

УДК 629.735.45

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЛОЖНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЛОПАСТИ НЕСУЩЕГО ВИНТА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ВЕРТОЛЕТА

© 2009 А. М. Гирфанов

Казанский государственный технический университет им. А. Н. Туполева

Представлен вариант уравнений, определяющих динамику сложного пространственного деформирования лопасти несущего винта с учетом произвольного движения вертолета. Вывод уравнений выполнен без предположения малости упругих перемещений и основан на разделении движения на переносное и относительное. В результате получены достаточно компактные и удобные для программирования в объектно-ориентированной среде уравнения.

*Математическое моделирование, вертолет, несущий винт, динамика упругой лопасти.*

**Введение.** Одним из основных направлений развития винтокрылых летательных аппаратов является совершенствование их несущей системы с широким применением композиционных материалов. Поэтому некоторые современные вертолеты имеют несущие винты с «бесшарнирными» втулками, роль шарниров в которых выполняют специальные упругие элементы. Такие винты имеют ряд преимуществ по сравнению с классическими: конструктивную простоту; низкую стоимость и удобство эксплуатации; повышенный ресурс конструкции; большие управляющие моменты на втулке. В то же время замена шарниров упругими элементами приводит к увеличению уровня упругих деформаций [1] и, соответственно, повышению требований к уровню точности определения массово-инерционной нагрузки, действующей на лопасти винта вертолета.

В традиционных методах при расчете упругих лопастей несущих винтов в качестве расчетной схемы принимается тонкий, естественно закрученный стержень с прямолинейной осью жесткости. Упругие перемещения такого стержня под действием нагрузки полагаются малыми, что позволяет исключить нелинейные члены в записи уравнений равновесия. К классическим способам расчета таких моделей деформирования можно отнести методику, разработанную в 60-х годах А. В. Некрасовым. В этой методике деформации лопасти разлагаются по формам

собственных изолированных колебаний. В начале 70-х годов наиболее существенный вклад в развитие таких методов расчета внесли работы А. Ю. Лисса.

Решение задачи расчета деформаций без предположения малости упругих перемещений стало возможным благодаря развитию эффективных численных методов решения задач строительной механики. Они позволяют заменить дифференциальные уравнения системой нелинейных алгебраических уравнений. С появлением этих методик теория больших перемещений тонких стержней получила дальнейшее развитие в работах В. А. Павлова и его учеников [2, 3].

В статье [4] представлены наиболее полные и математически строгие на сегодняшний день уравнения колебания упругой лопасти в матрично-векторной форме при произвольном пространственном движении вертолета. В этой работе вывод уравнений, определяющих массово-инерционную нагрузку, выполнен в следующем порядке. Вначале радиус-вектор сечения лопасти путем ряда последовательных обратных переходов проецируется в земную систему координат. Затем в ней выполняется дифференцирование. Далее путем прямых последовательных переходов полученные ускорения проецируются на оси, связанной с сечением лопасти системы координат. Результат представлен в компактной матрично-векторной форме. Следует отметить, что практически все со-

ставляющие матриц и векторов зависят от времени, и соответственно при двукратном дифференцировании суммы произведений обратного и прямого перехода количество компонент значительно увеличится. Очевидно, что при преобразовании этих уравнений в алгебраический вид они будут достаточно громоздкими, и это приведет к значительному росту затрат машинного времени при вычислениях.

В данной работе предлагается применить другой способ, основанный на разделении движения на переносное и относительное. При этом дифференцирование будет производиться во вращающейся системе координат, что позволит минимизировать число переходов и тем самым получить более рациональные уравнения.

**Принятые системы координат.** Земная  $O_o x_o y_o z_o$  – оси и начало этой системы координат связаны с Землей и выбираются из условий задачи. Нормальная земная  $Ox_g y_g z_g$  – отличается от земной тем, что начало системы координат находится в центре масс вертолета. Связанная  $Ox y z$  – с началом в центре масс вертолета. Ось  $Ox$  направлена вперед параллельно так называемой строительной горизонтали вертолета. Ось  $Oy$  перпендикулярна  $Ox$  и направлена вверх, а  $Oz$  образует правую систему координат. Для перехода из  $Ox_g y_g z_g$  в связанную систему координат используется матрица перехода Эйлера вида

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \psi \\ -\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma & \cos \vartheta \cos \gamma & \cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma \\ \sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (1)$$

В матрице (1) углы  $\psi, \vartheta, \gamma$  – углы последовательных переходов, определяющие ориентацию вертолета в пространстве.

*Невращающаяся*  $O_{вт} x_{н} y_{н} z_{н}$  с началом в центре втулки винта. Обычно вал несущего винта наклонен относительно фюзеляжа на угол заклинения  $\varphi_{зак}$ , тогда матрица перехода

$$[L_{вт}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{зак} & \sin \varphi_{зак} & 0 \\ -\sin \varphi_{зак} & \cos \varphi_{зак} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

*Вращающаяся*  $O_{вт} x_{в} y_{в} z_{в}$  – оси этой системы координат получены путем поворота системы координат  $O_{вт} x_{н} y_{н} z_{н}$  на угол азимутального положения лопасти  $\psi_{н}$ . Угол азимута НВ отсчитывается от хвостовой балки вертолета, т.е. начало системы отсчета сдвинуто на 90 градусов. В этом случае для перехода в  $O_{вт} x_{в} y_{в} z_{в}$  необходимы две матрицы поворота:

$$[L_{вр}] = \begin{bmatrix} \cos \psi_{н} & 0 & \sin \psi_{н} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi_{н} & 0 & \cos \psi_{н} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$[L_{90}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

*Маховая*  $O_k x_b y_b z_b$  – это система координат с началом  $O_k$ , находящимся в центре жесткости комлевого сечения лопасти с координатами  $x_k, y_k, z_k$ . Оси повернуты на углы взмаха  $\beta$ , отставания  $\eta$  и осевого поворота  $\zeta$  комеля лопасти относительно вращающейся системы координат:

$$[L_m] = \begin{bmatrix} \cos \zeta \cos \eta & \sin \zeta \cos \beta + \cos \zeta \sin \eta \sin \beta & \sin \zeta \sin \beta - \cos \zeta \sin \eta \cos \beta \\ -\sin \zeta \cos \eta & \cos \zeta \cos \beta - \sin \beta \sin \eta \sin \zeta & \cos \zeta \sin \beta + \sin \zeta \sin \eta \cos \beta \\ \sin \eta & -\sin \beta \cos \eta & \cos \beta \cos \eta \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Связанная с деформированным сечением лопасти  $O_s x_s y_s z_s$  – система координат с началом  $O_s$  в центре жесткости каждого сечения деформированной лопасти, и ее оси направлены по главным центральным осям сечения и повернуты относительно  $O_k x_b y_b z_b$  на углы последовательных поворотов:

$$[L_{\text{уп}}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 \cos \varphi_2 & \sin \varphi_3 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 & \sin \varphi_3 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \\ -\sin \varphi_3 \cos \varphi_2 & \cos \varphi_3 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Связанная с центром масс сечения лопасти  $O_m x_m y_m z_m$  – система координат с началом  $O_m$  в центре масс каждого сечения деформированной лопасти, а ее оси параллельны  $O_s x_s y_s z_s$ :

**Уравнения движения в векторной форме.** Движение любого тела характеризуется изменением положения его точек относительно некоторой системы отсчета, определенным образом ориентированной в пространстве. Обычно используются некоторая «неподвижная» и перемещающаяся относительно нее «подвижная» система координат.

Примем в качестве «подвижной» вращающуюся вместе с лопастью несущего винта вертолета систему координат. В этом случае положение центра жесткости сечения лопасти можно представить как

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_{\text{вт}} + \mathbf{r}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{r}$  – вектор-радиус центра жесткости сечения лопасти, а  $\mathbf{r}_{\text{вт}} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1$  – положение центра втулки. Здесь  $\mathbf{r}_0$  – вектор-радиус центра масс вертолета, вращающегося с угловой скоростью в пространстве с угловой скоростью  $\Omega_0$ , а  $\mathbf{r}_1$  устанавливает фиксированное положение втулки относительно него (рис. 1).

С учетом правила дифференцирования во вращающихся системах координат первую и вторую производные вектора  $\mathbf{R}$  по времени  $t$  можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{U}_0 + \Omega_0 \times \mathbf{r}_1 + \dot{\mathbf{r}} + \Omega \times \mathbf{r}, \quad (8)$$

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \dot{\mathbf{U}}_0 + \Omega_0 \times \mathbf{U}_0 + \dot{\Omega}_0 \times \mathbf{r}_1 + \Omega_0 \times (\Omega_0 \times \mathbf{r}_1) + \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\Omega} \times \mathbf{r} + 2\Omega \times \dot{\mathbf{r}} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}), \quad (9)$$

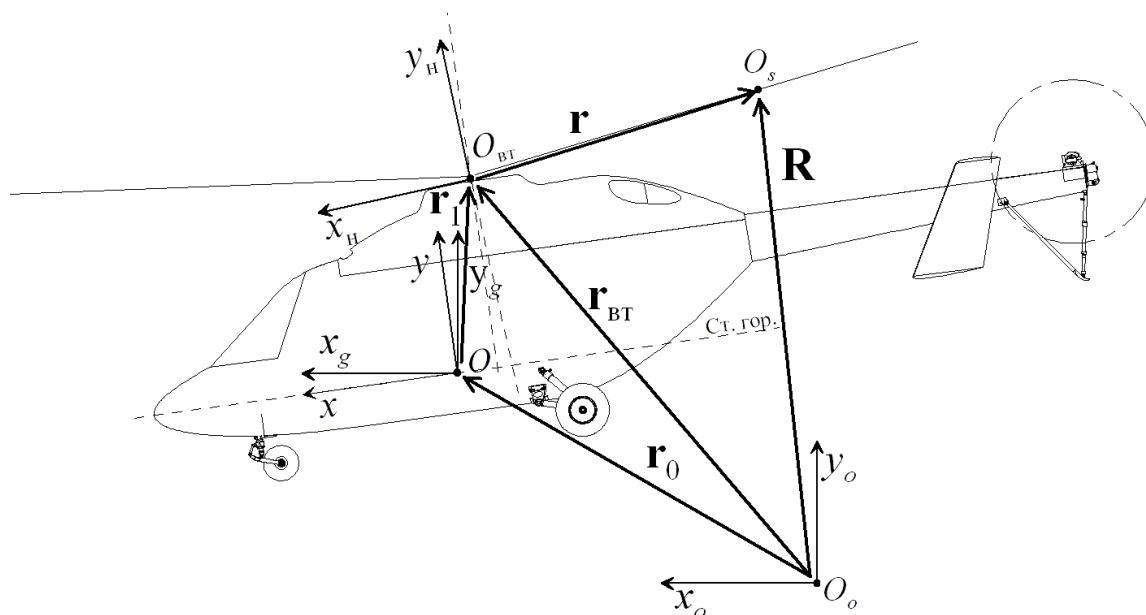


Рис. 1. Векторная сумма, характеризующая движение лопастей вертолета

где  $\mathbf{U}_0$  – скорость движения центра масс вертолета, вращающегося с угловой скоростью  $\mathbf{\Omega}_0$ ,  $\mathbf{\Omega}$  – угловая скорость вращения «подвижных» осей, связанных с лопастью винта.

Выражение (9) определяет переносное, относительное и кориолисово ускорение, обусловленное взаимодействием переносного и относительного движений.

Параметры  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  и  $\ddot{\mathbf{r}}$  – относительные перемещения, скорости и ускорение сечений лопасти за счет упругого деформирования и махового движения лопасти.

Раскроем полученные векторные выражения (8) и (9) в проекциях на оси вращающейся системы координат. Для этого поэтапно рассмотрим каждый вид движения лопасти и вертолета.

**Пространственное движение вертолета.** Представим вектор ускорений центра масс вертолета через проекции на оси нормальной земной системы координат

$$\{\mathbf{a}\} = \{a_{xg}, a_{yg} + g, a_{zg}\}^T. \quad (10)$$

Вектор  $\mathbf{U}_0$  и  $\mathbf{\Omega}_0$  запишем в проекциях на оси связанной с вертолетом системы координат:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_0\} &= \{V_x, V_y, V_z\}^T, \\ \{\mathbf{\Omega}_0\} &= \{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}^T. \end{aligned} \quad (11)$$

В этом случае скорости и ускорения центра втулки НВ, вызванные пространственным движением вертолета, раскроем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\{\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1\}}{dt} &= [\mathbf{L}_{\text{врт}}] \{\mathbf{U}_0 + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}_1\} = \\ &= [\mathbf{L}_{\text{врт}}] \begin{Bmatrix} V_x + \Omega_y z_T - \Omega_z y_T; \\ V_y + \Omega_z x_T - \Omega_x z_T; \\ V_z + \Omega_x y_T - \Omega_y x_T; \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\{\mathbf{r}_1\} = \{x_T, y_T, z_T\}^T$  – центровка вертолета относительно связанных осей:

$$\frac{d^2\{\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1\}}{dt^2} = [\mathbf{L}_{\text{врт}}] \begin{Bmatrix} \dot{V}_x + \Omega_y \cdot V_z - \Omega_z \cdot V_y + \varepsilon_y \cdot z_T - \varepsilon_{zc} \cdot y_T + \\ + \Omega_y \cdot \Omega_x \cdot y_T - (\Omega_y^2 + \Omega_z^2) \cdot x_T + \Omega_z \cdot \Omega_x \cdot z_T; \\ \dot{V}_y + \Omega_z \cdot V_x - \Omega_x \cdot V_z + \varepsilon_z \cdot x_T - \varepsilon_x \cdot z_T + \\ + \Omega_z \cdot \Omega_y \cdot z_T - (\Omega_x^2 + \Omega_z^2) \cdot y_T + \Omega_x \cdot \Omega_y \cdot x_T; \\ \dot{V}_z + \Omega_x \cdot V_y - \Omega_y \cdot V_x + \varepsilon_x \cdot y_T - \varepsilon_y \cdot x_T + \\ + \Omega_x \cdot \Omega_z \cdot x_T - (\Omega_y^2 + \Omega_x^2) \cdot z_T + \Omega_y \cdot \Omega_z \cdot y_T. \end{Bmatrix} \quad (13)$$

С учетом (10) представим (12) и (13) в более удобном виде:

$$\frac{d\{\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1\}}{dt} = [\mathbf{L}_{\text{врт}}] \{ \{\mathbf{U}_0\} + [\mathbf{W}_1] \{\mathbf{r}_1\} \}, \quad (14)$$

$$\frac{d^2\{\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1\}}{dt^2} = [\mathbf{L}_{\text{врт}}] \{ [\mathbf{L}] \{\mathbf{a}\} + [\mathbf{W}_2] \{\mathbf{r}_1\} \}, \quad (15)$$

где

$$[\mathbf{W}_1] = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{W}_2] = \begin{bmatrix} -(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) & -\varepsilon_z + \Omega_y \Omega_x & \varepsilon_y + \Omega_z \Omega_x \\ \varepsilon_z + \Omega_x \Omega_y & -(\Omega_x^2 + \Omega_z^2) & -\varepsilon_x + \Omega_z \Omega_y \\ -\varepsilon_y + \Omega_x \Omega_z & \varepsilon_x + \Omega_y \Omega_z & -(\Omega_y^2 + \Omega_x^2) \end{bmatrix}.$$

Выражения (14) и (15) определяют скорости и ускорения втулки винта вертолета в проекциях на оси системы координат  $O_{\text{врт}}x_{\text{н}}y_{\text{н}}z_{\text{н}}$ .

**Вращения винта.** Векторы угловых скоростей и ускорений системы координат  $O_{\text{врт}}x_{\text{в}}y_{\text{в}}z_{\text{в}}$  относительно инерциальной запишем в виде

$$\begin{aligned} \{\mathbf{\Omega}\} &= \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}^T = \{0, \omega_{\text{н}}, 0\}^T + \\ &+ [\mathbf{L}_{90}] [\mathbf{L}_{\text{вп}}] [\mathbf{L}_{\text{врт}}] \{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}^T, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \{\dot{\mathbf{\Omega}}\} &= \{\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z\}^T = \{0, \dot{\omega}_{\text{н}}, 0\}^T + \\ &+ [\mathbf{L}_{90}] [\mathbf{L}_{\text{вп}}] [\mathbf{L}_{\text{врт}}] \{\dot{\Omega}_x, \dot{\Omega}_y, \dot{\Omega}_z\}^T. \end{aligned} \quad (17)$$

Представим вектор перемещений лопасти относительно втулки  $\{\mathbf{r}\} = \{x, y, z\}^T$  в проекциях на оси вращающейся системы координат. Тогда составляющие переносного ускорения центра жесткости сечения, обусловленные вращением подвижных осей, можно записать в виде двух выражений:

$$\{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_y \cdot z - \dot{\omega}_z \cdot y \\ \dot{\omega}_z \cdot x - \dot{\omega}_x \cdot z \\ \dot{\omega}_x \cdot y - \dot{\omega}_y \cdot x \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

$$\{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})\} = \begin{Bmatrix} \omega_y \cdot \omega_x \cdot y - (\omega_y^2 + \omega_z^2) \cdot x + \omega_z \cdot \omega_x \cdot z \\ \omega_z \cdot \omega_y \cdot z - (\omega_x^2 + \omega_z^2) \cdot y + \omega_x \cdot \omega_y \cdot x \\ \omega_x \cdot \omega_z \cdot x - (\omega_y^2 + \omega_x^2) \cdot z + \omega_y \cdot \omega_z \cdot y \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Кориолисово ускорение, обусловленное взаимодействием переносного и относительного движений:

$$2\{(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}})\} = 2 \cdot \begin{Bmatrix} \omega_y \cdot \dot{z} - \omega_z \cdot \dot{y} \\ \omega_z \cdot \dot{x} - \omega_x \cdot \dot{z} \\ \omega_x \cdot \dot{y} - \omega_y \cdot \dot{x} \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Относительные ускорения, скорости и перемещения элемента лопасти представим как

$$\{\ddot{\mathbf{r}}\} = \{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\}^T, \quad \{\dot{\mathbf{r}}\} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}^T. \quad (21)$$

Просуммируем полученные составляющие и введем две матрицы:

$$[\mathbf{W}_3] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$[\mathbf{W}_4] = \begin{bmatrix} -(\omega_z^2 + \omega_y^2) & -\dot{\omega}_z + \omega_y \omega_x & \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x \\ \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & -\dot{\omega}_x + \omega_z \omega_y \\ -\dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z & \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z & -(\omega_y^2 + \omega_x^2) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Получим, что

$$\frac{d\{\mathbf{r}\}}{dt} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}^T + [\mathbf{W}_3]\{x, y, z\}^T, \quad (24)$$

$$\frac{d^2\{\mathbf{r}\}}{dt^2} = \{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\}^T + 2[\mathbf{W}_3]\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}^T + [\mathbf{W}_4]\{x, y, z\}^T. \quad (25)$$

Выражения (24) и (25) определяют скорости и ускорения движения сечений лопасти относительно втулки винта в проекциях на оси  $O_{\text{вт}}x_B y_B z_B$ .

**Упруго-маховое движение лопасти.** В качестве расчетной схемы упругой лопасти используется геометрически нелинейная теория пространственно-деформируемых стержней крыльцевого профиля [2, 3]. При условии работы материала лопасти в пределах закона Гука упругие перемещения такого стержня после нагрузки могут быть настолько большими, что формы осевой линии в первом и втором состояниях могут значительно различаться друг от друга:

$$\begin{aligned} x_{\text{упр}} &= \int_0^S \sin \varphi_2 dS; \\ y_{\text{упр}} &= -\int_0^S \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 dS; \\ z_{\text{упр}} &= \int_0^S \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 dS. \end{aligned} \quad (26)$$

В этом случае уравнения для скоростей упругих перемещений

$$\{\dot{\mathbf{r}}_{\text{упр}}\} = \{\dot{x}_{\text{упр}}, \dot{y}_{\text{упр}}, \dot{z}_{\text{упр}}\}^T$$

предлагается получить путем дифференцирования по времени (26):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\text{упр}} &= \int_0^S \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 dS; \\ \dot{y}_{\text{упр}} &= \int_0^S (\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) dS; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\dot{z}_{\text{упр}} = -\int_0^S (\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) dS.$$

Для записи соотношений, определяющих ускорения  $\{\ddot{\mathbf{r}}_{\text{упр}}\} = \{\ddot{x}_{\text{упр}}, \ddot{y}_{\text{упр}}, \ddot{z}_{\text{упр}}\}^T$ , необходимо проинтегрировать (27):

$$\ddot{x}_{\text{упр}} = \int_0^S (\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2) dS;$$

$$\ddot{y}_{\text{упр}} = \int_0^S (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) dS;$$

$$\ddot{z}_{\text{упр}} = -\int_0^S (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) dS. \quad (28)$$

Выражения (26), (27) и (28) определяют соответственно перемещения, скорости и ускорения, вызванные упругими деформациями оси жесткости относительно недеформированной лопасти.

Конструктивно из-за наличия шарниров или торсиона лопасть может перемещаться относительно втулки НВ на расстоя-

ние, определяемое  $\{\mathbf{r}_k\} = \{x_k, y_k, z_k\}$ , и поворачиваться на углы взмаха  $\beta$ , отставания  $\eta$  и осевого поворота лопасти  $\zeta$ , которые также зависят от времени (рис. 2).

В этом случае перемещения, вызванные упруго-маховым движением лопасти в осях вращающейся системы координат, можно записать как

$$\{\mathbf{r}\} = [\mathbf{L}_m]^T \{\mathbf{r}_{\text{упр}}\} + \{\mathbf{r}_k\}. \quad (29)$$

Скорости такого движения можно получить, проинтегрировав (29) по времени:

$$\{\dot{\mathbf{r}}\} = [\mathbf{L}_m]^T \{\dot{\mathbf{r}}_{\text{упр}}\} + [\dot{\mathbf{L}}_m]^T \{\mathbf{r}_{\text{упр}}\} + \{\dot{\mathbf{r}}_k\}. \quad (30)$$

Проинтегрировав по времени (30), получим ускорения

$$\{\ddot{\mathbf{r}}\} = [\mathbf{L}_m]^T \{\ddot{\mathbf{r}}_{\text{упр}}\} + 2[\dot{\mathbf{L}}_m]^T \{\dot{\mathbf{r}}_{\text{упр}}\} + [\ddot{\mathbf{L}}_m]^T \{\mathbf{r}_{\text{упр}}\} + \{\ddot{\mathbf{r}}_k\}. \quad (31)$$

Выражения (30) и (31) определяют упруго-маховые движения лопасти в осях системы координат  $O_{\text{вТ}}x_B y_B z_B$ .

**Суммарные скорости и ускорения движения сечений лопасти.** Очевидно, что

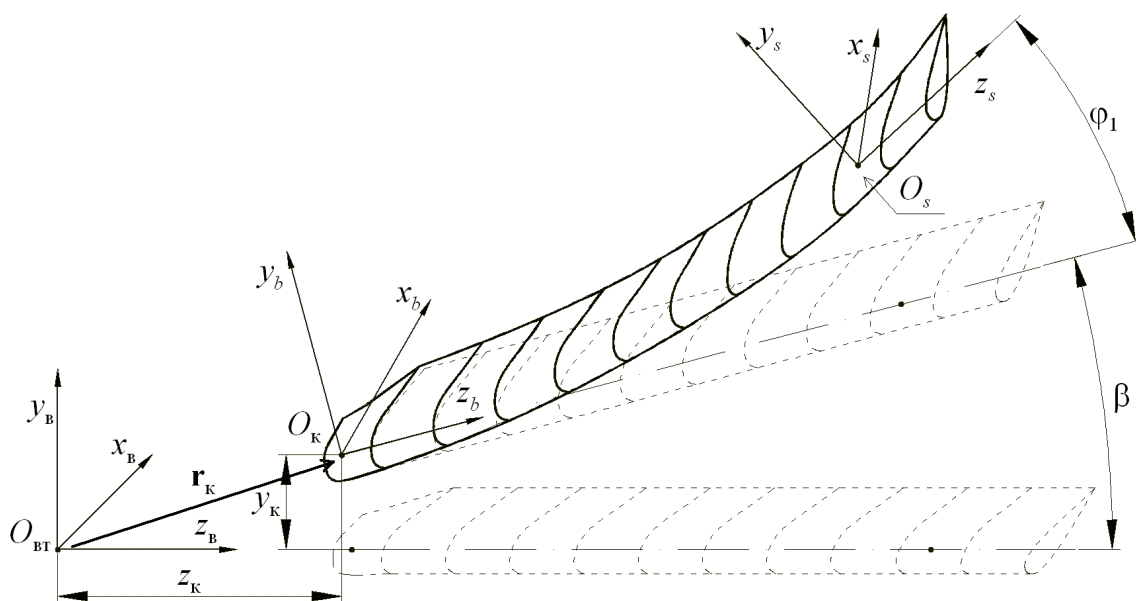


Рис. 2. Упруго-маховое движение лопасти

полные скорости и ускорения сечений лопасти будут суммой рассмотренных выше движений: вертолета, вращения винта и упруго-махового. Запишем их в проекциях на оси вращающейся системы координат:

$$\frac{d\{\mathbf{R}\}}{dt} = [\mathbf{L}_{90}] [\mathbf{L}_{вп}] [\mathbf{L}_{вт}] \left\{ [\mathbf{L}] \{V_{xg}, V_{yg}, V_{zg}\}^T + [\mathbf{W}_1] \{x_t, y_t, z_t\}^T \right\} + [\mathbf{L}_M]^T \{\dot{\mathbf{r}}_{упр}\} + [\dot{\mathbf{L}}_M]^T \{\mathbf{r}_{упр}\} + \{\dot{\mathbf{r}}_k\} + [\mathbf{W}_3] \left( [\mathbf{L}_M]^T \{\mathbf{r}_{упр}\} + \{\mathbf{r}_k\} \right), \quad (32)$$

$$\frac{d^2\{\mathbf{R}\}}{dt^2} = [\mathbf{L}_{90}] [\mathbf{L}_{вп}] [\mathbf{L}_{вт}] \left\{ [\mathbf{L}] \{a_{xg}, a_{yg}, a_{zg}\}^T + [\mathbf{W}_2] \{x_t, y_t, z_t\}^T \right\} + [\mathbf{L}_M]^T \{\ddot{\mathbf{r}}_{упр}\} + 2[\dot{\mathbf{L}}_M]^T \{\dot{\mathbf{r}}_{упр}\} + [\ddot{\mathbf{L}}_M]^T \{\mathbf{r}_{упр}\} + \{\ddot{\mathbf{r}}_k\} + 2[\mathbf{W}_3] \left( [\mathbf{L}_M]^T \{\dot{\mathbf{r}}_{упр}\} + [\dot{\mathbf{L}}_M]^T \{\mathbf{r}_{упр}\} + \{\dot{\mathbf{r}}_k\} \right) + [\mathbf{W}_4] \left( [\mathbf{L}_M]^T \{\mathbf{r}_{упр}\} + \{\mathbf{r}_k\} \right). \quad (33)$$

Уравнения (32) и (33) определяют полные скорости и ускорения движения лопасти с учетом пространственного движения вертолета.

**Массово-инерционные силы.** Под центром масс сечения понимается точка, в которой сосредоточен главный вектор массово-инерционных сил. В общем случае он может не совпадать с центром жесткости.

Введем вектор  $\mathbf{r}_{ц.м.}$ , определяющий расстояние от центра масс до центра жесткости сечения и не зависящий от времени. Обозначим его проекции на оси, связанные с деформированным сечением как  $\{x_{ц.м.}, y_{ц.м.}, z_{ц.м.}\}^T$ , и спроецируем на вращающуюся систему координат:

$$\{\mathbf{r}_{ц.м.}\} = [\mathbf{L}_M]^T [\mathbf{L}_{упр}]^T \{x_{ц.м.}, y_{ц.м.}, z_{ц.м.}\}^T. \quad (34)$$

Поочередно дважды продифференцируем (34) и получим скорости и ускорения центра масс сечения относительно центра жесткости:

$$\frac{d\{\mathbf{r}_{ц.м.}\}}{dt} = [\dot{\mathbf{L}}_M]^T [\mathbf{L}_{упр}]^T \{x_{ц.м.}, y_{ц.м.}, z_{ц.м.}\}^T + [\mathbf{L}_M]^T [\dot{\mathbf{L}}_{упр}]^T \{x_{ц.м.}, y_{ц.м.}, z_{ц.м.}\}^T, \quad (35)$$

$$\frac{d^2\{\mathbf{r}_{ц.м.}\}}{dt^2} = [\ddot{\mathbf{L}}_M]^T [\mathbf{L}_{упр}]^T \{x_{ц.м.}, y_{ц.м.}, z_{ц.м.}\}^T + 2[\dot{\mathbf{L}}_M]^T [\dot{\mathbf{L}}_{упр}]^T \{x_{ц.м.}, y_{ц.м.}, z_{ц.м.}\}^T + [\mathbf{L}_M]^T [\ddot{\mathbf{L}}_{упр}]^T \{x_{ц.м.}, y_{ц.м.}, z_{ц.м.}\}^T. \quad (36)$$

Следует отметить, что скорости (35) и ускорения (36) движения центра масс относительно центра жесткости достаточно малы. Поэтому при решении многих задач аэроупругих колебаний лопасти их можно не учитывать.

Теперь в соответствии со вторым законом Ньютона погонные по длине лопасти силы инерции будут записаны как

$$\{\mathbf{F}_{ин}\} = m_{л.} \left( \frac{d^2\{\mathbf{R}\}}{dt^2} + \frac{d^2\{\mathbf{r}_{ц.м.}\}}{dt^2} \right), \quad (37)$$

где  $m_{л.}$  – погонная по длине масса сечения лопасти.

Главный момент от сил инерции представим в виде

$$\{\mathbf{M}_{ин}\} = [\mathbf{J}] \{\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\Sigma}\} + \{\boldsymbol{\Omega}_{\Sigma}\} ([\mathbf{J}] \{\boldsymbol{\Omega}_{\Sigma}\}), \quad (38)$$

где  $[\mathbf{J}]$  – тензор инерции сечения лопасти, вычисленный относительно центра жесткости;  $\boldsymbol{\Omega}_{\Sigma}$  и  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\Sigma}$  – угловые скорости и ускорения связанной с деформированным сечением системы координат относительно земной:

$$\{\boldsymbol{\Omega}_{\Sigma}\} = [\mathbf{L}_{упр}] \left( [\mathbf{L}_M] \{\boldsymbol{\Omega}\} + \{\boldsymbol{\Omega}_M\} \right) + \{\boldsymbol{\Omega}_{упр}\}, \quad (39)$$

$$\{\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\Sigma}\} = [\mathbf{L}_{упр}] \left( [\mathbf{L}_M] \{\dot{\boldsymbol{\Omega}}\} + \{\dot{\boldsymbol{\Omega}}_M\} \right) + \{\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{упр}\}. \quad (40)$$

При этом угловые скорости и ускорения упруго-махового движения записываются как

$$\{\boldsymbol{\Omega}_M\} = \begin{bmatrix} \cos \eta \cos \zeta & \sin \zeta & 0 \\ -\cos \eta \sin \zeta & \cos \zeta & 0 \\ \sin \eta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{Bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 \{\dot{\Omega}_m\} &= \begin{bmatrix} -\dot{\eta} \sin \eta \cos \zeta - \dot{\zeta} \cos \eta \sin \zeta & \dot{\zeta} \cos \zeta & 0 \\ \dot{\eta} \sin \eta \sin \zeta - \dot{\zeta} \cos \eta \cos \zeta & -\dot{\zeta} \sin \zeta & 0 \\ \dot{\eta} \cos \eta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{Bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \cos \eta \cos \zeta & \sin \zeta & 0 \\ -\cos \eta \sin \zeta & \cos \zeta & 0 \\ \sin \eta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{Bmatrix}; \\
 \{\Omega_{\text{впр}}\} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 & 0 \\ -\cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix};
 \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
 \{\dot{\Omega}_{\text{впр}}\} &= \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 & 0 \\ \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & -\dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 & 0 \\ \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 & 0 \\ -\cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix}. \\
 \frac{d^2 \{\mathbf{R}\}}{dt^2} &= \begin{bmatrix} -\dot{\zeta}^2 \sin \zeta \sin \beta + \ddot{\zeta} \cos \zeta \sin \beta + 2\dot{\zeta}\dot{\beta} \cos \zeta \cos \beta - \\ -\dot{\beta}^2 \sin \zeta \sin \beta + \ddot{\beta} \sin \zeta \cos \beta \\ -\dot{\zeta}^2 \cos \zeta \sin \beta - \ddot{\zeta} \sin \zeta \sin \beta - 2\dot{\zeta}\dot{\beta} \sin \zeta \cos \beta - \\ -\dot{\beta}^2 \cos \zeta \sin \beta + \ddot{\beta} \cos \zeta \cos \beta \\ -\dot{\beta}^2 \cos \beta - \ddot{\beta} \sin \beta \end{bmatrix} \cdot r_n + \\
 &+ 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \cos \zeta \sin \beta + \beta \sin \zeta \cos \beta \\ -\dot{\zeta} \sin \zeta \sin \beta + \dot{\beta} \cos \zeta \cos \beta \\ -\dot{\beta} \sin \beta \end{bmatrix} \cdot r_n + \{\dot{\mathbf{r}}_k\} + \\
 &+ \begin{bmatrix} -\omega_y^2 & 0 & \dot{\omega}_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\omega}_y & 0 & -\omega_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \zeta \sin \beta \\ \cos \zeta \sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} \cdot r_n + \{\mathbf{r}_k\},
 \end{aligned} \tag{44}$$

**Отличительные особенности.** Уравнения (37) и (38) полностью определяют массово-инерционную нагрузку, действующую на лопасти винта при произвольном пространственном движении вертолета. Матрицы довольно компактны, а уравнения удобно скомпонованы. Это позволяет просто и быстро их преобразовывать в зависимости от типа решаемой задачи.

Например, задача расчета установившегося горизонтального полета с жесткими лопастями. В этом случае первые слагаемые, определяющие динамику движения вертолета, выражений (32) и (33) просто обнуляются. А векторы угловых скоростей и ускорений вращения винта примут вид

$$\{\Omega\} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}^T = \{0, \omega_n, 0\}^T, \tag{41}$$

$$\{\dot{\Omega}\} = \{\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z\}^T = \{0, \dot{\omega}_n, 0\}^T. \tag{42}$$

А если лопасти винта абсолютно жесткие и совершают только маховые и крутильные колебания, тогда (32) и (33) сократятся до вида

где  $r_n$  – радиус сечения лопасти. Аналогичным образом сокращаются и выражения для угловых скоростей и ускорений.

**Выводы.** Получена математическая модель сложного пространственного деформирования лопасти несущего винта при произвольном движении вертолета. Матрицы, входящие в состав рационально скомпонованных выражений, довольно просты. Это позволяет в зависимости от условий решаемой задачи быстро преобразовывать матрично-векторные уравнения в алгебраический вид. Такой подход позволяет более полно реализовать возможности объектно-ориентированного программирования и тем самым сократить затраты машинного времени на вычисления.



**Библиографический список**

1. Гирфанов А. М. Аэроупругий расчет и балансировка одновинтового вертолета с бесшарнирным винтом: Дис. .... канд. техн. наук. – Казань, 2000. – 117 с.
2. Павлов В. А. Геометрически нелинейная теория расчета стержней крыльцевого профиля // Изв. вузов. Авиационная техника. – № 2. – 1981. – С. 44 – 50.
3. Михайлов С. А. К теории расчета тонких стержней крыльцевого профиля при больших упругих перемещениях // Вопросы прочности тонкостенных авиационных конструкций: Сб. Статей / Казан. авиац. ин-т. – Казань, 1982. – С. 65-69.
4. Михайлов С. А., Николаев Е. И., Гарипов А. О. Вывод уравнений колебаний лопасти несущего винта с учетом пространственного движения вертолета // Изв. вузов. Авиационная техника. – № 2. – 2005.

**References**

1. A. M. Girfanov. Aeroelastic calculation and balancing of the one-screw hingless rotorcraft: The sis... PhD, Kazan, 2000. – 117 p.
2. V.A. Pavlov. Vectorially nonlinear theory of wing section-shaped rods calculations // Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya Tekhnika. – №2. – 1981. – P. 44-50.
3. S.A. Mikhailov. Issues of the theory of thin wing section-shaped rods in huge elastic motion // Issues of thin-walled aviation designs durability: Symposium (set of articles) / KSTU, Kazan, 1982. – P. 65-69.
4. S.A. Mikhailov; E.U. Nikolaev; A.O. Garipov. Putting the equations of the rotor blades fluctuations in rotorcraft spatial motion // Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya Tekhnika. – № 2. – 2005.

**MATHEMATICAL MODEL OF COMPLEX SPATIAL DEFORMATION OF ROTOR BLADES DURING HELICOPTER ARBITRARY MOTION**

© 2009 A. M. Girfanov

Kazan State Technical University named after A. N. Tupolev

The paper presents the type of equations determining the dynamics of rotor blade complex spatial deformation subject to helicopter arbitrary motion. The equations are deduced without assuming that elastic displacements are small, and are based on dividing the motion into transportation motion and relative motion. As a result, the equations derived are quite compact and easily programmable in the object-oriented environment.

*Mathematical modelling, helicopter, rotor, flexible blade dynamics.*

**Информация об авторах**

**Гирфанов Азат Марселович**, кандидат технических наук, докторант кафедры аэрогидродинамики Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. Область научных интересов: динамика полета вертолета, аэроупругость, аэродинамика. E-mail: azat@rt-kazan.ru.

**Girfanov, Azat Marselovitch**, candidate of technical sciences, working for his doctorate at the aerohydrodynamics department of Kazan State Technical University named after A. N. Tupolev. Area of research: helicopter flight dynamics, aeroelasticity, aerodynamics. E-mail: azat@rt-kazan.ru.