

## ХАОТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОЙ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ

© 2009 В.С. Асланов<sup>1</sup>, А.В. Пироженко<sup>2</sup>, Б.В. Иванов<sup>1</sup>, А.С. Ледков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет

<sup>2</sup>Институт технической механики Национальной академии наук Украины  
и Национального космического агентства Украины

Рассматривается движение вокруг центра масс упругой тросовой системы (ТС). ТС, состоящая из двух концевых тел и невесомого упругого троса, находится в развёрнутом положении. Центр масс системы движется по эллиптической траектории. С помощью уравнения Лагранжа второго рода построены уравнения движения упругой ТС, в качестве независимой переменной выбран угол истинной аномалии. Рассмотрен частный случай движения системы, когда длина троса остается постоянной. Показано, что в этом случае система подвержена хаосу.

*Тросовая система, упругие колебания, уравнения лагранжа, хаос, отображения пуанкаре, эллиптическая орбита.*

### Формулировка задачи

Аналізу космічних ТС присвячені численні роботи, наприклад [1-10], в яких об'єктами досліджень являлись трос, корисний вантаж і космічний апарат (КА). Орбітальні ТС можуть застосовуватися для різних завдань переміщення корисного вантажу в космічному просторі, в тому числі для її доставки на поверхню Землі [2, 5] або для її переведення на більш високі орбіти [1, 4]. В статті розглядається поведінка ТС під впливом гравітаційного моменту і сил пружності троса. Припускається, що ТС складається з двох кінцевих матеріальних точок масою  $m_1$ ,  $m_2$  і пружного троса, який завжди знаходиться в розтягнутому стані. Побудуємо з допомогою рівняння Лагранжа другого роду математичну модель, що зберігає основні особливості фізичної моделі [9] і відображає основні закономірності руху ТС. Покажемо, що в межах вказаної математичної моделі можуть існувати хаотичні режими руху.

### Уравнения Лагранжа второго рода

При выводі рівнянь руху будемо нехувати масою троса, аеродинамічними силами і сонячним тиском. Повна маса системи дорівнює

$$m = m_1 + m_2.$$

Кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії центра мас  $T_C$  і кінетичної енергії двох матеріальних точок  $T_1$ ,  $T_2$  відносно поступальної рухомих системи координат  $Sx_Cy_C$  з початком в центра мас

$$T = T_C + T_1 + T_2. \quad (1)$$

В якості узагальнених координат візьмемо

$$q_1 = r, \quad q_2 = l, \quad q_3 = \vartheta, \quad q_4 = \varphi, \quad (2)$$

де  $r = OC$  - відстань між центром Землі і центром мас системи  $C$ ,  $l$  - довжина троса,  $\vartheta$  - кут істинної аномалії центра мас системи (система координат  $Ox_Cy_C$  розташована в площині орбіти, вісь  $Ox_C$  направлена на перигей),  $\varphi$  - кут відхилення троса відносно місцевої вертикалі (рис 1.).

Кінетична енергія центра мас відповідає абсолютному руху центра мас системи по орбіті і включає в себе радіальну і трансверсальну швидкості:

$$T_C = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2). \quad (3)$$

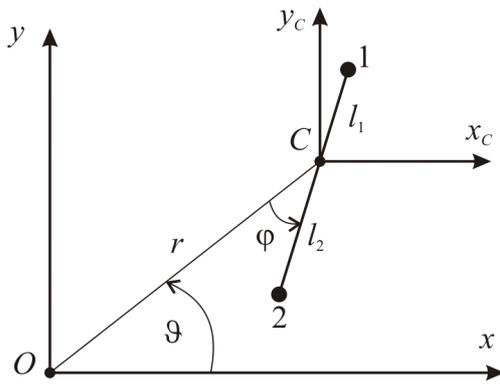


Рис. 1. Тросовая система

Кинетические энергии относительного движения материальных точек определяются формулой

$$T_i = \frac{1}{2} m_i V_{ir}^2, \quad (4)$$

где  $V_{ir}$  - скорости концевых точек тросовой системы относительно центра масс системы  $C$  ( $i = 1, 2$ ). Относительная скорость точек 1 и 2 в системе координат  $Cx_c y_c$  имеет вид

$$V_{ir} = (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

где

$$x_1 = l_1 \cos(\vartheta + \varphi), \quad y_1 = l_1 \sin(\vartheta + \varphi),$$

$$x_2 = -l_2 \cos(\vartheta + \varphi), \quad y_2 = -l_2 \sin(\vartheta + \varphi), \quad (6)$$

$$l_1 = \frac{m_2}{m} l, \quad l_2 = \frac{m_1}{m} l.$$

Дифференцируя координаты (6) по времени и подставляя производные в (5), а также имея в виду (3) и (4), запишем кинетическую энергию системы (1) следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) + \frac{m_*}{2} \dot{l}^2 + \frac{I_*}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2, \quad (7)$$

где  $m_* = \frac{m_1 m_2}{m}$ ,  $I_* = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 = m_* l^2$  - момент инерции.

Потенциальная энергия системы состоит из потенциала центрального поля силы тяжести [8] и потенциальной энергии силы упругости троса

$$W = -\mu \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) + \frac{c}{2} (l - l_0)^2, \quad (8)$$

где  $\mu$  - гравитационный параметр,  $c$  - коэффициент упругости,  $l_0$  - длина ненапряженного троса,  $r_1, r_2$  - расстояние между центром Земли и точками 1 и 2. Используя (6), выразим  $r_1$  и  $r_2$  через обобщенные координаты (2) и подставим результат в (8):

$$W = -\frac{\mu}{r} \left[ \frac{m_1}{\sqrt{1 + \frac{l_1^2}{r^2} + 2 \frac{l_1}{r} \cos \varphi}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 + \frac{l_2^2}{r^2} - 2 \frac{l_2}{r} \cos \varphi}} \right] + \frac{c}{2} (l - l_0)^2.$$

Упростим это выражение, имея в виду, что длина троса существенно меньше расстояния от центра масс системы до центра Земли:

$$\frac{l}{r} \ll 1.$$

В результате имеем

$$W = -\frac{\mu m}{r} + \frac{\mu I_*}{2 r^3} (1 - 3 \cos^2 \varphi) + \frac{c}{2} (l - l_0)^2. \quad (9)$$

Используя (7) и (9), запишем лагранжиан системы:

$$L = T - W = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) + \frac{m_*}{2} \dot{l}^2 + \frac{I_*}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2 - \frac{\mu m}{r} + \frac{\mu I_*}{2 r^3} (1 - 3 \cos^2 \varphi) - \frac{c}{2} (l - l_0)^2. \quad (10)$$

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид  $\ddot{\vartheta} = -2n^2 k^3 e \sin \vartheta$ . (19)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = \overline{1, 4}, \quad (11)$$

где  $Q_j$  - силы управления, демпфирования, аэродинамические и иные непотенциальные силы. Подставляя (10) в (11), получим

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 + \frac{\mu}{r^2} - \frac{3\mu I_*}{2mr^4} (1 - 3\cos^2 \varphi) = Q_r, \quad (12)$$

$$\ddot{l} + \frac{c}{m_*} (l - l_0) + \frac{\mu l}{r^3} (1 - 3\cos^2 \varphi) - l(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 = Q_l, \quad (13)$$

$$(mr^2 + I_*)\ddot{\vartheta} + I_*\dot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} + 2m_*l\dot{l}(\dot{\vartheta} + \dot{\varphi}) = Q_\vartheta, \quad (14)$$

$$I_*(\ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi}) + 2m_*l\dot{l}(\dot{\vartheta} + \dot{\varphi}) + \frac{3\mu I_*}{r^3} \sin \varphi \cos \varphi = Q_\varphi. \quad (15)$$

Применим известный приём [1] и перейдём в уравнениях движения (12)-(15) к новой независимой переменной – углу истинной аномалии  $\vartheta$ . При этом будем полагать, что движение центра масс системы не зависит от относительного движения и центр масс движется по эллиптической орбите:

$$r = \frac{p}{k}, \quad \dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} k^2 = nk^2, \quad (16)$$

где  $k = 1 + e \cos \vartheta$ ,  $p$  - параметр орбиты,  $e$  - эксцентриситет орбиты. Для произвольной функции  $f(t)$  первая и вторая производные в силу (16) имеют вид

$$\dot{f} = nk^2 f', \quad (17)$$

$$\ddot{f} = n^2 k^3 (kf'' - 2ef' \sin \vartheta), \quad (18)$$

где  $(\ )' = \frac{d}{d\vartheta}$ ,  $(\ )'' = \frac{d^2}{d\vartheta^2}$ . Дифференцирование по времени  $t$  второго выражения из (16) даёт следующий результат:

Перепишем уравнения относительного движения тросовой системы (13) и (15) с учётом (16) - (18) в виде

$$kl'' - 2el' \sin \vartheta + \frac{c}{n^2 k^3 m_*} (l - l_0) + l(1 - 3\cos^2 \varphi) - kl(1 + \varphi')^2 = \frac{Q_l}{n^2 k^3}, \quad (20)$$

$$I_*(k\varphi'' - 2e\varphi' \sin \vartheta) + 2km_*l\dot{l}'(1 + \varphi') - 2eI_* \sin \vartheta + 3I_* \sin \varphi \cos \varphi = \frac{Q_\varphi}{n^2 k^3}. \quad (21)$$

Будем считать, что обобщённые силы  $Q_l$  и  $Q_\varphi$  отсутствуют. Тогда уравнения (20) и (21) примут вид

$$l'' + \frac{c}{m_* n^2 k^4} (l - l_0) + \frac{l}{k} (1 - 3\cos^2 \varphi) - l(1 + \varphi')^2 = 2\frac{e}{k} l' \sin \vartheta, \quad (22)$$

$$\varphi'' + 2\frac{l'}{l} (1 + \varphi') + \frac{3}{k} \sin \varphi \cos \varphi = 2\frac{e}{k} (1 + \varphi') \sin \vartheta. \quad (23)$$

Отметим, что уравнение (23) является обобщением уравнения (39) из [2] для упругого троса, а уравнение (22) – обобщением уравнения (8) из [3].

### Хаотические режимы движения ТС

В работе [10] рассмотрен частный случай хаотического движения ТС - медленное угловое движение ТС с периодически изменяющейся длиной троса по круговой орбите. Рассмотрим другой частный случай, когда длина троса в процессе движения остаётся неизменной  $l = const$ , но эксцентриситет орбиты отличен от нуля. В этом случае система (22), (23) приводится к уравнению

$$\varphi'' + \frac{3}{k} \sin \varphi \cos \varphi = 2\frac{e}{k} (1 + \varphi') \sin \vartheta. \quad (24)$$

Для случая, когда  $e \ll 1$ , правую часть уравнения (24) можно рассматривать как малое возмущение. При  $e = 0$  из (24) получаем уравнение невозмущённого движения

$$\varphi'' + \frac{3}{k} \sin \varphi \cos \varphi = 0, \quad (25)$$

соответствующее движению ТС по круговой орбите.

Покажем, что в системе, описываемой уравнением (24), могут присутствовать хаотические режимы движения. Пусть ТС и орбита имеют следующие параметры:  $l = 30$  км,  $m_1 = 6000$  кг,  $m_2 = 1000$  кг,  $e = 0,01$ ,  $p = 250$  км. Для численного анализа возмущённого уравнения (24) воспользуемся отображением Пуанкаре [10]. Будем строить фазовый портрет трёхмерного пространства  $(\varphi, \varphi', \theta)$  на плоских сечениях  $\theta = 2\pi j$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), что позволит вместо исследования непрерывного процесса изучать динамику возмущённой системы с дискретной фазой  $\theta$ . Сечения Пуанкаре будем строить на цилиндрической поверхности, получаемой совмещением точек  $\varphi = -\pi/2$  и  $\varphi = \pi/2$ .

При  $e=0$  наблюдается регулярная структура фазового пространства, траектории не пересекаются (рис. 2) и сечения Пуанкаре совпадают с невозмущённым фазовым портретом. Наличие в системе возмущения ( $e \neq 0$ ) приводит к возникновению хаотического слоя рядом с невозмущённой сепаратрисой (рис. 3). С ростом величины возмущения ширина хаотического слоя растёт.

С физической точки зрения наличие хаотического слоя в окрестности сепаратрисы приводит к тому, что ТС случайным образом может переходить из колебательного во вращательный режим движения, и обратно. На рис.4 показана одна из траекторий движения ТС, полученная при интегрировании системы (23), (24) с начальными условиями:  $l_0 = 30001$  м,  $l'_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = \pi/2 - 0.01$ ,  $\varphi'_0 = 0$ . Видно, что фазовая траектория системы сначала находится в одной из внутренних областей движения (колебательный режим). Через некоторое время траектория покидает эту область, переходя во внешнюю (вращательный режим движения), но, сделав оборот, снова возвращается во внутреннюю область.

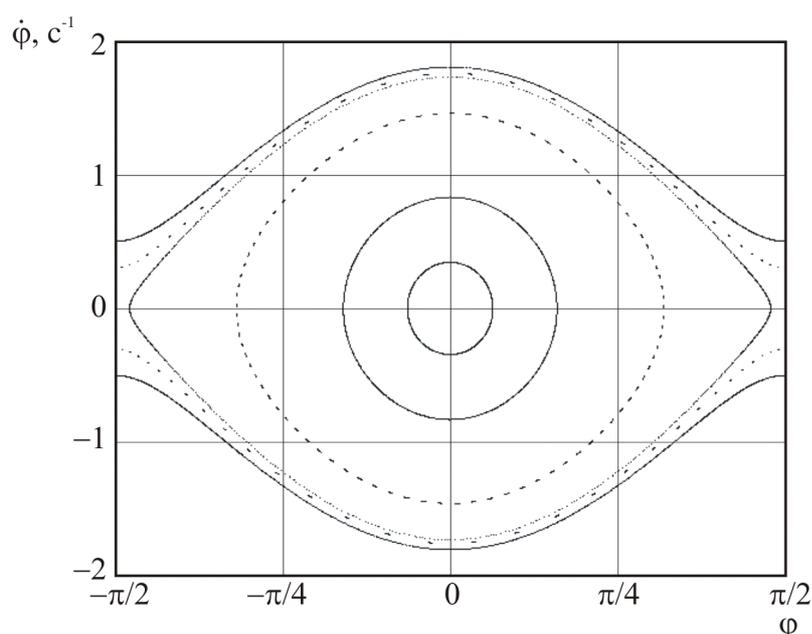


Рис. 2. Сечения Пуанкаре для случая невозмущённого движения ( $e=0$ )

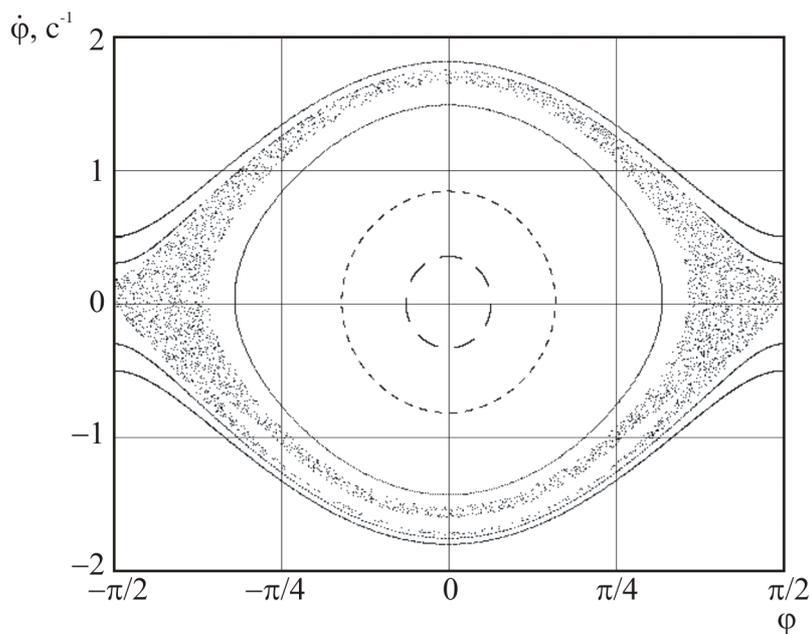


Рис. 3. Сечения Пуанкаре для случая возмущённого движения ( $e=0,01$ )

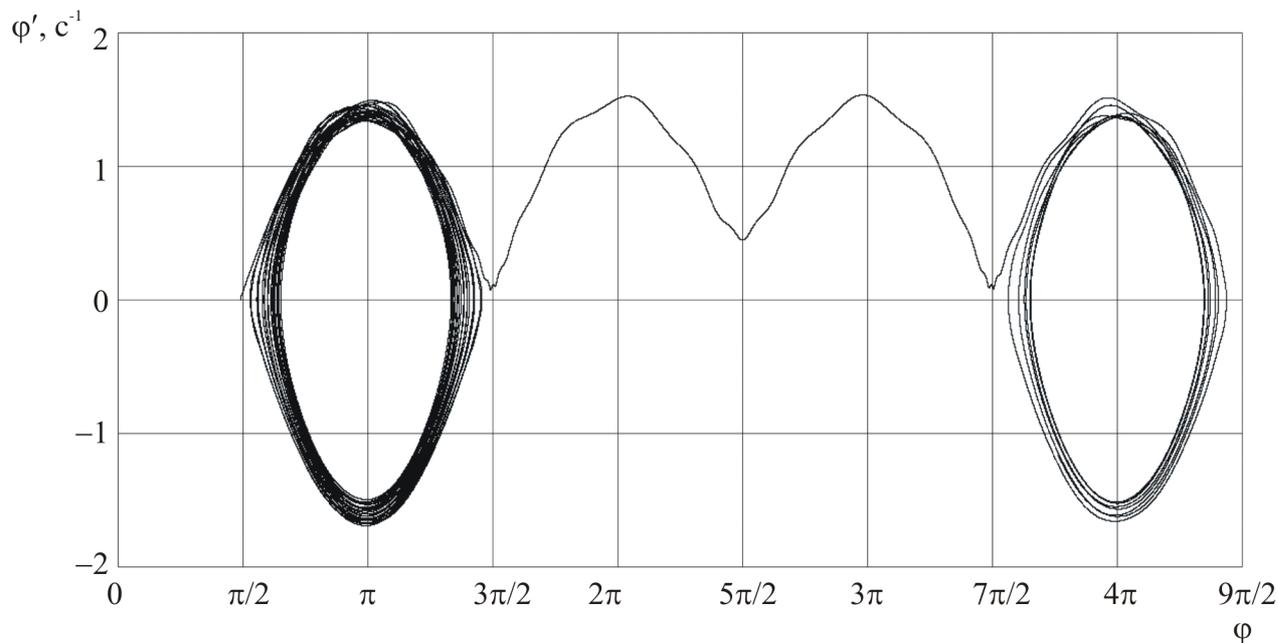


Рис. 4. Фазовая траектория ТС

### Заключение

В статье получены уравнения движения упругой ТС, которые обобщают известные математические модели, например [2, 3], и позволяют проводить исследование движения космической ТС с учётом упругости троса. Уравнения (22) и (23) позволяют исследовать хаотическое поведение ТС не только в силу малого эксцентриситета [3], но и в

силу упругих колебаний троса. Рассмотренный частный случай движения с тросом постоянной длины показал, что даже в такой упрощённой системе наличие эксцентриситета приводит к появлению хаотических режимов движения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (09-01-00384-а).

**Библиографический список**

1. Белецкий, В.В. Динамика космических тросовых систем [Текст]/ В.В. Белецкий, Е.М. Левин - М.: Наука. 1990. - 329 с.
2. Williams, P. Tethered planetary capture: controlled maneuvers [Text]/ P. Williams, C. Blanksby, P. Trivailo // Acta Astronautica. - 2003. - V. 53. - P. 681-708.
3. Misra, A.K. Dynamics and control of tethered satellite systems [Text]/ A.K. Misra // Acta Astronautica. - 2008. - V. 63. - P. 1169-1177.
4. Сидоров, И.М. Об использовании тросовых систем для создания постоянно действующего транспортного канала в космическом пространстве [Текст]/ И.М. Сидоров // Полет. - 2000. № 8. - С. 36-39.
5. Асланов, В.С. Пространственное движение космической тросовой системы, предназначенной для доставки груза на Землю [Текст]/ В.С. Асланов, А.С. Ледков, Н.Р. Стратилатов // Полет.- 2007. №2. - С.28-33.
6. Асланов, В.С. Колебания тела с орбитальной тросовой системой [Текст]/ В.С. Асланов // Прикладная математика и механика. - 2007. Т. 71. - Вып. 6. - С. 1027-1033.
7. Aslanov, V.S. The Oscillations of a Spacecraft under the Action of the Tether Tension Moment and the Gravitational Moment [Text]/ V.S. Aslanov // AIP. Conf. Proc. 2008.- V. 1048. - P. 56-59.
8. Белецкий, В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс [Текст]/ В.В. Белецкий - М.: Наука, 1965. - 416 с.
9. Алпатов, А.П. Космические тросовые системы. Обзор проблемы [Текст]/ А.П. Алпатов, В.И. Драновский, А.Е. Закржевский, А.В. Пироженко, В.С. Хорошилов // Космічна наука і технологія. - 1997. - Т3. №5/6. - С. 21-29.
10. Пироженко, А.В. Хаотические режимы движения в динамике космических тросовых систем. 1. Анализ проблемы

[Текст]/А.В. Пироженко // Космічна наука і технологія. - 2001. - Т.7. №2/3. - С. 83-89.

**References**

1. Beletsky, V.V. Dynamics of space tether systems [Text]/ V.V. Beletsky, E.M. Levin. - Moscow: Nauka, 1990. 329 p.
2. Williams, P. Tethered planetary capture: controlled maneuvers [Text]/ P. Williams, C. Blanksby, P. Trivailo // Acta Astronautica. - 2003. - V. 53. - P. 681-708.
3. Misra, A.K. Dynamics and control of tethered satellite systems [Text]/ A.K. Misra // Acta Astronautica. - 2008. - V. 63. - P. 1169-1177.
4. Sidorov, I.M. About using tethers for creation permanently operating transfer channel in space [Text]/ I.M. Sidorov // Polyot . - 2000. № 8. P. 36-39.
5. Aslanov, V.S. Spatial movement of the space tether system intended for delivery of a cargo to the Earth [Text]/ V.S. Aslanov, A.S. Ledkov, N.R. Stratilatov // Polyot.- 2007, №2, P. 28-33.
6. Aslanov, V.S. The oscillations of a body with an orbital tethered system [Text]/ V.S. Aslanov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. -2007. - Vol. 71. - P. 926-932.
7. Aslanov, V.C. The Oscillations of a Spacecraft under the Action of the Tether Tension Moment and the Gravitational Moment [Text]/ V.S. Aslanov // AIP. Conf. Proc. 2008.- V. 1048. - P. 56-59.
8. Beletsky, V.V. Motion of an artificial satellite of the Earth [Text]/ V.V. Beletsky - Moscow.: Nauka. 1965. - 416 p.
9. Alpatov, A.P. The space tether systems. Review of a problem [Text]/ A.P. Alpatov, V.I. Dranovskiy, A.E. Zakrjevskiy, A.V. Pirozhenko, V.S. Horoshilov // Kosmichna nauka i ithnologita. - 1997. Vol 3. №5/6. - P. 21-29.
10. Pirozhenko, A.V. Chaotic modes of motion in dynamic sot tethet systems. 1. Problem analysis [Text]/ A.V. Pirozhenko // Kosmichna nauka i ithnologita. - 2001. - Vol.7, №2/3. - P. 83-89.

**CHAOTIC MOTION OF THE ELASTIC TETHER SYSTEM**© 2009 V. S. Aslanov<sup>1</sup>, A. V. Pirozhenko<sup>2</sup>, B. V. Ivanov<sup>1</sup>, A. S. Ledkov<sup>1</sup><sup>1</sup>Samara State Aerospace University<sup>2</sup>Institute of Technical Mechanics National Academy of Science  
of Ukraine & National Space Agency of Ukraine

The motion of the elastic tether system around of its center of mass is considered. The tether system consist of two tip bodies and a weightless elastic tether. The tether is in deployed state. Center of mass of system move along an elliptical trajectory. With the help of Lagrange's equations of the second kind the equations of motion of the elastic tether system are constructed. As an independent variable the true anomaly angle is chosen. The particular case of motion of a system with the constant length tether is considered. It is shown, that in this case at the system there is a chaos.

*Tether system, elastic vibrations, Lagrange's equations, chaos, Poincarè map, elliptical orbit.*

**Информация об авторах**

**Асланов Владимир Степанович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Самарского государственного аэрокосмического университета. Область научных интересов: динамика движения космических аппаратов и соосных тел, космические тросовые системы. E-mail: aslanov\_vs@mail.ru.

**Пироженко Александр Владимирович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт технической механики Национальной академии наук Украины и Национального космического агентства Украины, Область научных интересов: хаотическая динамика механических, движение тел в космическом пространстве, жидких и газовых средах. E-mail: alex.pirozhenko@mail.ru.

**Иванов Борис Всеволодович**, аспирант кафедры теоретической механики Самарского государственного аэрокосмического университета. Область научных интересов: космические тросовые системы, теория колебаний и устойчивость движения. E-mail: boris063@mail.ru.

**Ледков Александр Сергеевич**, кандидат технических наук, ассистент кафедры теоретической механики Самарского государственного аэрокосмического университета. Область научных интересов: неуправляемое движение космических аппаратов в разреженной среде, космические тросовые системы. E-mail: ledkov@inbox.ru.

**Aslanov, Vladimir Stepanovich**, Head of Chair of Theoretical Mechanics Department, Full Professor, Dr. Sc. Techn, Samara State Aerospace University. Area of research: dynamics of movement of space vehicles and coaxial bodies, space tether systems. E-mail: aslanov\_vs@mail.ru.

**Pirozhenko, Alexander Vladimirovich**, Leading Researcher, Dr. Sc. Ph.-Mat., Institute of Technical Mechanics National Academy of Science of Ukraine & National Space Agency of Ukraine. Area of research: chaotic dynamics, motion of bodies in space, liquid and gas. E-mail: alex.pirozhenko@mail.ru.

**Ivanov, Boris Vsevolodovich**, the post-graduate student of Theoretical Mechanics Department, Samara State Aerospace University. Area of research: space tether systems, theory of oscillations and motion stability. E-mail: boris063@mail.ru.

**Ledkov, Alexander Sergeevich**, the post-graduate student, the assistant of Theoretical Mechanics Department, Samara State Aerospace University. Area of research: uncontrollable movement of space vehicles in the rarefied environment, space tether systems. E-mail: ledkov@inbox.ru.