

## ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЯ И ДЕМУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЯ ПОТОКОВ ДЛЯ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

© 2009 Н. Ф. Бахарева

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

Рассматривается задача построения математических моделей операций мультиплексирования и демуплексирования потоков событий. При этом потоки описываются на уровне двух первых моментов распределений интервалов времени между событиями. Полученные результаты позволяют в свою очередь записать уравнения равновесия потоков, циркулирующих в сетевых моделях, и декомпозировать последние на отдельные узлы для расчёта их характеристик.

*Характеристики распределения потоков - математические ожидания и дисперсии, мультиплексирование и демуплексирование потоков, аппроксимация законов распределений и потоков, уравнения равновесия потоков.*

### Введение

Для решения задачи анализа производительности компьютерной сети, заключающейся в определении всех основных узловых и сетевых характеристик, ее модель прежде должна быть декомпозирована на отдельные узлы с вычислением характеристик входных и выходных потоков в каждом узле. После этого уже могут быть вычислены узловые и сетевые характеристики.

Знание (прогнозирование) характеристик потоков важно также для оптимального или близкого к нему управления ими для ограничения загрузки буферов узлов коммутаций (УК), каналов связи и согласования скоростей передачи и приема информации между узлами источник – адресат и т.д.

В настоящее время не существует аналитических методов для точного определения характеристик распределений потоков в сетевых моделях, кроме их средних значений.

### 1. Постановка задачи и подход к ее решению

Пусть мы имеем открытую сетевую модель с матрицей вероятностей передач  $\mathbf{P}=\{p_{ij}\}$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ), где  $p_{ij}$  – вероятность того, что заявка, покидающая узел  $S_i$ , поступит в узел  $S_j$ . Для начала пусть узел представляет собой одноканальную систему  $GI/G/1$  с бесконечной очередью, для которой определены числовые характеристики слу-

чайного времени обслуживания:  $\bar{\tau}_{\mu_i}$  – среднее значение и  $D_{\mu_i}$  – дисперсия времени обслуживания. Для внешнего потока задана совокупность средних значений  $\bar{\tau}_0$  и дисперсий  $D_0$  времени между соседними заявками рекуррентного потока, входящего в узел  $S_i$ . В последующем узел может быть представлен как СМО с конечной очередью с потерями, а также с конечной очередью без потерь.

Для декомпозиции такой модели на отдельные узлы на уровне средних значений и дисперсий времен поступления и обслуживания заявок при произвольных законах их распределений не существует точных методов. Во многих случаях, например в [1, 2], пользуются только уравнениями равновесия потоков на уровне их интенсивностей  $\lambda_i$ . Такой подход при произвольных потоках в сети МО означает описание случайного потока событий только его средним значением, т. е. математическим ожиданием без учета моментов высших порядков. Как известно, случайный поток событий на практике чаще всего определяется его такими характеристиками, как математическое ожидание, дисперсия и интервально-корреляционная функция. Поэтому учет дисперсий (вторых

моментов распределений) интервалов времен существенно может улучшить результаты расчетов. Описание потоков на уровне двух первых моментов распределений интервалов времен означает их аппроксимацию непрерывным гауссовским процессом с соответствующими характеристиками.

Если рассматривать структуру отдельного узла с номером  $i$  сетевой модели, то на входе  $i$ -го узла сходятся (агрегируются) разрезанные (демультиплексированные) потоки от других узлов с номерами  $j=1, \dots, n$  сети.

Решением системы уравнений (1.1) равновесия потоков относительно интенсивностей  $\lambda_i$  потоков на входе и выходе каждой СМО сети определяем средние значения интервалов времен между соседними заявками  $\bar{\tau} = \lambda_i^{-1}$  для каждого потока в сети:

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{j=1}^n p_{ji} \lambda_j \quad (i=1, \dots, n), \quad (1.1)$$

где  $\lambda_{0i}$  - интенсивность потока извне в  $i$ -й узел.

Для вывода уравнений равновесия потоков относительно дисперсий времен между соседними заявками в потоках нужно знать дисперсии выходных потоков  $D_{\text{вых } j}$  всех узлов, а также формулы для определения дисперсий мультиплексированных и демультиплексированных потоков. Для этого предварительно докажем следующие утверждения.

**Утверждение 1.** Пусть мы имеем точку мультиплексирования потоков (точка  $A$  на рис. 1 или рис. 2), где сходятся два независимых потока заявок с параметрами:  $\bar{\tau}_i = 1/\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ) – среднее время между соседними заявками в потоке  $i$ ,  $D_{\tau_i}$  - дисперсия этого же времени.

Тогда среднее значение и дисперсия времени в суммарном потоке между соседними заявками

$$\bar{\tau}_\Sigma = \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 / (\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2), \quad (1.2)$$

$$D_{\tau_\Sigma} = (\lambda_1/\lambda_\Sigma)^3 D_{\tau_1} + (\lambda_2/\lambda_\Sigma)^3 D_{\tau_2}. \quad (1.3)$$

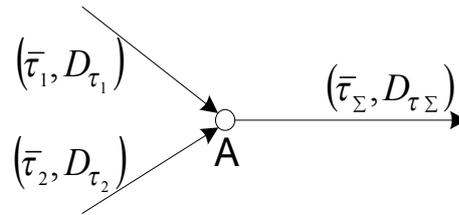


Рис. 1. Мультиплексирование (агрегирование) потоков

**Доказательство.** Пусть  $N(t)$  означает число событий за время  $t$ . Тогда среднее значение потока  $N(t)$ :  $\bar{N} = t/\bar{\tau}$ , где  $\bar{\tau}$  - среднее время между событиями в потоке  $N(t)$ . Аппроксимируем дискретный поток  $N(t)$  непрерывным диффузионным процессом  $x(t)$ . Процесс  $x(t)$  при больших  $t$  будет гауссовским процессом со средним значением  $t/\bar{\tau}$  и дисперсией  $D_\tau \cdot t/\bar{\tau}^3$  [1]. Тогда сумма двух независимых потоков  $N_\Sigma(t) = N_1(t) + N_2(t)$  также будет гауссовским случайным процессом со средним  $t/\bar{\tau}_\Sigma = t/\bar{\tau}_1 + t/\bar{\tau}_2$  и дисперсией  $D_{\tau_\Sigma} \cdot t/\bar{\tau}_\Sigma^3 = D_{\tau_1} \cdot t/\bar{\tau}_1^3 + D_{\tau_2} \cdot t/\bar{\tau}_2^3$ . Отсюда можно записать следующие равенства:  $1/\bar{\tau}_\Sigma = 1/\bar{\tau}_1 + 1/\bar{\tau}_2$  - для среднего времени между соседними событиями в суммарном потоке и  $D_{\tau_\Sigma} = (D_{\tau_1}/\bar{\tau}_1^3 + D_{\tau_2}/\bar{\tau}_2^3) \cdot \bar{\tau}_\Sigma^3$  - для дисперсии того же времени. Из последних равенств уже следует справедливость выражений (1.2) и (1.3). Таким образом, эти равенства получены на основе диффузионного приближения дискретных процессов на уровне двух первых моментов распределений интервалов времен. Утверждение 1 доказано.

**Замечание 1.** Допустимость такого приближения можно обосновать следующим образом. Теория сетей массового обслуживания основывается на двух основных допущениях: 1) статистическая независимость потоков в сети МО; 2) рекуррентность входных в СМО потоков. Заметим, что формула (1.2) точна для любых независимых потоков, а формула (1.3) лишь приближенная вследствие допущения рекуррентности суммарно-

го потока [3, 4]. Это подтверждают и результаты имитационного моделирования.

**Замечание 2.** На основании полученных равенств легко доказывается справедливость утверждения о том, что сумма нескольких пуассоновских потоков даёт снова пуассоновский поток.

**Замечание 3.** Для проверки справедливости выражений (1.2) и (1.3) применялось имитационное моделирование. Заявки генерировались по экспоненциальному, равномерному, нормальному и гиперэкспоненциальному законам распределений времени между заявками. Результаты моделирования, приведенные в табл. 1, показывают, что формула (1.2) справедлива для любых законов распределений потоков, а формула (1.3) точна только для экспоненциального закона распределения. При этом, если коэффициенты вариаций потоков меньше 1, то формула (1.3) занижает дисперсию агрегированного потока. В случае, когда коэффициенты вариаций больше 1, формула (1.3) обеспечивает очень хорошие результаты. Это связано с тем, что моделирование потоков с таким коэффициентом вариации проводилось с использова-

нием гиперэкспоненциального распределения. В таблице 1 через  $\bar{\tau}$  и  $D_{\tau}$  обозначены теоретические моменты, а через  $\bar{\tau}^*$  и  $S_{\tau}^2$  - соответствующие статистические оценки по результатам имитации.

На рис. 2 приведены гистограммы распределений результирующего потока для некоторых законов распределений составляющих потоков, приведенных в табл. 1.

Результаты имитационного моделирования формул мультиплексирования потоков (1.2) и (1.3), приведенные в табл. 1, показывают, что они точны для потоков, коэффициенты вариаций которых больше либо равны 1. Гистограммы распределений, приведенные выше на рис. 2-4, показывают, насколько сильно меняются законы распределений потоков при их мультиплексировании, когда они отличны от пуассоновских.

**Утверждение 2.** Пусть мы имеем точку демультимплексирования потока (точка B на рис.1), в которой заявки с вероятностью  $p$  уходят из потока (просеянный поток 2 на рис. 5). Назовем эту операцию с потоком  $p$  преобразованием. Тогда среднее значение

Таблица 1

$\bar{\tau}_1 / \bar{\tau}_1^*$	$D_{\tau_1} / S_{\tau_1}^2$	$\bar{\tau}_2 / \bar{\tau}_2^*$	$D_{\tau_2} / S_{\tau_2}^2$	$\bar{\tau}_{\Sigma} / \bar{\tau}_{\Sigma}^*$	$D_{\tau_{\Sigma}} / S_{\tau_{\Sigma}}^2$
Законы распределения – равномерный (0:1) и равномерный (0:1)					
0,5/0,499	0,083/0,083	0,5/0,50	0,083/0,083	0,25/0,250	0,021/0,037
Законы распределения – равномерный (0:1) и экспоненциальный с параметром $\lambda=2$					
0,5/0,499	0,083/0,084	0,5/0,497	0,25/0,247	0,25/0,248	0,042/0,046
Законы распределения – экспоненциальный с $\lambda=2$ экспоненциальный с $\lambda=2$					
0,5/0,50	0,25/0,251	0,5/0,499	0,25/0,249	0,25/0,253	0,0625/0,0628
Законы распределения – гиперэксп-ый и гиперэкспон-ый с функцией плотности $f(t) = (2p^2 / \tau) \exp\{-2pt / \tau\} + [2(1-p)^2 / \tau] \exp\{-2(1-p)t / \tau\}$ , где $p=0,8873$ , $\tau=1,0$ .					
1,0/1,023	4,0/4,026	1,0/1,011	4,0/4,012	0,5/0,502	1,0/1,013
Законы распределения – гиперэксп-ый и гиперэкспон-ый с функцией плотности $f(t) = (2p^2 / \tau) \exp\{-2pt / \tau\} + [2(1-p)^2 / \tau] \exp\{-2(1-p)t / \tau\}$ , где $p=0,9472$ , $\tau=1,0$ .					
1,0/0,994	9,0/8,918	1,0/1,014	9,0/9,442	0,5/0,496	2,25/2,351

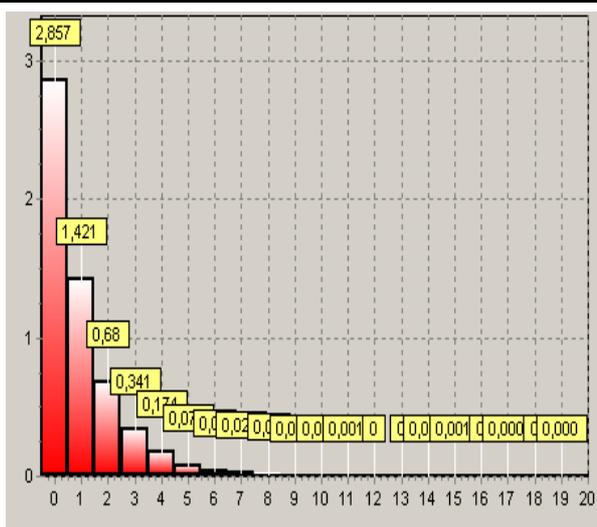


Рис. 2. Гистограмма распределения интервалов времени в суммарном потоке (составляющие распределены по экспоненциальному закону ( $\lambda=2$ ))

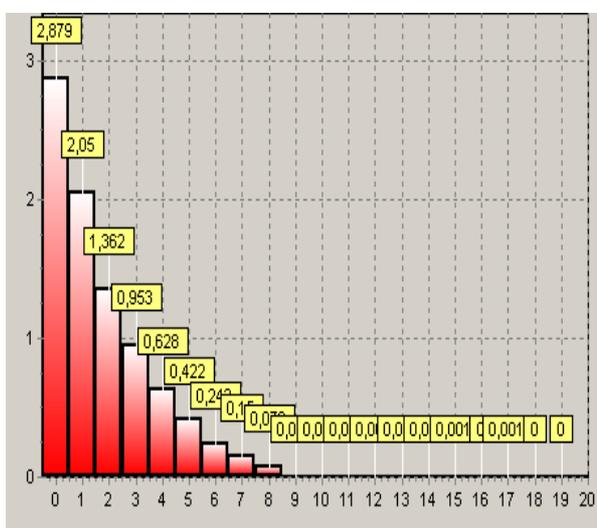


Рис. 3. Гистограмма распределения интервалов времени в суммарном потоке (составляющие распределены по равномерному (0,1) и экспоненциальному ( $\lambda=2$ ) законам)

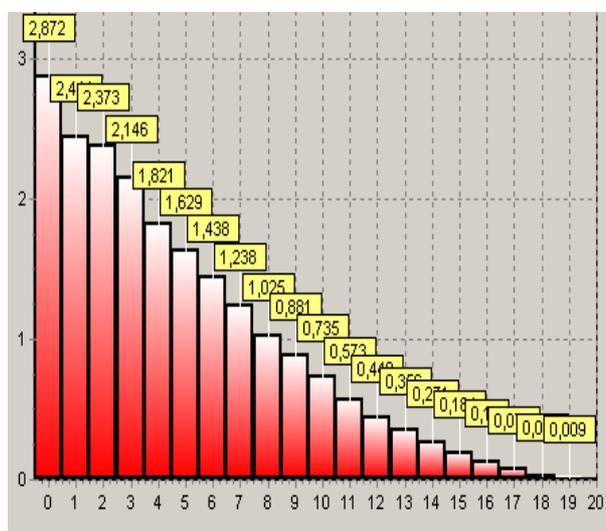


Рис. 4. Гистограмма распределения интервалов времени в суммарном поток. (составляющие распределены по равномерному закону (0,1))

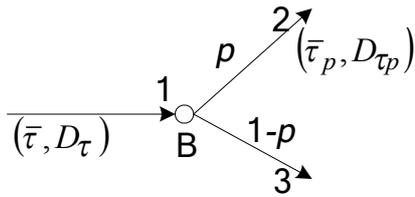


Рис. 5. Демультимплексирование потока ( $p$ -преобразование потока)

и дисперсия времени между соседними событиями в просеянном потоке

$$\bar{\tau}_p = \bar{\tau} / p, \tag{1.4}$$

$$D_{\tau_p} = D_{\tau} / p + \bar{\tau}^2 (1 - p) / p^2. \tag{1.5}$$

**Доказательство.** Представим поток событий с параметрами  $(\bar{\tau}, D_{\tau})$ , где  $\bar{\tau}, D_{\tau}$  - среднее значение и дисперсия времени между соседними событиями как последовательность случайных точек  $\{t_i\}$  на оси времени  $0t$ . Случайные интервалы времени между ними обозначим соответственно через  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ . При разрежении потока 1 случайный интервал времени в потоке 2 -  $\tau_p$  равен:  $\tau_1$  - с вероятностью  $p$ ;  $(\tau_1 + \tau_2)$  - с вероятностью  $pq$ ;  $(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$  - с вероятностью  $pq^2$  и т.д. Запишем выражение для величины  $\tau_p$  следующим образом:

$$\tau_p = \begin{cases} \tau_1 \text{ с вероятностью } p, \\ (\tau_1 + \tau_2) \text{ с вероятностью } pq, \\ (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \text{ с вероятностью } pq^2, \\ \dots \\ (\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_i) \text{ с вероятностью } pq^{i-1}, \\ \dots \end{cases}$$

Здесь вероятность  $q=1-p$ . Заметим, что  $P$  - преобразование потока является случайным его разрежением в отличие от детерминированного просеивания при получении потока Эрланга из простейшего потока.

Определим математическое ожидание величины  $\tau_p$  с учетом того факта, что поток рекуррентный, т.е.

$$M(\tau_i) = M(\tau), \quad M(\tau_i^2) = M(\tau^2):$$

$$\begin{aligned} M(\tau_p) &= M(\tau) \cdot p \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^{i-1} = pM(\tau) \times \\ &\times (q + q^2 + q^3 + \dots)'_q = pM(\tau) \left(\frac{q}{1-q}\right)'_q = \\ &= pM(\tau) \frac{1}{(1-q)^2} = M(\tau) / p. \end{aligned}$$

Для определения дисперсии  $D_{\tau_p}$  вычислим второй начальный момент  $M(\tau_p^2)$ :

$$\begin{aligned} M(\tau_p^2) &= p \sum_{k=1}^{\infty} [kM(\tau^2) + (k^2 - k)(M(\tau))^2] \times \\ &\times q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} [kD_{\tau} + k^2(M(\tau))^2] q^{k-1} = \\ &= pD_{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} + p(M(\tau))^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = \\ &= D_{\tau} / p + (1+q)(M(\tau))^2 / p^2. \end{aligned}$$

Из полученных равенств для  $M(\tau^2)$  и  $M(\tau_p)$  следует справедливость выражений (1.4) и (1.5). Утверждение 2 доказано.

**Следствие.** Полученное из формулы (1.5) выражение для квадрата коэффициента вариации просеянного потока  $c_p^2 = p \cdot c^2 + q$  позволяет судить о характере распределения этого потока. Как видно из последнего выражения, разрежение ( $p$  - преобразование) исходного потока существенно влияет на его закон распределения. При этом для пуассоновского потока его свойство сохраняется.

**Замечание.** Для проверки справедливости выражений (1.4) и (1.5) также использовалось имитационное моделирование. Заявки генерировались по экспоненциальному, равномерному и нормальному законам распределений времени между заявками. Для каждого закона распределения генерировалось по 10000 заявок. Результаты имитаци-

онного моделирования, приведенные в табл. 2, полностью подтверждают справедливость утверждения 2 для любого закона распределения.

На рис. 6-8 приведены гистограммы распределений разреженных потоков для некоторых законов распределений, приведенных в табл. 2.

Результаты имитационного моделирования формул демультиплексирования потоков (1.4) и (1.5), приведенные в табл. 2, показывают, что они являются точными для любых законов распределений. Гистограммы распределений разреженных потоков, приведенные на рис. 6-8, показывают, что демультиплексирование потока также существенно влияет на характер распределения исходного потока, кроме пуассоновского.

В то же время результаты табл. 1 наталкивают на необходимость корректировки формулы вычисления дисперсии мультиплексированного потока (1.3) в сторону повышения точности математической модели в случае, когда коэффициенты вариаций составляющих потоков меньше 1.

**2. Повышение точности математической модели мультиплексирования потоков**

В работе [5] приведено выражение для функции распределения интервала времени  $\tau_\Sigma$  результирующего потока при мультиплексировании двух потоков с интенсивностями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$F_\Sigma(t) = 1 - \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left\{ F_1^\tau(t) \int_t^\infty F_2^\tau(u) du + F_2^\tau(t) \int_t^\infty F_1^\tau(u) du \right\}, \quad (2.1)$$

где  $F_j^\tau(t) = 1 - F_j(t)$ , ( $j=1, 2$ ), а  $F_j(t)$  – функция распределения интервалов времени между событиями в потоке  $j$ . Используя выражение (2.1), определим функцию плотности для результирующего потока для последующего вычисления первых двух моментов его распределения. Для этого введем обозначения:

$$g_1(t) = \int_t^\infty [1 - F_1(u)] du, \quad g_2(t) = \int_t^\infty [1 - F_2(u)] du.$$

Заметим, что  $g_1(0) = \bar{\tau}_1$ ,  $g_2(0) = \bar{\tau}_2$ , т.е. эти функции в точке 0 равны соответствующим средним значениям интервалов времен в потоках. Несложно показать, что тогда функция плотности

$$f_\Sigma(t) = F'_\Sigma(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} [g_1(t) \cdot g_2(t)]''.$$

Математическое ожидание, т. е. среднее значение интервала между событиями в результирующем потоке

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_\Sigma &= \int_0^\infty t f_\Sigma(t) dt = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^\infty t \cdot [g_1(t) \cdot g_2(t)]'' dt = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} [t \cdot (g_1(t) \cdot g_2(t))]' \Big|_0^\infty - \int_0^\infty [g_1(t) \cdot g_2(t)]' dt. \end{aligned}$$

Таблица 2

Закон распределения – экспоненциальный с параметром $\lambda=2; p=0,2; q=0,8$					
$\bar{\tau} / \bar{\tau}^*$	$D_\tau / S_\tau^2$	$\bar{\tau}_p / \bar{\tau}_p^*$	$D_{\tau p} / S_{\tau p}^2$	$\bar{\tau}_q / \bar{\tau}_q^*$	$D_{\tau q} / S_{\tau q}^2$
0,5/0,498	0,25/0,249	2,5/2,491	6,25/6,121	0,625/0,622	0,39/0,389
Закон распределения – экспоненциальный с параметром $\lambda=0,5; p=0,2; q=0,8$					
2,0/2,01	4,0/4,01	10,0/9,96	100,0/99,33	2,5/2,51	6,25/6,308
Закон распределения – равномерный с параметрами $a=1, b=3; p=0,2; q=0,8$					
2,0/2,001	0,333/0,333	10,0/9,99	81,666/84,23	2,5/2,51	1,666/1,703
Закон распределения – нормальный с параметрами $m_\tau=2, \sigma_\tau=0,5; p=0,2; q=0,8$					
2,0/1,993	0,25/0,249	10,0/9,98	80,25/80,59	2,5/2,497	38,75/38,26

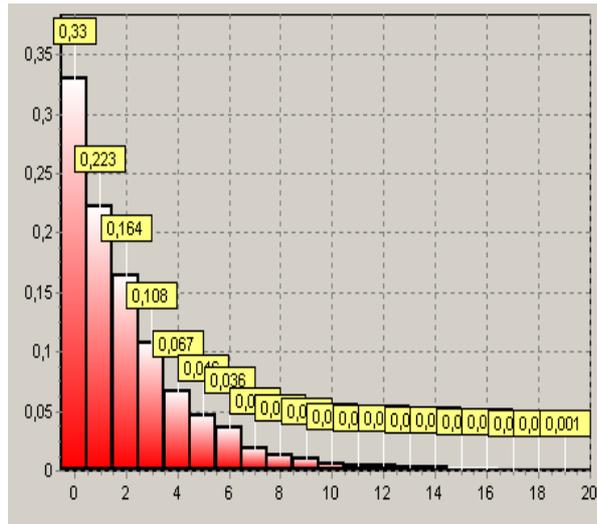


Рис. 6. Гистограмма распределения интервалов времени в разреженном потоке (входной поток распределен по экспоненциальному закону ( $\lambda=2, p=0,2$ ))

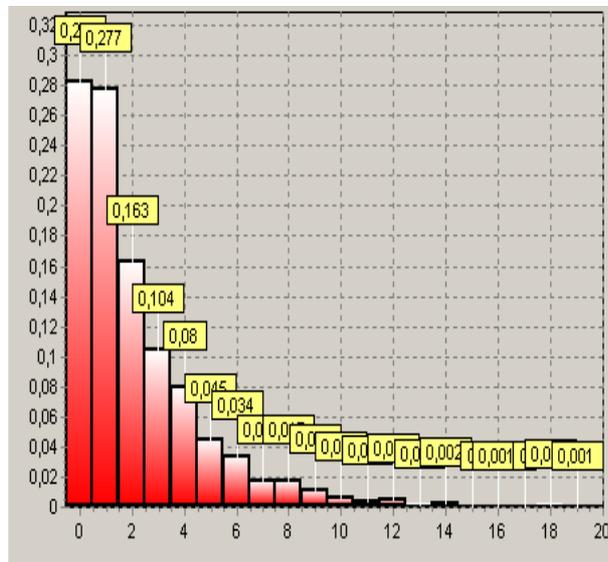


Рис. 7. Гистограмма распределения интервалов времени в разреженном потоке (входной поток распределен по равномерному закону ( $(0,1), p=0,2$ ))

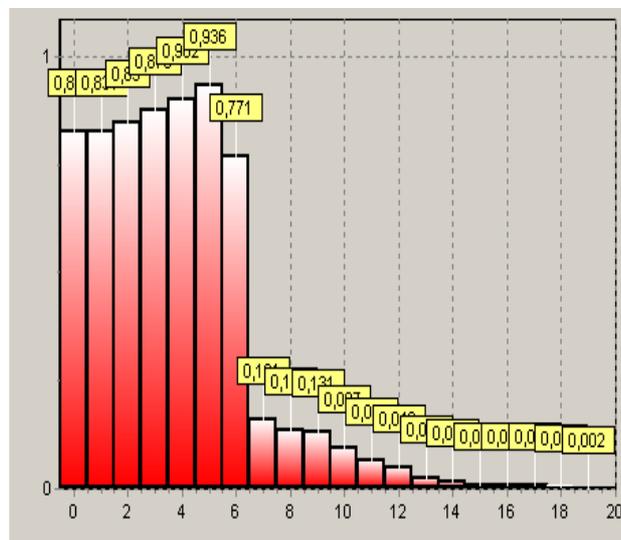


Рис. 8. Гистограмма распределения интервалов времени в разреженном потоке (входной поток распределен по равномерному закону ( $(0,1), p=0,8$ ))

Здесь первое слагаемое в правой части равно нулю при определенных ограничениях на функции распределения  $F_j(t)$ , а именно, для функции из семейства экспоненциальных распределений. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_\Sigma &= -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} [g_1(t) \cdot g_2(t)]|_0^\infty = \\ &= 0 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{\lambda_\Sigma}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

что полностью подтверждает справедливость формулы (2.1). Результаты, полученные по формуле (2.2), совпадают с результатами аналогичной формулы (1.2).

Определим теперь второй начальный момент распределения интервала  $\tau_\Sigma$  для вычисления дисперсии этой случайной величины:

$$\begin{aligned} M(\tau_\Sigma^2) &= \int_0^\infty t^2 f_\Sigma(t) dt = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^\infty t^2 [g_1(t) g_2(t)]'' dt = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \{t^2 [g_1(t) g_2(t)]'|_0^\infty - 2 \int_0^\infty t [g_1(t) g_2(t)]' dt\}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части последнего выражения при тех же ограничениях на функции  $F_j(t)$  опять будет равно нулю. Тогда, вычисляя второй интеграл по частям, получим

$$M(\tau_\Sigma^2) = -2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} [t g_1(t) g_2(t)]|_0^\infty - \int_0^\infty g_1(t) g_2(t) dt].$$

Здесь первое слагаемое снова равно нулю. Тогда окончательно имеем:

$$M(\tau_\Sigma^2) = 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^\infty g_1(t) g_2(t) dt, \quad (2.3)$$

а дисперсия времени между событиями в результирующем потоке

$$D(\tau_\Sigma) = M(\tau_\Sigma^2) - \frac{1}{\lambda_\Sigma^2}. \quad (2.4)$$

Под интегралом в выражении (2.3) стоит произведение двух функций, и, таким об-

разом, в общем случае дисперсию величины  $\tau_\Sigma$ -интервала времени между событиями результирующего потока нельзя будет выразить в виде элементарной функции от дисперсий и математических ожиданий составляющих. Этот интеграл можно вычислить только при конкретных выражениях функций распределений  $F_j(t)$ . Учитывая тот факт, что в сетевых моделях и в самих реальных сетях мы не знаем точных законов распределений потоков, остается единственно возможный путь для вычисления этого интеграла через элементарные функции – это аппроксимация функций  $g_i(t)$  ( $i=1,2$ ) на уровне двух первых моментов распределений интервалов времени. Эти моменты можно на практике определить путем съема трафика с помощью программно-аппаратных средств измерения трафика в узлах сети.

Рассмотрим конкретные примеры распределений. В качестве первого примера возьмем два экспоненциально распределенных потока с параметрами:

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}, F_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}.$$

Тогда по формуле (2.3) получим

$$M(\tau_\Sigma^2) = 2 / (\lambda_1 + \lambda_2)^2,$$

следовательно, дисперсия величины  $\tau_\Sigma$  -

$$D_{\tau_\Sigma} = 1 / (\lambda_1 + \lambda_2)^2,$$

что полностью совпадает с выражением (1.3), если в него вместо дис-

персий  $D_{\tau_i}$  подставить их значения  $1 / \lambda_i^2$ .

Это означает, что при мультиплексировании потоков, распределенных по экспоненциальному закону, снова получается пуассоновский поток.

В качестве следующего примера рассмотрим два независимых потока событий, распределенных по равномерному закону на интервале (0;1). Тогда дисперсия величины  $\tau_\Sigma$  по формуле (2.4)

$$D_{\tau_\Sigma} = 2 \int_0^1 \int_t^1 (1-u) du \int_t^1 (1-u) du dt - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}.$$

Формула же (1.3) в этом случае дает результат 1/48, следовательно, она занижает

дисперсию результирующего потока в случае, когда его составляющие имеют коэффициент вариации, меньший 1. Так же можно показать, что в том случае, когда коэффициенты вариаций  $c_{\lambda_j}$  составляющих результирующего потока больше 1, формула (1.3) будет обеспечивать хорошие результаты. Следовательно, функции распределения  $F_j(t)$  необходимо аппроксимировать отдельно при  $c_{\lambda_j} < 1$  и  $c_{\lambda_j} > 1$ .

### 3. Определение параметров аппроксимирующих функций распределений

Как известно из теории массового обслуживания, такими функциями распределения в первом случае является гипоекспоненциальное распределение, а во втором – гиперэкспоненциальное [1, 5].

Функция распределения в первом случае

$$F_j^*(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau_{j1} \\ 1 - \exp\{-(t - \tau_{j1})/\tau_{j2}\}, & t \geq \tau_{j1}, \end{cases} \quad (3.1)$$

а во втором

$$F_j^*(t) = 1 - p_j \exp(-2p_j t / \tau_j) - (1 - p_j) \exp[-2(1 - p_j)t / \tau_j]. \quad (3.2)$$

Возникает задача выбора параметров распределений (3.1) и (3.2). Для этого определим функции  $g_j(t) = \int_t^\infty [1 - F_j(z)] dz$ , подставив в их выражения (3.1) в случае  $c_{\lambda_j} \leq 1$ ,  $j=1, 2$ :

$$g_j(t) = \begin{cases} \tau_{j1} + \tau_{j2} - t, & t \leq \tau_{j1} \\ \tau_{j2} \exp\{-(t - \tau_{j1})/\tau_{j2}\}, & t \geq \tau_{j1}. \end{cases} \quad (3.3)$$

В случае  $c_{\lambda_j} > 1$  подставим (3.2) в выражение для функции  $g_j(t)$ :

$$g_j(t) = \tau_j \{ \exp[-2p_j t / \tau_j] + \exp[-2(1 - p_j)t / \tau_j] \} / 2. \quad (3.4)$$

Если же при этом один поток будет иметь коэффициент вариации меньше 1, а другой – больше 1, то в таком случае функции  $g_j(t)$ , очевидно, будут скомбинированы из выражений (3.3) и (3.4). Параметры искомым аппроксимирующих функций распределений (3.1) и (3.2) подберем, используя метод моментов, приравняв первые два момента данных распределений. Математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону (3.1), равно

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_j^* &= \int_{\tau_{j1}}^\infty t \exp\{-(t - \tau_{j1})/\tau_{j2}\} / \tau_{j2} dt = \\ &= -t \exp\{-(t - \tau_{j1})/\tau_{j2}\} \Big|_{\tau_{j1}}^\infty + \\ &+ \int_{\tau_{j1}}^\infty \exp\{-(t - \tau_{j1})/\tau_{j2}\} dt = \tau_{j1} + \tau_{j2}. \end{aligned}$$

Проинтегрировав дважды по частям, найдем дисперсию распределения (3.1):

$$D_{\tau_j}^* = \tau_{j2}^2 \quad (j = 1, 2).$$

Используя метод моментов, запишем:

$$\begin{cases} \tau_{j1} + \tau_{j2} = \bar{\tau}_j \\ \tau_{j2}^2 = D_{\tau_j}. \end{cases}$$

Отсюда параметры функции распределения (3.1) равны:

$$\begin{aligned} \tau_{j1} &= \bar{\tau}_j - \sqrt{D_{\tau_j}}, \\ \tau_{j2} &= \sqrt{D_{\tau_j}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Аналогично проделаем те же операции с функцией распределения (3.2). В этом случае функция плотности

$$\begin{aligned} f_j^*(t) &= \frac{2p_j^2}{\tau_j} \exp\left\{-\frac{2p_j t}{\tau_j}\right\} + \\ &+ \frac{2(1 - p_j)^2}{\tau_j} \exp\left\{-\frac{2(1 - p_j)t}{\tau_j}\right\}. \end{aligned}$$

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по этому закону,

равно  $\bar{\tau}_j^* = \tau_j$ . Дисперсию этой величины найдем, дважды проинтегрировав по частям

интеграл  $\int_0^\infty t^2 f_j^*(t) dt$ :

$$D_{\tau_j}^* = \tau_j^2 [1/2 p_j + 1/2(1-p_j)] - \tau_j^2. \quad (3.6)$$

Параметр распределения (3.2)

$$\tau_j = \bar{\tau}_j. \quad (3.7)$$

Из (3.6) определим значение вероятности  $p_j$ :

$$p_j = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}_j^2}{2(D_{\tau_j} + \bar{\tau}_j^2)}}. \quad (3.8)$$

Таким образом, параметры функций распределений  $F_j^*(t)$ , аппроксимирующих законы распределений  $F_j(t)$  составляющих результирующего потока, полностью определены для всех случаев  $c_{\lambda_j} \leq 1$  и  $c_{\lambda_j} > 1$ . Тогда, подставив функции  $g_j(t)$   $j=1,2$  с однозначно определенными их параметрами в выражения (2.3), (2.4), после вычисления всех интегралов можем определить дисперсию интервала времени мультиплексированного потока. Такой путь является единственным для определения более точного значения этой дисперсии.

#### 4. Определение характеристик распределения мультиплексированного потока

Как было показано выше, среднее значение интервала времени в результирующем потоке легко определяется по формуле (2.2) независимо от значений коэффициентов вариаций распределений составляющих потоков. Теперь перейдем к определению дисперсии распределения того же интервала в случае  $c_{\lambda_j} \leq 1$ . Для этого в формулы (2.3) и (2.4) подставим выражение (3.3) с найденными ранее параметрами распределения (3.5). Тогда в случае  $\tau_{11} < \tau_{21}$

$$\begin{aligned} M(\tau_\Sigma^2) &= 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^\infty g_1(t) \cdot g_2(t) dt = \\ &= 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left\{ \int_0^{\tau_{11}} (\tau_{11} + \tau_{12} - t)(\tau_{21} + \tau_{22} - t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_{11}}^{\tau_{21}} \tau_{12}(\tau_{21} + \tau_{22} - t) \exp[-(t - \tau_{11})/\tau_{12}] dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_{21}}^\infty \tau_{12} \tau_{22} \exp[-(t - \tau_{11})/\tau_{12} - (t - \tau_{21})/\tau_{22}] dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В случае  $\tau_{11} > \tau_{21}$

$$\begin{aligned} M(\tau_\Sigma^2) &= 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left\{ \int_0^{\tau_{21}} (\tau_{11} + \tau_{12} - t)(\tau_{21} + \tau_{22} - t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_{21}}^{\tau_{11}} \tau_{22}(\tau_{11} + \tau_{12} - t) \exp[-(t - \tau_{21})/\tau_{22}] dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_{11}}^\infty \tau_{12} \tau_{22} \exp[-(t - \tau_{11})/\tau_{12} - (t - \tau_{21})/\tau_{22}] dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В случае же равенства значений  $\tau_{11} = \tau_{21}$  второй интеграл в выражениях (4.1) и (4.2) будет равен 0. Обозначив интегралы в правых частях выражений (4.1) и (4.2) через  $I_1, I_2, I_3$ , запишем их значения в случае  $\tau_{11} < \tau_{21}$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= (\tau_{11}^2 / 2)(\tau_{21} + \tau_{22} - \tau_{11} / 3 - \tau_{12}) + \\ &\quad + \tau_{11} \tau_{12} (\tau_{21} + \tau_{22}), \\ I_2 &= \tau_{12}^2 (\tau_{21} + \tau_{22} - \tau_{11} - \tau_{12}) + \\ &\quad + \tau_{12}^2 (\tau_{12} - \tau_{22}) \exp[-(\tau_{21} - \tau_{11})/\tau_{12}], \\ I_3 &= \tau_{12}^2 \tau_{22}^2 \exp[(\tau_{11} - \tau_{21})/\tau_{12}] / (\tau_{12} + \tau_{22}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В случае  $\tau_{11} > \tau_{21}$  эти интегралы равны:

$$I_1 = (\tau_{21}^2 / 2)(\tau_{11} + \tau_{12} - \tau_{21} / 3 - \tau_{22}) + \tau_{21}\tau_{22}(\tau_{11} + \tau_{12}),$$

$$I_2 = \tau_{22}^2(\tau_{11} + \tau_{12} - \tau_{21} - \tau_{22}) + \tau_{22}^2(\tau_{22} - \tau_{12})\exp[-(\tau_{11} - \tau_{21}) / \tau_{22}], \quad (4.4)$$

$$I_3 = \tau_{12}^2 \tau_{22}^2 \exp[(\tau_{21} - \tau_{11}) / \tau_{22}] / (\tau_{12} + \tau_{22}).$$

Здесь параметры распределений  $\tau_{jk}$  ( $j=k=1,2$ ) определяются выражениями (3.5). Подставив полученные значения интегралов (4.3) в (4.1), а – (4.4) в (4.2) для второго начального момента распределения интервала времени между событиями результирующего потока, определяем дисперсию распределения этого интервала:

$$D(\tau_{\Sigma}) = M(\tau_{\Sigma}^2) - \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} = 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (I_1 + I_2 + I_3) - \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}. \quad (4.5)$$

Теперь те же операции выполним для случая гиперэкспоненциального распределения составляющих. Для этого функции  $g_j(t)$ , определяемые выражением (3.4) с параметрами распределения (3.7) и (3.8), подставим в (2.3).

$$\begin{aligned} M(\tau_{\Sigma}^2) &= 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^{\infty} g_1(t) \cdot g_2(t) dt = \\ &= 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\tau_1 \tau_2}{4} \left\{ \int_0^{\infty} \exp[-2(\frac{p_1}{\tau_1} + \frac{p_2}{\tau_2})t] dt + \right. \\ &+ \int_0^{\infty} \exp[-2(\frac{p_1}{\tau_1} + \frac{2(1-p_2)}{\tau_2})t] dt + \\ &+ \int_0^{\infty} \exp[-2(\frac{2(1-p_1)}{\tau_1} + \frac{p_2}{\tau_2})t] dt + \\ &+ \left. \int_0^{\infty} \exp[-2(\frac{2(1-p_1)}{\tau_1} + \frac{2(1-p_2)}{\tau_2})t] dt \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $I'_1, I'_2, I'_3$  и  $I'_4$  интегралы, стоящие в фигурных скобках, и определим их значения:

$$I'_1 = \frac{\tau_1^2 \tau_2^2}{8(p_1 \tau_2 + p_2 \tau_1)}; \quad I'_2 = \frac{\tau_1^2 \tau_2^2}{8[p_1 \tau_2 + (1-p_2)\tau_1]};$$

$$I'_3 = \frac{\tau_1^2 \tau_2^2}{8[p_2 \tau_1 + (1-p_1)\tau_2]};$$

$$I'_4 = \frac{\tau_1^2 \tau_2^2}{8[(1-p_1)\tau_2 + (1-p_2)\tau_1]}. \quad (4.6)$$

Тогда дисперсия величины  $\tau_{\Sigma}$  при гиперэкспоненциальном распределении составляющих результирующего потока будет равна

$$D_{\tau_{\Sigma}} = 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (I'_1 + I'_2 + I'_3 + I'_4) - \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}. \quad (4.7)$$

Далее рассмотрим последний случай, когда одна составляющая результирующего потока имеет коэффициент вариации  $c_{\lambda_j} \leq 1$ , а вторая –  $c_{\lambda_j} > 1$ . Не умаляя общности, в качестве функции  $g_1(t)$  возьмем функцию (3.1), а в качестве функции  $g_2(t)$  – функцию (3.2) с известными уже параметрами. Тогда, подставив эти функции в (2.3), получим

$$\begin{aligned} M(\tau_{\Sigma}^2) &= 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^{\infty} g_1(t) \cdot g_2(t) dt = \\ &= \int_0^{\tau_{11}} (\tau_{11} + \tau_{12} - t) [\exp(-2p_2 t / \tau_2) + \\ &+ \exp(-2(1-p_2)t / \tau_2)] (\tau_2 / 2) dt + \\ &+ \int_{\tau_{11}}^{\infty} \tau_{12} \exp[-(t - \tau_{11}) / \tau_{12}] \times \\ &\times [\exp(-2p_2 t / \tau_2) + \exp(-2(1-p_2)t / \tau_2)] \times \\ &\times (\tau_2 / 2) dt. \end{aligned}$$

Обозначим первый интеграл через  $I''_1$ , второй –  $I''_2$ .

Выражение  $I''_1$  найдем после интегрирования по частям:

$$I_1'' = (\tau_{11} + \tau_{12})\tau_2^2 / (4p_2) - [\tau_{12}\tau_2^2 / (4p_2) - \tau_2^3 / (8p_2^2)] \exp(-2p_2\tau_{11} / \tau_2) - \tau_2^3 / (8p_2^2) + (\tau_{11} + \tau_{12})\tau_2^2 / [4(1 - p_2)] - \tau_{12}\tau_2^2 / [4(1 - p_2)] - \tau_2^3 / [8(1 - p_2)^2] \exp[-2(1 - p_2)\tau_{11} / \tau_2] - \tau_2^3 / [8(1 - p_2)^2],$$

$$I_2'' = \frac{\tau_{12}^2\tau_2^2}{2} \left[ \frac{\exp(-2p_2\tau_{11} / \tau_2)}{\tau_2 + 2p_2\tau_{12}} + \frac{\exp[-2(1 - p_2)\tau_{11} / \tau_2]}{\tau_2 + 2(1 - p_2)\tau_{12}} \right]. \quad (4.8)$$

Тогда

$$D_{\tau\Sigma} = 2 \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (I_1'' + I_2'') - \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}. \quad (4.9)$$

Схема алгоритма операции мультиплексирования двух потоков, реализованная по вышеполученным формулам, представлена на рис. 9.

Теперь по аналогии с уравнениями равновесия потоков на уровне их средних зна-

чений (2.1) можем записать уравнения равновесия относительно их дисперсий:

$$D_{i_{\text{вх}}} = D(\Pi_{0i} * (\Pi_{1i} * \dots * (\Pi_{n-1,i} * \Pi_{ni}))). \quad (4.10)$$

Здесь  $D$  - операция вычисления дисперсии, а  $(\Pi_{j-1,i} * \Pi_{ji})$  означает попарное мультиплексирование выходных потоков от  $(j-1)$ -го ( $\Pi_{j-1,i}$ ) и  $j$ -го узлов ( $\Pi_{ji}$ ), поступающих на вход  $i$ -го узла после их  $p$  преобразования. Тогда дисперсии этих потоков равны:

$$D_{\Pi_{ji}} = \frac{1}{p_{ji}} (D_{j_{\text{вх}}} + \frac{1 - p_{ji}}{p_{ji} \cdot \lambda_j^2}) \quad (i, j=1, 2, \dots, n);$$

$D_{0i}$  - дисперсия потока  $\Pi_{0i}$  от внешнего источника, поступающего на вход  $i$ -го узла. Решение уравнений (1.1) и (4.10) позволяет декомпозировать сетевую модель на отдельные узлы на уровне двух первых моментов распределений потоков для последующего расчета их характеристик.

Таблица 3

$\bar{\tau}_1 / \bar{\tau}_1^*$	$D_{\tau_1} / S_{\tau_1}^2$	$\bar{\tau}_2 / \bar{\tau}_2^*$	$D_{\tau_2} / S_{\tau_2}^2$	$\bar{\tau}_\Sigma / \bar{\tau}_\Sigma^*$	$D_{\tau\Sigma} / S_{\tau\Sigma}^2$
Законы распределения – равномерный (0:1) и равномерный (0:1)					
0,5/0,499	0,083/0,083	0,5/0,50	0,083/0,083	0,25/0,250	0,029/0,037
Законы распределения – равномерный (0:1) и экспоненциальный с параметром $\lambda = 2$					
0,5/0,499	0,083/0,084	0,5/0,497	0,25/0,247	0,25/0,248	0,041/0,046
Законы распределения – экспоненциальный с $\lambda = 2$ экспоненциальный с $\lambda = 2$					
0,5/0,50	0,25/0,251	0,5/0,499	0,25/0,249	0,25/0,253	0,0625/0,0628
Законы распределения – гиперэксп-ый и гиперэкспон-ый с функцией плотности $f(t) = (2p^2 / \tau) \exp\{-2pt / \tau\} + [2(1 - p)^2 / \tau] \exp\{-2(1 - p)t / \tau\}$ , где $p=0,8873$ , $\tau = 1,0$ .					
1,0/1,023	4,0/4,026	1,0/1,011	4,0/4,012	0,5/0,502	0,625/0,999
Законы распределения – гиперэксп-ый и гиперэкспон-ый с функцией плотности $f(t) = (2p^2 / \tau) \exp\{-2pt / \tau\} + [2(1 - p)^2 / \tau] \exp\{-2(1 - p)t / \tau\}$ , где $p=0,9472$ , $\tau = 1,0$ .					
1,0/0,994	9,0/8,918	1,0/1,014	9,0/9,442	0,5/0,496	1,25/2,351
Законы распределения – гиперэксп-ый с функцией плотности $f(t) = (2p^2 / \tau) \exp\{-2pt / \tau\} + [2(1 - p)^2 / \tau] \exp\{-2(1 - p)t / \tau\}$ , где $p=0,8873$ , $\tau = 1,0$ и равномерный (0,2)					
1,0/1,001	4,0/3,996	1,0/0,996	0,333/0,333	0,5/0,500	0,204/0,246

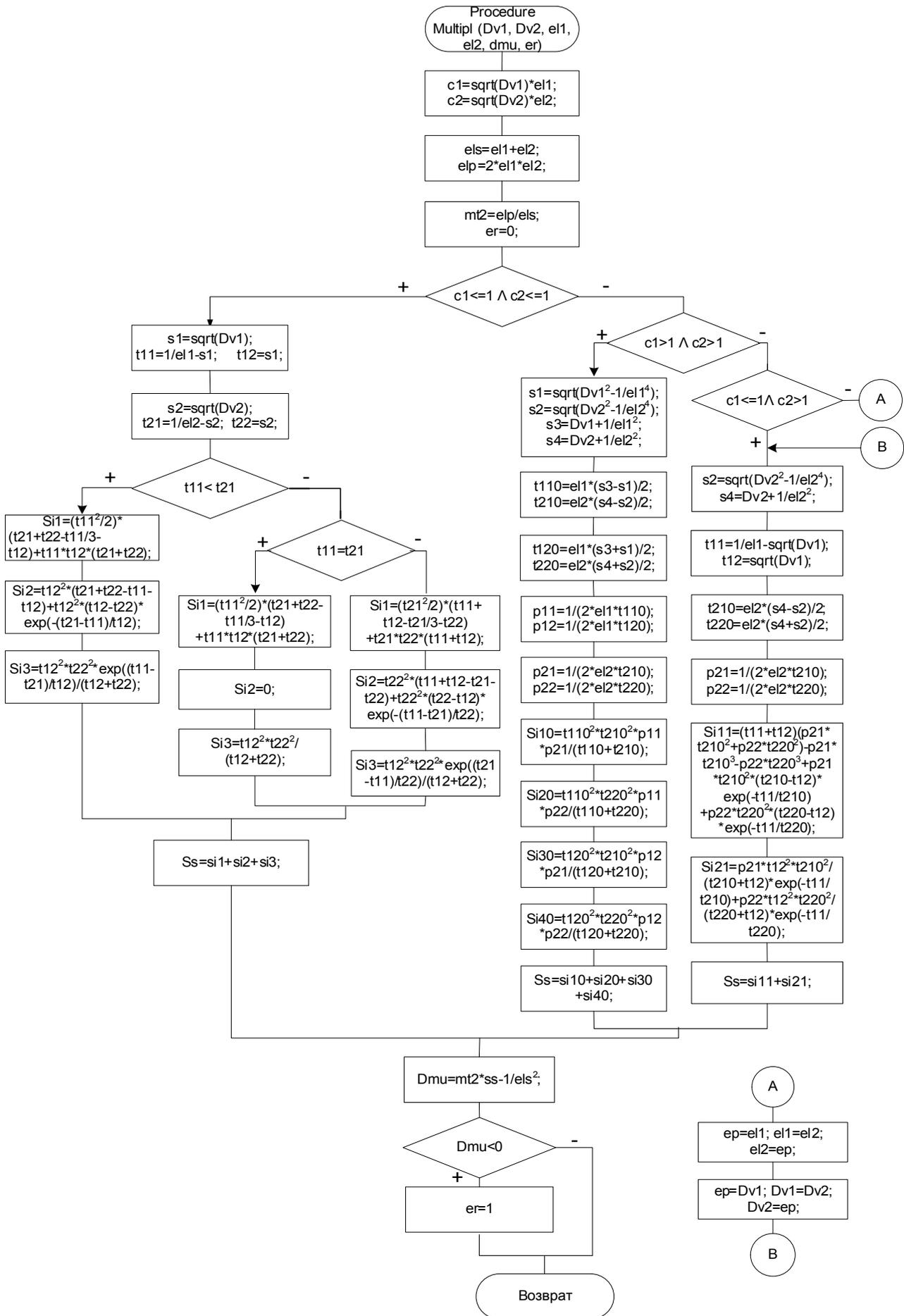


Рис. 9. Схема алгоритма процедуры мультиплексирования потоков

### Заключение

В классической литературе по теории массового обслуживания недостаточно внимания уделено вычислению моментных характеристик мультиплексированных (агрегированных) потоков и демультимплексированного (разреженного) потока. Например, в [6] приводятся формулы вычисления дисперсии результирующего потока для случая предельного пуассоновского потока, а разреженного – для случая потоков Пальма. Следует заметить, что вышеприведенные результаты автора справедливы для любых стационарных потоков.

Полученные математические результаты по мультиплексированию двух различных потоков реализованы в виде процедуры Multipl с соответствующими параметрами. Схема алгоритма этой процедуры приведена на рис. 9.

В табл. 3 приведены результаты имитационного моделирования по мультиплексированию потоков в сравнении с результатами расчетов по полученным математическим моделям во второй части статьи. Анализ результатов таблиц 1 и 3 показывает, что формула мультиплексирования потоков (1.3) точнее для потоков, коэффициенты вариаций которых больше или равны 1, чем формула (4.7). И наоборот, формула для вычисления дисперсии результирующего потока в случае, когда коэффициенты вариаций составляющих потоков меньше 1 - (4.5), а также в смешанном случае (4.9), точнее формулы (1.3).

### Библиографический список

1. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями: Пер. с англ./ Под ред. Б.С. Цыбакова. - М.: Мир, 1979. - 597 с.

2. Вишневецкий В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.

3. Тарасов В. Н. Вероятностное компьютерное моделирование сложных систем. – Самара: Самарский научный центр РАН, 2002. – 194 с.

4. Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф. Организация интерактивной системы вероятностного моделирования стохастических систем // Известия Самарского научного центра РАН, 2003. - №1 - С. 119 – 126.

5. Шнепс М. А. Системы распределения информации. Методы расчета. Справочное пособие. – М.:Связь, 1979. – 342 с.

6. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1969. - 324 с.

### References

1. Kleinrock L. Computing systems with queues: the Lane with English / Under the editorship of B.S.Tsybakova. - M: the World, 1979.

2. Vishnevsky V.M. The theoretical of a basis of designing of computer networks. – M: the Technosphere, 2003.

3. Tarasov V. N. Probability computer modelling of difficult systems. – Samara: the Samara centre of science of the Russian Academy of Sciences, 2002.

4. Tarasov V. N., Bahareva N.F. Organisation of interactive system of stochastic modelling of stochastic systems//News of the Samara centre of science of the Russian Academy of Sciences, 2003, №1, With. 119 – 126.

5. Shneps M. A. Systems of allocation of the information. Calculation methods. The handbook. – M.:Link, 1979.

**PROGRAMME REALIZATION OF MATHEMATICAL OPERATIONS OF FLOW  
MULTIPLEXING AND DEMULTIPLEXING FOR NETWORK MODELS**

© 2009 N. F. Bakhareva

Povolzhsky State University of Telecommunications and Information Science

The paper deals with the problem of constructing mathematical models of event flow multiplexing and demultiplexing operations. The flows are described at the level of the first two moments of time distribution between events. The results obtained make it possible to write the equilibrium equations for the flows circulating in network models and to decompose the latter into individual nodes to calculate their characteristics.

*Flow distribution characteristics – mathematical expectations and dispersions, flow multiplexing and demultiplexing, approximation of distribution laws and flows, flow equilibrium equations.*

**Информация об авторе**

**Бахарева Надежда Федоровна**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Программное обеспечение и управление в технических системах», Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики». Область научных интересов: программирование, моделирование компьютерных систем. E-mail: vt@ist.psati.ru.

**Bakhareva, Nadezhda Fyodorovna**, candidate of technical science, associate professor of the department “Software and control in engineering systems”, Povolzhsky State University of Telecommunications and Information Science. Area of research: programming, modeling of computer systems. E-mail: vt@ist.psati.ru.