

ПРИМЕНЕНИЕ ПОДХОДА ЛАГРАНЖА К РЕШЕНИЮ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ГАЗЕ В ЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

© 2009 В. В. Никонов, В. Г. Шахов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматривается моделирование распространения одномерных волн в газе с помощью различных численных схем. Наряду с известными схемами предлагается схема решения задачи акустики, использующая подход Лагранжа к описанию движения среды. Результаты численного решения для трёх типов начальных условий сравниваются с аналитическим решением. Делаются выводы о применимости рассмотренных схем. Показано, что для предлагаемой схемы можно варьировать шагом по времени, не снижая точности решения.

Идеальный газ, одномерная волна, численный метод, задача акустики, схема «вверх по потоку», метод Годунова, подход Лагранжа, аналитическое решение.

1. Математическая формулировка задачи

Уравнения, описывающие одномерную задачу линейной акустики, получаются из уравнений Навье-Стокса при отбрасывании конвекционных и вязких членов. Закон изменения давления считается адиабатическим, в результате в размерных переменных будем иметь [1]

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \rho^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = 0,$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{c^{*2}}{\rho^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial x^*} = 0. \quad (1)$$

Здесь u^* – скорость, ρ^* – плотность, x^* – координата, t^* – время, $c^{*2} = k p^* / \rho^*$ – квадрат скорости звука, p^* – давление, k – показатель адиабаты.

Введя следующие безразмерные переменные: $u = u^* / u_0$, $\rho = \rho^* / \rho_0$, $x = x^* / b$, $t = t^* b / u_0$, $c = c^* / u_0$, где b – характерный размер, u_0 – характерная скорость, ρ_0 – характерная плотность, и полагая постоянными коэффициенты при производных, получим [1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где $c_0^2 = k p_0 / (\rho_0 u_0^2)$.

Систему (2), сделав следующую замену переменных

$$w_1 = u + c_0 \rho,$$

$$w_2 = u - c_0 \rho, \quad (3)$$

можно привести к системе уравнений, аналогичных уравнениям конвекции (переноса) [1]:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + c_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - c_0 \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Система (4) имеет [1] следующее аналитическое решение:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left[u^0(x - c_0 t) + u^0(x + c_0 t) \right] + \frac{c_0}{2} \left[\rho^0(x - c_0 t) - \rho^0(x + c_0 t) \right],$$

$$\rho(t, x) = \frac{1}{2c_0} [u^0(x - c_0 t) - u^0(x + c_0 t)] + \frac{1}{2} [\rho^0(x - c_0 t) + \rho^0(x + c_0 t)], \quad (5)$$

где нулевой верхний индекс указывает на значения переменных из начальных условий (НУ) задачи.

2. Численные схемы применяемых методов

2.1. Применение центральной конечно-разностной схемы для решения уравнений линейной акустики в переменных скорость-плотность

Будем использовать «шахматную» сетку, когда значения плотности находятся в центрах ячеек, а значения скорости - на границах между ячейками. Значения величин плотности и скорости в следующий момент времени при применении центральной конечно-разностной (ЦКР) схемы к системе (2) определяются следующим образом:

$$\rho_i^j = \rho_i^{j-1} - \frac{\Delta t}{h} (u_{i+0.5}^{j-1} - u_{i-0.5}^{j-1}),$$

$$u_{i+0.5}^j = u_{i+0.5}^{j-1} - \frac{\Delta t c_0^2}{h} (\rho_{i+1}^{j-1} - \rho_i^{j-1}), \quad (6)$$

где Δt – шаг по времени, h – шаг расчётной однородной сетки по пространственной координате.

Граничные условия (ГУ) на твердой стенке: если граница $i+0.5$ ячейки совпадает со стенкой, то

$$u_{i+0.5}^{j-1} = 0. \quad (7)$$

2.2. Применение метода Годунова для решения уравнений линейной акустики в переменных скорость-плотность

В методе Годунова [2] также используется «шахматная» сетка, только в центрах ячеек определяются «малые» переменные, а на границах ячеек – «большие» переменные. Значения величин плотности и скорости в следующий момент времени при применении метода Годунова находятся как

$$\rho_i^j = \rho_i^{j-1} - \frac{\Delta t}{h} (U_{i+0.5}^{j-1} - U_{i-0.5}^{j-1}),$$

$$u_i^j = u_i^{j-1} - \frac{\Delta t c_0^2}{h} (R_{i+0.5}^{j-1} - R_{i-0.5}^{j-1}), \quad (8)$$

где

$$U_{i+0.5}^{j-1} = \frac{1}{2} [u_i^{j-1} + u_{i+1}^{j-1}] + \frac{c_0}{2} [\rho_i^{j-1} - \rho_{i+1}^{j-1}],$$

$$R_{i+0.5}^{j-1} = \frac{1}{2c_0} [u_i^{j-1} - u_{i+1}^{j-1}] + \frac{1}{2} [\rho_i^{j-1} + \rho_{i+1}^{j-1}]. \quad (9)$$

Если центр ячейки $i+1$ находится «внутри» тела, то ГУ на стенке определяются следующим образом:

$$u_{i+1}^{j-1} = -u_i^{j-1}, \quad \rho_{i+1}^{j-1} = \rho_i^{j-1}. \quad (10)$$

При этом ГУ (10) подставляются в (9).

2.3. Применение схемы вперед по потоку для решения уравнений линейной акустики в форме конвективных уравнений

К системе уравнений (4) удобно применить конечно-разностную схему «вперёд по потоку» (ВП), в результате будем иметь

$$w_{li}^j = w_{li}^{j-1} - \frac{\Delta t c_0}{h} (w_{li}^{j-1} - w_{li-1}^{j-1}),$$

$$w_{2i}^j = w_{2i}^{j-1} + \frac{\Delta t c_0}{h} (w_{2i+1}^{j-1} - w_{2i}^{j-1}). \quad (11)$$

ГУ на стенке накладываются согласно (10), после чего они подставляются в (3).

2.4. Применение подхода Лагранжа для решения уравнений линейной акустики в форме конвективных уравнений

Систему уравнений (4) можно также решить с применением подхода Лагранжа к рассмотрению движения среды. Здесь предлагается использовать метод, применяемый для моделирования конвекции в методе «вихрь в ячейке» (ВЯ) [3]. При этом моделируется движение двух волн. Одна распрост-

раняется вправо и переносит величину w_1 . При этом в следующий момент времени

$$w_{1i}^{*j} = w_{1i}^{j-1}, \quad x_i^j = x_i^{j-1} + c_{0\Delta} t. \quad (12)$$

Другая волна распространяется влево и переносит величину w_2 , причём

$$w_{2i}^{*j} = w_{2i}^{j-1}, \quad x_i^j = x_i^{j-1} - c_{0\Delta} t. \quad (13)$$

Здесь w_{1i}^{*j} и w_{2i}^{*j} обозначают величины w_1 и w_2 на искажённой после перемещения сетке. Для того, чтобы получить величины w_1 и w_2 на основной однородной сетке, аналогично методу ВЯ производится процедура перераспределения новых значений в ячейки сетки

$$\begin{aligned} w_{1k}^j &= w_{1i}^{*j} \Lambda(x_k^{j-1} - x_i^j), \\ w_{2k}^j &= w_{2i}^{*j} \Lambda(x_k^{j-1} - x_i^j), \end{aligned} \quad (14)$$

где в качестве интерполяционной функции Λ предлагается использовать

$$\Lambda_0(z) = \begin{cases} 1, & -0.5 \leq z/h < 0.5 \\ 0, & z/h < -0.5 \cup z/h \geq 0.5. \end{cases} \quad (15)$$

Также возможен другой подход к перераспределению значений w_1 и w_2 в ячейки сетки. При этом временно строится искажённая после перемещения (12) или (13) частиц сетка и определяются границы её ячеек. Так для i -ой искажённой ячейки в момент времени j границы равны

$$\{0.5(x_{i-1}^j + x_i^j), 0.5(x_i^j + x_{i+1}^j)\}.$$

Тогда значения w_1 и w_2 на однородной основной сетке в момент времени j определяются как

$$\begin{aligned} w_{1k}^j &= w_{1i}^{*j}, \quad 0.5(x_{i-1}^j + x_i^j) \leq x_k^{j-1} < 0.5(x_i^j + x_{i+1}^j), \\ w_{2k}^j &= w_{2i}^{*j}, \quad 0.5(x_{i-1}^j + x_i^j) \leq x_k^{j-1} < 0.5(x_i^j + x_{i+1}^j). \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим ГУ на стенке для правой волны. Если ячейка при своём движении (12) оказывается «внутри» тела, то она отражается от его поверхности, и её координата определяется как

$$x^j = 2x_b - x_i - c_{0\Delta} t, \quad (17)$$

где x_b – координата стенки тела. При этом правая волна превращается в левую волну и в точке с координатой (17) оказывается уже величина

$$w_2^j = -u_i^{j-1} - c_{0\rho} \rho_i^{j-1}. \quad (18)$$

Равенство (18) получается при подстановке ГУ (10) в (3). После этого полученная в соответствии с (18) величина перераспределяется в ячейки расчётной сетки согласно (14) или (16). ГУ на стенке для левой волны получается аналогично.

3. Тестирование методов

Описанные выше четыре численных схемы тестировались на трёх задачах, отличающихся НУ и ГУ.

В первой тестовой задаче в точке НУ соответствуют однородному потоку

$$u^0 = 1, \quad \rho^0 = 1, \quad (19)$$

а с момента времени $t > 0$ в точке $x = 0$ ставится непроницаемая перегородка.

НУ второй тестовой задачи задавались следующим образом:

$$\begin{aligned} u^0 &= 0, \\ \rho^0 &= \begin{cases} 1, & x < 0.5 \\ 1.0002, & x \geq 0.5, \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

а твёрдые границы отсутствовали.

В третьей тестовой задаче твёрдые границы отсутствовали, а НУ задавались как

$$\begin{aligned} u^0 &= \begin{cases} 1, & 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0, & x < 0.4 \cup x > 0.6, \end{cases} \\ \rho^0 &= 1. \end{aligned} \quad (21)$$

В тестовых расчетах использовались конечные области. В первой задаче область принималась равной $x \in [-1, 1]$, а во второй и третьей задачах области принимались равными $x \in [0, 1]$.

Численное решение сравнивалось с аналитическим (5). Аналитическое решение первой задачи (19) имеет следующий вид:

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & |x| > c_0 t \\ 0, & |x| \leq c_0 t, \end{cases}$$

$$\rho(t, x) = \begin{cases} 1, & |x| > c_0 t \\ 1 - \frac{1}{c_0}, & 0 < x \leq c_0 t \\ 1 + \frac{1}{c_0}, & -c_0 t \leq x < 0. \end{cases} \quad (22)$$

В результате расчетов выяснилось, что наилучшие результаты для первых трёх рассмотренных методов получаются, если шаг по времени удовлетворяет выражению

$$\Delta t = k_a \frac{h}{c_0}, \quad (23)$$

называемому критерию Куранта-Фридриха-Леви [4], с величиной коэффициента $k_a = 1$. Заметим, что для предложенной схемы, ис-

пользующей подход Лагранжа, можно варьировать шагом по времени, и наилучшие результаты получаются, когда k_a – ограниченное натуральное число.

Результаты, показанные на рисунках 1-5, получены после 20 шагов по времени ($t = 5.76195268 \cdot 10^{-4}$) для $c_0 = 347.105$, $h = 0.01$. В некоторых случаях графики результатов, получаемые с помощью разных методов, визуально не отличаются, поэтому они приведены один раз.

Погрешность решения определялась следующим образом:

$$\delta_u = \max_x \left| \frac{u_i - u_{ex}}{u_{ex}} \right| \cdot 100\%, \quad (24)$$

где u_{ex} – значение скорости аналитического решения.

После 20 шагов по времени ошибка численного решения (24) составляет менее 0.002 % для результатов, показанных на рисунках 1, 3, 5. Графики численного решения, приведенные на рисунках 2 и 4, носят «пилообразный» характер, и ошибка (24) составляет 100 %.

При изменении шага сетки погрешность решения не меняется, что объясняется линейностью задач и выбором шага по времени в виде (23).

Для предложенной в настоящей работе схемы, использующей подход Лагранжа, проводилось моделирование данных задач для k_a , равных 1, 2, 4 и 20. При этом по-

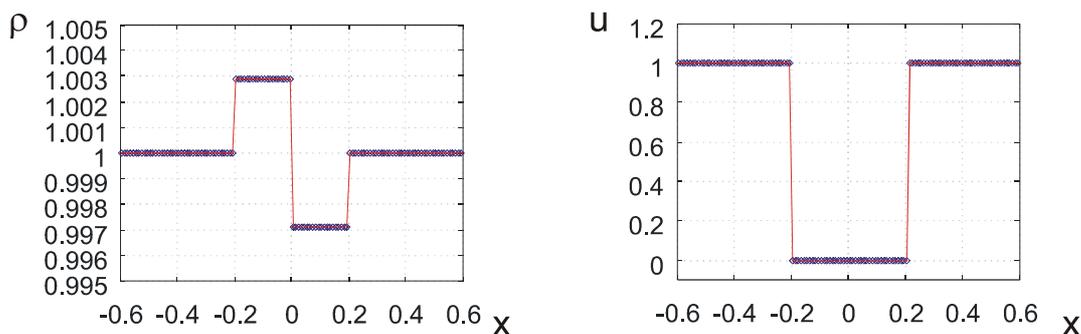


Рис. 1. Распределение плотности и скорости в задаче (19) для всех рассмотренных методов:
 ◇ – численное решение, ——— – аналитическое решение

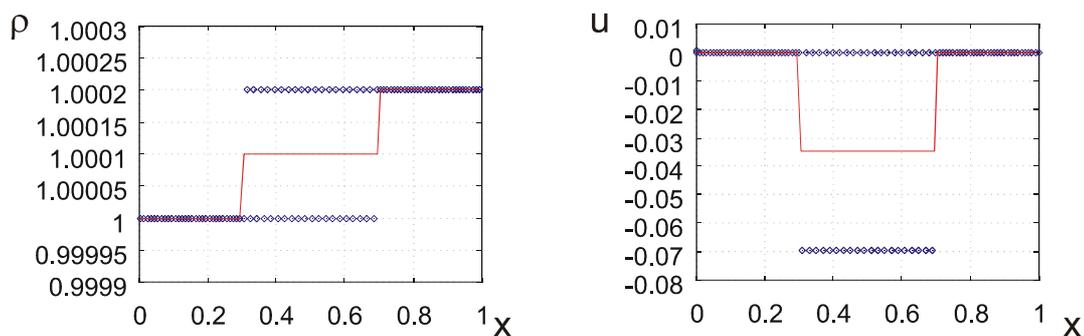


Рис. 2. Распределение плотности и скорости в задаче (20) для метода, использующего ЦКР схему в прямой постановке:

◇ – численное решение, — – аналитическое решение

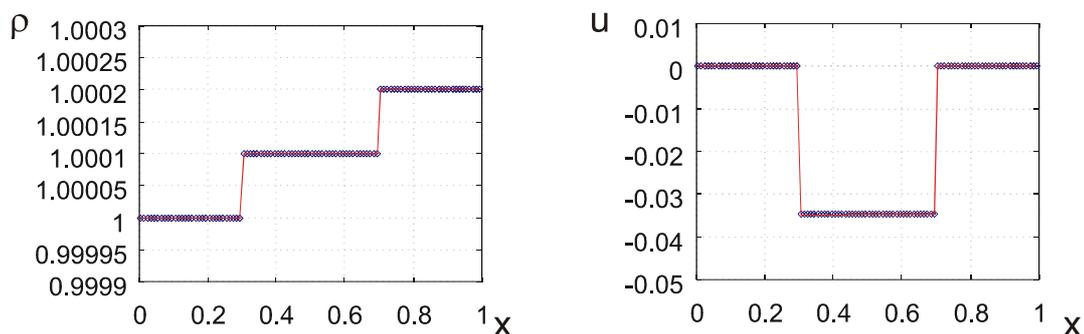


Рис. 3. Распределение плотности и скорости в задаче (20) для метода Годунова; метода, использующего ВП схему, и метода, использующего подход Лагранжа:

◇ – численное решение, — – аналитическое решение

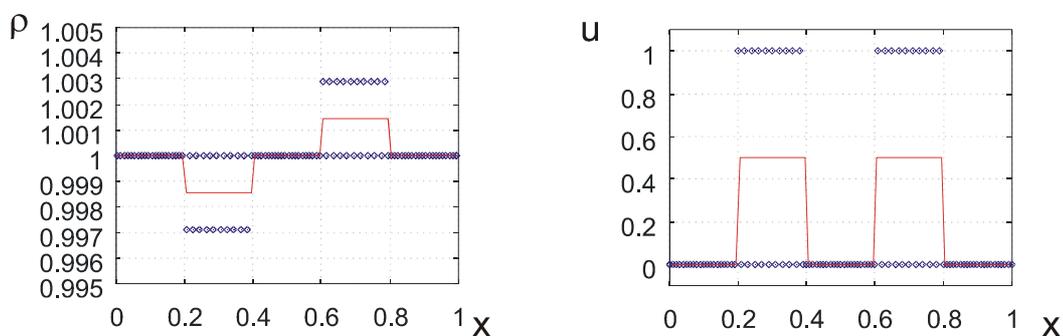


Рис. 4. Распределение плотности и скорости в задаче (21) для метода, использующего ЦКР схему в прямой постановке:

◇ – численное решение, — – аналитическое решение

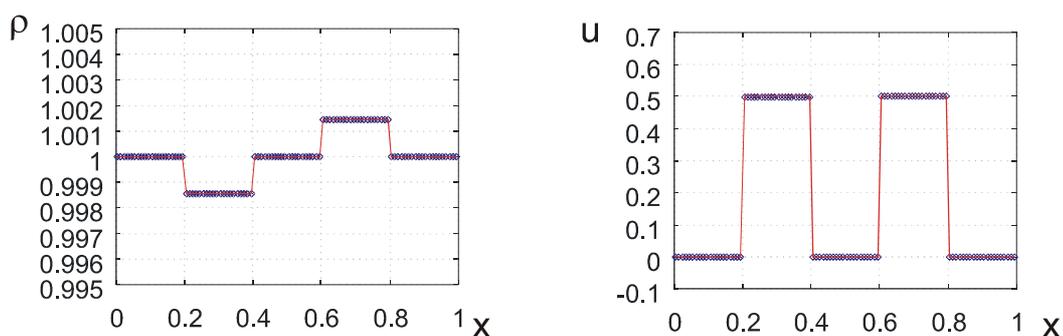


Рис. 5. Распределение плотности и скорости в задаче (21) для метода Годунова; метода, использующего ВП схему, и метода, использующего подход Лагранжа:

◇ – численное решение, — – аналитическое решение

грешность численного решения незначительно уменьшалась при увеличении k_a . Это объясняется меньшим количеством выполняемых арифметических операций (в том числе и перераспределения в ячейки сетки). Для рассмотренных задач применение подходов (14) и (16) распределения значений в ячейки сетки показало одинаковые результаты.

В заключение можно сделать следующие выводы:

1. Метод, использующий центральную конечно-разностную схему в прямой постановке, не адекватно моделирует вторую и третью задачи о распространении волн в свободном пространстве.

2. Метод Годунова, метод, использующий конечно-разностную схему вперед по потоку, и предложенный метод, использующий подход Лагранжа, адекватно моделируют распространение волн в одномерных задачах линейной акустики.

3. Предложенный метод позволяет варьировать в широких пределах шагом по времени.

Библиографический список

1. Годунов, С.К. Уравнения математической физики [Текст] / С.К. Годунов. – М.: Наука, 1971. – 416 с.

2. Годунов, С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики [Текст] / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. – М.: Наука, 1976. – 400 с.

3. Никонов, В.В. Моделирование двумерного ламинарного пограничного слоя с помощью метода “вихрь в ячейке” [Текст] / В.В. Никонов, В.Г. Шахов // Вестник СГАУ. – Самара. – 2006, № 3 (11). – С. 25 – 30.

4. Ferziger, J. Computational methods for fluid dynamics [Text] / J. Ferziger, M. Peric. – 3 rev. ed. – Springer-Verlag. – 2002. – 423 p.

References

1. Godunov, S.K. Mathematical physics equations [Text] / S.K. Godunov. – M.: Science. – 1971. – 416 p.

2. Godunov, S.K. Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics [Text] / S.K. Godunov, A.V. Zabrodin, M.Ya. Ivanov, A.N. Krayko, G.P. Prokopov. – M.: Science. – 1976. – 400 p.

3. Nikonov, V.V. Two-dimensional laminar boundary layer simulation by Vortex-in-cell method [Text] / V.V. Nikonov, V.G. Shakhov // Vestnik (Bulletin) SSAU. – Samara. – 2006, N 3 (11). – pp. 25 – 30.

4. Ferziger, J. Computational methods for fluid dynamics [Text] / J. Ferziger, M. Peric. – 3 rev. ed. – Springer-Verlag. – 2002. – 423 p.

APPLYING LAGRANGE'S APPROACH TO SOLVING A ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF WAVE PROPAGATION IN GAS IN LINEAR FORMULATION

© 2009 V. V. Nikonov, V. G. Shakhov

Samara State Aerospace University

Modelling of one-dimensional wave propagation in gas using various numerical schemes is discussed. Alongside the known schemes a scheme of solving an acoustics problem is proposed using Lagrange's approach to the description of environment motion. The results of numerical solution for three types of initial conditions are compared to those of analytical solution. Conclusions are drawn as to the applicability of the schemes discussed. The possibility of varying by step over the time without reducing the accuracy of the solution is shown.

Perfect gas, one-dimensional wave, numerical method, acoustics problem, "upstream" scheme, Godunov's method, Lagrange's approach, analytical solution.

Информация об авторах

Никонов Валерий Владимирович, кандидат технических наук, инженер научно-технологического парка «Авиатехнокон» Самарского государственного аэрокосмического университета. Область научных интересов: вихревые методы, прямое численное моделирование несжимаемых и сжимаемых течений, пограничный слой. E-mail: v_nikonov@mail.ru.

Шахов Валентин Гаврилович, кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой аэрогидродинамики Самарского государственного аэрокосмического университета. Область научных интересов: теория пограничного слоя, турбулентность, численные методы, аэродинамика летательных аппаратов. E-mail: shakhov@ssau.ru.

Nikonov, Valery Vladimirovitch, engineer of the Science-and-Technology Park “Aviatechnokon”, Samara State Aerospace University, candidate of technical sciences. Area of research: vortex methods, direct numerical modelling of compressible and incompressible flows, boundary layer. E-mail: v_nikonov@mail.ru.

Shakhov, Valentin Gavrilovitch, head of aerohydrodynamics department of Samara State Aerospace University, professor, candidate of technical sciences. Area of research: boundary layer theory, turbulence, numerical methods, aircraft aerodynamics. E-mail: shakhov@ssau.ru.