересов: дискретная математика, математические методы и модели сложных систем, современные образовательные технологии. E-mail: sytnika@mail.ru.

Шульга Татьяна Эриковна, кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета информатики и информационных технологий, Саратовский государственный социально-экономический университет. Область научных интересов: математическая кибернетика, теория автоматов, теория управления систем, информационные технологии в образовании. E-mail: shulga@ssea.runnet.ru.

Вагарина Наталья Сергеевна, кандидат физико-математических наук, заместитель директора ИОЦ “Виртуальный филиал Русского музея”, Саратовский государственный социально-экономический университет. Область научных интересов: математическая кибернетика, теория автоматов, теория групп, информационные технологии в образовании. E-mail: Vagarina@ssea.runnet.ru.

Sytnik, Alexander Alexandrovitch, doctor of technical sciences, professor, full member of Russian Academy of Natural Sciences, first deputy rector, Saratov State Technical University. Area of research: discrete mathematics, mathematical methods and models of complex systems, modern educational technologies. E-mail: sytnika@sstu.ru.

Shulga, Tatiana Erikhovna, candidate of physical and mathematical science, dean of the faculty of information science and information technologies, Saratov State Socio-Economical University. Area of research: mathematical cybernetics, theory of automata, theory of system control, information technologies in education. E-mail: shulga@ssea.runnet.ru.

Vagarina, Natalya Sergeyevna, candidate of physical and mathematical science, deputy director of the Information Educational centre "Virtual branch of the Russian museum", Saratov State Socio-Economical University. Area of research: mathematical cybernetics, theory of automata, group theory, information technologies in education. E-mail: vagarina@ssea.runnet.ru.