

МЕТОД РАСЧЁТА ДИНАМИЧЕСКИХ СХЕМ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ДЛЯ СОЗДАНИЯ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ ИХ ДВИЖЕНИЯ

© 2020

В. А. Лобанов старший научный сотрудник;
научно-производственный центр автоматики и приборостроения
имени Н.А. Пилюгина, г. Москва;
volekadasa@rambler.ru

Динамические схемы ракет-носителей тандемной схемы рассчитываются по ОСТ 92-4548-85. Собственные формы и частоты упругой конструкции рассчитываются с использованием MSC Nastran или аналогичной программы. Предлагается дополнение к существующим методам расчёта динамических схем жидкостных ракет с учётом их упругости методом, ориентированным на оперативное создание исходных данных для разработки систем стабилизации их движения. Разработана методика, содержащая расчёт собственных форм и частот упругих колебаний конструкции ракеты и коэффициентов взаимовлияния мод упругого движения и дополнительных степеней свободы. Для подтверждения работоспособности методики при записи результатов в аналитическом виде для ракет-носителей тандемной схемы повторно выводятся формулы ОСТ. При обосновании предлагаемого метода расчёта динамических схем получены результаты, практически совпадающие с уже используемыми формулами для рассматриваемого круга задач. Универсальность предлагаемого подхода иллюстрируется расчётом коэффициентов, отсутствующих в ОСТ из-за неучёта в нём факторов, влияющих на динамику ракет. Предлагаемый подход отличается своей общностью, что позволяет описывать разные типы конструкций ракет-носителей и учитывать все существенные факторы, влияющие на динамику их движения.

Уравнения движения ракеты; динамическая схема упругой жидкостной ракеты; уравнения Лагранжа; механическая модель динамики жидкости.

Цитирование: Лобанов В.А. Метод расчёта динамических схем ракет-носителей космических аппаратов для создания систем стабилизации их движения // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2020. Т. 19, № 1. С. 51-63. DOI: 10.18287/2541-7533-2020-19-1-51-63

Введение

Динамические схемы ракет-носителей (РН) тандемной схемы рассчитываются по ОСТ 92-4548-85. Собственные формы и частоты упругой конструкции рассчитываются с использованием MSC Nastran или аналогичной программы. Целью данной работы является методика, содержащая расчёт собственных форм и частот упругих колебаний конструкции РН и коэффициентов взаимовлияния мод упругого движения и дополнительных степеней свободы. Для подтверждения работоспособности методики при записи результатов в аналитическом виде для ракет тандемной схемы повторно выводятся формулы ОСТ. Универсальность предлагаемого подхода иллюстрируется расчётом коэффициентов, отсутствующих в ОСТ из-за неучёта в нём факторов, влияющих на динамику РН. Методика распространяется на конструкции РН произвольной формы.

В работах по динамике РН упругие свойства корпуса рассматриваются с использованием механического аналога в виде упругой балки с переменными погонными жёсткостями и массами. Соответственно уравнения, описывающие динамику, имеют вид дифференциальных уравнений в частных производных по продольной координате стержня. Нахождение форм упругого движения такой модели математически достаточно сложно. Обычно инженеры не могут вывести уравнения упругого движения разрабатываемой РН и вынуждены пользоваться готовыми формулами из учебников или ОСТ, что ограничивает возможность расчёта новых конструкций.

Однако сама инженерная практика подсказывает возможность не использовать описание движения в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных, а решать задачу для конечного количества элементов, используя методы линейной алгебры. Более того, теория малых колебаний механических систем, например в [1], описывает системы с конечным количеством элементов без нахождения решений дифференциальных уравнений в частных производных. Предположение о малости колебаний допустимо, так как целевая задача динамической схемы – получение системы управления, обеспечивающей асимптотическую устойчивость колебательных степеней свободы ракеты.

В инженерной практике корпус РН описывается ограниченным количеством (несколько десятков) конечных элементов. Так делалось всегда и делается в программе MSC Nastran. Разница только в детализации и количестве измерений (плоское и пространственное).

Возможны два варианта описания такой механической системы:

- совокупность твёрдых тел с упругими связями между ними;
- совокупность невесомых упругих элементов с присвоением инерционных свойств точкам, в которых измеряются их деформации.

Второй вариант является общепринятым, но первый очень нагляден, а инерционные свойства для первого варианта следуют из механики твёрдого тела. Автору больше был «симпатичен» первый вариант и поэтому он реализовывал оба варианта и получил близкие результаты. Так как второй вариант распространён, то в дальнейшем использовался только он.

Уравнения движения упругого корпуса РН тандемной схемы в поперечном направлении

Расчётная схема упругого корпуса РН, содержащего, например, 14 конечных элементов с 15 точками, в которых измеряются координаты и которым приписываются инерционные свойства в плоском движении, выглядит, например, следующим образом (рис. 1).



Рис. 1. Упрощённая конечно-элементная схема корпуса РН тандемной компоновки

Управляющая сила приложена в точке 1 и направлена перпендикулярно. Консольные элементы (на рис. 1 отсутствуют) могут дополнить схему, но не приведут к качественным изменениям и не влияют на справедливость нижеизложенного.

Достаточно неочевидное понятие «поля массовых сил» введено для возможности не учитывать продольное перемещение системы, что привело бы к увеличению размер-

ности вектора переменных. Это понятие введено в ряде основных работ по динамике РН (например в [2]), хотя, по мнению автора, это нежелательно из-за отсутствия его подробного обоснования. В данной работе понятие «поля массовых сил» используется с целью повтора вывода упругих коэффициентов, но при усложнении расчётной схемы возможен отказ от его использования.

Каждой координате (нечётной) соответствует масса. Чётным координатам обычно приписывается ненулевой момент инерции (в некоторых случаях нулевой). Это механическая модель и силы, действующие на неё, – физические. Описание движения механических систем в общем случае возможно уравнением Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = f_i. \quad (1)$$

Здесь $L = T - P$ – лагранжиан механической системы – разность кинетической (T) и потенциальной (P) энергий системы; q_i – i обобщённая координата; f_i – обобщённая сила, соответствующая i обобщённой координате.

Переход к обобщённым силам и переменным прост, так как на схему не накладываются связи. Физические переменные и силы совпадают с обобщёнными. Расчёт потенциальной и кинетической энергии не вызывает особых трудностей.

В простейшем варианте это:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1,3,5\dots} m_i \dot{x}_i^2 + \sum_{i=2,4,6\dots} j_i \dot{x}_i^2 \right), \\ P &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1,3,5\dots} k_{1i} (x_i - x_{i+2})^2 + \sum_{i=2,4,6\dots} k_{2i} (x_i - x_{i+2})^2 \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где m_i, j_i – инерционные свойства, приписываемые i -й точке; k_{1i}, k_{2i} – жёсткость на сдвиг и кручение элемента между точками i и $i+2$.

Может быть использована матрица жёсткостей и тогда потенциальная энергия элемента системы считается с использованием матричного умножения. Однако уточнения в расчётах энергий не приводит к качественным изменениям в методе получения модели движения системы.

Нахождение производных также не вызывает трудностей, хотя иногда и громоздко. Автор использует символьный вычислитель Matlab для облегчения работы и избежания ошибок. В результате дифференцирования могут появляться нелинейные члены (например произведения переменных или их квадраты). Для того, чтобы остаться в линейной математике, необходимо отбросить такие члены.

В результате получается система линейных уравнений:

$$M\ddot{x} + Kx = \left[f_{ynp} \ 0 \dots 0 \right]^T. \quad (3)$$

Обычно (и в MSC Nastran) вышеописываемые действия с энергиями не делаются. Нужные фрагменты матриц M и K для каждого из конечных элементов уже готовы и требуется их алгебраическое сложение. В результате получаются ленточные матрицы M и K , совпадающие с получаемыми вышеописанным методом.

Для задачи моделирования или получения передаточной функции объекта для разработки исходных данных (ИД) для системы управления можно пользоваться полу-

ченным уравнением (3) без изменений. Однако делается ещё один шаг – переход к нормализованным обобщённым координатам и отбрасывание тонов (мод) высокочастотного движения. Цели нормализации – разделение системы уравнений на независимые уравнения, позволяющее упростить динамическую схему путём отказа от высокочастотных тонов с малыми перемещениями точек. Дополнительно снижаются требования к шагу интегрирования системы во времени.

Для нормализации находится движение корпуса как суммы гармонических (по времени) ортогональных движений. Описание такой нормализации есть в [1]. Для практической работы в Matlab (и везде) есть функция $\text{eig}(K, M)$, дающая матрицу собственных векторов V , где каждый столбец есть форма колебаний тона с собственной частотой, квадрат которой есть элемент диагонали матрицы D .

Связь нормализованных q и первоначальных обобщённых x (совпадающих с физическими) переменными следующая:

$$\begin{aligned} x &= Vq, \\ \ddot{x} &= V\ddot{q}. \end{aligned} \tag{4}$$

При этом выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} KV &= MVD, \\ V^T M V &= E. \end{aligned} \tag{5}$$

Применение (4) и (5) к (3) даёт:

$$E\ddot{q} + EDq = V^T [f_{ynp} \ 0 \dots 0]^T, \tag{6}$$

где E – единичная матрица, имеющая размерность.

Отсортируем порядок переменных в (6) так, чтобы возрастала собственная частота тона. При этом меняются местами строки в D и V^T (в V меняются номерами столбцы, но при этом x и \ddot{x} остаются прежними, как в (4)). Первые две строки суть движение системы как твёрдого тела (форма в виде прямых линий, а соответствующие частоты $\omega_1^2 \approx 0, \omega_2^2 \approx 0$), их пока не рассматриваем. Чтобы сохранить, например, три упругих тона, нужно в (6) после сортировки удалить нижние 25 строк.

Останутся три уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 &= V_3^T [f_{ynp} \ 0 \dots 0]^T, \\ \ddot{q}_4 + \omega_4^2 q_4 &= V_4^T [f_{ynp} \ 0 \dots 0]^T, \\ \ddot{q}_5 + \omega_5^2 q_5 &= V_5^T [f_{ynp} \ 0 \dots 0]^T. \end{aligned} \tag{7}$$

Из (7) следует формула: $a_{q_j \delta} = v_j(x_\delta) \frac{\partial f_{ynp}}{\partial \delta}$.

Интегрируя (7) по времени, получаем изменение всех q_j . Скалярно умножая все q на свои строки матрицы V , получим отклонение любой точки упругой РН по времени, учитывая три тона колебаний (как в ОСТ).

Использование описанного метода фактически возвращает инженера к временам, когда «Nastran» не был широко распространён. Это и недостаток, и преимущество.

Недостаток – малая автоматизация занесения исходных данных для расчётов, что ограничивает количество элементов в модели несколькими десятками. Однако именно такой уровень детализации соответствует целям расчётов по ОСТ 92-4548-85.

Сейчас существует широкая возможность автоматизации аналитических (символьных) вычислений. Операции получения частных производных осуществляются в символьных вычислителях мгновенно и безошибочно. Автор для теста использовал описываемый метод для расчёта упругой динамики проектируемого криогенного ракетного блока (РБ) с космическим аппаратом (КА) «Geostar-3», который был задан в формате Крейга-Бэмптона. Время, затраченное на написание программы, сбор и занесение ИД, расчёт, проверку результатов, составило несколько дней. Результаты совпали с традиционным расчётом в MSC Nastran с точностью до методов решения систем линейных уравнений в Matlab и в Nastran.

Достоинства – универсальность и возможность оперативного усложнения модели. Соответствие ОСТ в смысле плоского описания динамики (Nastran использует пространственную модель и создаёт этим дополнительные трудности). Доступность всех промежуточных результатов.

Метод может быть очень полезен для оперативного получения оценки динамики разрабатываемой конструкции на начальных этапах проектирования (техническое предложение, эскизный проект), когда нет времени для построения полной модели и свойства элементов конструкции известны приближённо или уточняются по результатам проектирования.

Отметим следующие особенности полученных результатов:

– из-за выбора расчётной схемы с полем массовых сил результат нормализации дал независимые обобщённые переменные q . Наличие продольной силы, приложенной к точке I , приведёт к появлению следящей силы, которая в соответствии с [3] приведёт к появлению коэффициентов взаимовлияния $a_{q_n q_m}$, которых нет в ОСТ;

– чётные переменные – это угол отклонения в сечении относительно невозмущённого положения. Однако часто предпочитают оценивать его как дифференцирование по продольной координате нечётных переменных (в ОСТ написано именно так). Автор проверил близость подходов на примере одного тестового расчёта и убедился, что они близки аналогично как точная производная функции и её оценка с использованием значений функции в соседних точках. Использование величины формы – угол – более предпочтительно (особенно это заметно в узлах соединения с консолью);

– два тона с нулевой частотой не рассматриваются в силу простоты расчётной схемы, выбранной для упругих целей. Так как движение твёрдого тела для РН является наиболее важным, то уравнения динамики твёрдой РН записываются по существенно более сложным расчётным схемам;

– в ОСТ всему вектору нормализованных переменных приписывается размерность, равная размерности вектора физических переменных (метр в (4)). В описываемом методе это невозможно и размерными становятся вектора форм, а нормализованные переменные являются безразмерными.

Уравнения движения упругого корпуса РН при наличии присоединённых жидкостных осцилляторов

Дальнейшее рассмотрение предполагает оценку взаимодействия упругого движения и жидкости. Для этого в расчётную схему вносим механическую модель жидкости. Так как в схеме используется понятие вектора поля массовых сил, модель жидкости

выбрана как грузик на пружинке на невесомой бесконечно жёсткой спице, прикреплённой в точке, где смещение описывается переменной x_j , а угол отклонения сечения – x_{j+1} . Для определённости принимаем $j = 9$. При этом часть массы ракеты m , которую раньше приписывали к x_9 , освобождается и становится маятником m на пружинке. Соответственно в матрице М элемент $M_{9,9}$ уменьшается на m (рис. 2).



Рис. 2. Упрощённая схема корпуса РН тандемной компоновки с механическим аналогом колеблющейся жидкости в баке

Соответственно к ранее приведённой формуле кинетической энергии нужно добавить:

$$T_m = \frac{1}{2}mv^2, \quad v^2 = (\dot{x}_j + \dot{s})^2 + (\dot{x}_{j+1}s)^2, \quad j = 9. \quad (8)$$

В матрицу М необходимо поместить следующие элементы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_m}{\partial \dot{x}_j} \right) &= \frac{d}{dt} (m\dot{x}_j + m\dot{s}), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_m}{\partial \dot{x}_{j+1}} \right) &= \frac{d}{dt} (ms^2\dot{x}_{j+1}), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_m}{\partial \dot{s}} \right) &= \frac{d}{dt} (m\dot{s} + m\dot{x}_j), \end{aligned} \quad (9)$$

где s – расстояние от оси РН до массы m .

В ОСТ используется другая переменная, обозначающая жидкость – s_{ocm} . Имеется следующая связь: $s = s_{ocm}l_m$, где l_m – длина эквивалентного маятника.

Так как рассматривается линейная динамическая схема с малыми колебаниями, то слагаемое $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_m}{\partial \dot{x}_{j+1}} \right) = \frac{d}{dt} (ms^2 \dot{x}_{j+1})$ необходимо отбросить как содержащее куб малых величин и приводящее к нелинейности уравнения Лагранжа.

В результате суммарная матрица масс добавится тридцать первыми столбцом и строкой с нулевыми элементами, кроме $M_{9,31} = m$, $M_{31,9} = m$, $M_{31,31} = m$. Необходимо обратить внимание на неизменность элемента $M_{9,9}$, так как добавка компенсируется: $-m + m = 0$.

К ранее приведённой формуле потенциальной энергии нужно добавить:

$$P_m = \frac{1}{2} k_m s^2 + msx_{j+1} a_x, \quad j = 9, \quad a_x = \frac{f_x}{m_{PH}}, \quad (10)$$

где k_m – коэффициент жёсткости пружины механического аналога жидкости; m_{PH} – суммарная текущая масса РН; a_x – интенсивность поля массовых сил (продольное ускорение).

Дифференцирование P_m даст следующие добавки к матрице K :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_m}{\partial x_{j+1}} &= ms a_x, \\ \frac{\partial P_m}{\partial s} &= k_m s + m a_x x_{j+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

В результате суммарная матрица жёсткостей добавится тридцать первыми столбцом и строкой с нулевыми элементами, кроме $K_{10,31} = m a_x$, $K_{31,10} = m a_x$, $M_{31,31} = k_m$.

Новые матрицы масс M' и жёсткостей K' для схемы, приведённой на рис. 2, в блочном виде будут иметь вид:

$$\begin{aligned} M' &= \begin{bmatrix} M & M_m^T \\ M_m & m \end{bmatrix}, \quad M_m = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m, 0, \dots, 0], \\ K' &= \begin{bmatrix} K & K_m^T \\ K_m & k_m \end{bmatrix}, \quad K_m = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m a_x, 0, \dots, 0]. \end{aligned} \quad (13)$$

На данном этапе уже не нужно находить собственные формы, соответствующие схеме на рис. 2, поскольку нормализация формы, соответствующей движению маятника, не нужна. Необходимо оставить уравнение движения маятника в физических параметрах для возможности внесения в него, например, нелинейностей.

Поэтому проводится замена переменной методом, когда координаты механического аналога подвижной жидкости остаются физическими, а все остальные нормализуются.

Уравнения замены переменных следующие:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ s \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{s} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Исходное уравнение (15) (после замены переменных и умножения слева на транспонированную матрицу замены) примет вид (16), а после перемножения примет вид (17).

$$M' \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{s} \end{bmatrix} + K' \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = [f_{ynp} \ 0 \dots 0, 0]^T, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M & M_m^T \\ M_m & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{s} \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K & K_m^T \\ K_m & k_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T [f_{ynp} \ 0 \dots 0, 0]^T, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} E & V^T M_m^T \\ M_m V & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & V^T K_m^T \\ K_m V & k_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^T [f_{ynp} \ 0 \dots 0]^T \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Запишем последнюю строку уравнения (17) и при этом учтём только три тона колебаний с самыми низкими частотами (формы твёрдого тела не считаем):

$$\begin{aligned} m\ddot{s} + mv_{j,1}\ddot{q}_1 + mv_{j,2}\ddot{q}_2 + mv_{j,3}\ddot{q}_3 + ma_x v_{j+1,1}q_1 + ma_x v_{j+1,2}q_2 + ma_x v_{j+1,3}q_3 + ks = 0, \\ \ddot{s} + v_{j,1}\ddot{q}_1 + v_{j,2}\ddot{q}_2 + v_{j,3}\ddot{q}_3 + a_x v_{j+1,1}q_1 + a_x v_{j+1,2}q_2 + a_x v_{j+1,3}q_3 + \frac{k}{m}s = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая, что $\frac{k}{m} = \omega_s^2$ есть квадрат парциальной частоты жидкостного осциллятора и $s = s_{ocm} l_m$ (l_m – длина эквивалентного маятника), получим:

$$\ddot{s}_{ocm} + \sum_i \frac{v_{j,i}}{l_m} \ddot{q}_i + \sum_i \frac{a_x v_{j+1,i}}{l_m} q_i + \omega_s^2 s_{ocm} = 0. \quad (19)$$

Видно, что коэффициенты a_{sq}'' , a_{sq} совпадают с формулами ОСТ, если эти формулы записать в терминах эквивалентных маятников.

Система уравнений (17) без последнего уравнения запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} [\ddot{q}_i] + V^T M_m^T \ddot{s} + [\omega_{qi}^2 q_i] + V^T K_m^T s = V^T [f_{ynp} \ 0 \dots 0]^T, \\ [\ddot{q}_i] \cdot [\omega_{qi}^2 q_i] - \text{вектора-столбцы, } i = 1 \dots 30. \end{aligned} \quad (20)$$

$V^T M_1^T$ содержат для каждой строки величину $m l_m V_{i,9} = a_{q,s}^n$, а вектор $V^T K_m^T$ содержит для этой строки $a_x m l_m V_{i,10} = a_{q,s}$, если заменить $s = s_{ocm} l_m$, совпадающие с коэффициентами ОСТ.

В результате расчётная схема на рис. 2 даёт уравнения динамики упругого тела с эквивалентными маятниками, совпадающими с уравнениями ОСТ. Отличие имеется только в том, что по ОСТ позиционные силы взаимодействия жидкости и упругой конструкции считаются для уровня свободной поверхности жидкости, а инерционные силы – для уровня продольной координаты эквивалентного маятника. Расчётная схема на рис. 2 предполагает взаимодействие только для переменных x_9 и x_{10} , находящихся на одном уровне (координата эквивалентного маятника). Расхождение вызвано использованием механической модели жидкости.

Можно сделать вывод, что расчётная схема составного упругого стержня с механической моделью жидкости в виде массы на пружине позволяет получить уравнения движения упругой жидкостной РН, близкие (практически совпадающие) с уравнениями ОСТ 92-4548-85.

Учёт упругой подвески двигателя делается аналогично. Обобщённая переменная δ совпадает с физической и характеризует отклонение двигателя от направления $x_2 + \delta_c$ (δ_c – заданное системой управления положение двигателя). Потенциальная и кинетическая энергии двигателя записаны ниже и должны суммироваться с энергиями упругой конструкции:

$$P_d = \frac{1}{2} k_o (\delta - \delta_c)^2, \quad T_d = \frac{1}{2} m_o (\dot{x}_1 - \dot{\delta} l_o - \dot{x}_2 l_o)^2 + \frac{1}{2} j_o (\dot{\delta} + \dot{x}_2)^2, \quad (21)$$

где k_o – коэффициент жёсткости подвески двигателя; m_o – масса двигателя; l_o – расстояние от центра масс двигателя до оси качания; j_o – момент инерции двигателя.

Управляющая сила $f_{упр} = p\delta$, где p – тяга МДУ. Дальнейшее дифференцирование и расширение вектора состояния (соответственно и расширение матриц M' и K') аналогично рассмотренному выше. Следует отметить, что для повторения уравнения ОСТ для упругой подвески двигателя необходимо в выражениях (21) исключить \dot{x}_2 , а в выражении для поперечной силы не учитывать x_2 . Необходимость этого является следствием отсутствия в формулах ОСТ величины, производной от формы в месте установки двигателя. Отсутствие угловой формы в месте установки двигателей, совместно с вышеприведённым замечанием об оценивании её с помощью производной по продольной координате, указывает на то, что ОСТ в расчётной схеме предполагает отсутствие угловых координат в отличие от расчётной схемы на рис. 1. Именно это допущение обуславливает неучёт следящей силы в уравнениях ОСТ.

Уравнения движения упругого корпуса РН с учётом следящей силы

Вернёмся к расчётной схеме на рис. 1 и рассмотрим влияние следящей силы двигателя, приложенной к точке l на динамику упругой линии. Влияние следящей силы не учитываются в ОСТе, но описываются в [3]. Делается это с помощью метода Бубнова-Галеркина достаточно сложно, и форма результатов затрудняет использование их как дополнение расчётов по ОСТ. Вывод коэффициентов в уравнения движения упругой

линии, описывающие следящую силу предлагаемым методом, представляет практический интерес.

Вместо f_{ynp} будет действовать поперечная сила $f = f_{ynp} - p \sin(x_2) \approx f_{ynp} - px_2$. Необходим учёт работы f_x при продольном перемещении элементов системы. Вводить в систему продольные координаты элементов (соответственно и продольную жёсткость элементов) нерационально, так как это привело бы к появлению продольных форм движения. Если считать расстояния между элементами постоянными в зависимости от чётных координат (углы от продольной оси), то элементы системы приближаются к первому элементу по продольной координате. Суммарная потенциальная энергия системы уменьшается на величину $\Delta P(x_2, x_4, \dots, x_n)$. Так как перемещение происходит против поля массовых сил, то частные производные потенциальной энергии от координат отрицательные.

Возвращаемся к полной системе уравнений до нормализации (3), но с добавочной матрицей жёсткости K_1 , содержащей учёт продольного перемещения элементов системы, и величиной силы в точке двигателя f :

$$M\ddot{x} + (K + K_1)x = [f \ 0 \dots 0]^T. \quad (22)$$

Матрица K_1 есть результат дифференцирования по обобщённым переменным добавочной потенциальной энергии P_1 :

$$P_1 = P_0 + \Delta P = P_0 - a_x m_2 l_1 \frac{x_2^2}{2} - a_x m_3 \left(l_1 \frac{x_2^2}{2} + l_2 \frac{x_4^2}{2} \right) - a_x m_4 \left(l_1 \frac{x_2^2}{2} + l_2 \frac{x_4^2}{2} + l_3 \frac{x_6^2}{2} \right) - \dots - a_x m_n \sum_{k=1}^{n-1} l_k \frac{x_{2k}^2}{2} = P_0 - \frac{a_x}{2} \sum_{i=2}^n \left(m_i \sum_{k=1}^{i-1} l_k x_{2i}^2 \right), \quad n = 15. \quad (23)$$

Здесь P_0 – потенциальная энергия элементов системы при нулевом векторе x ; m_i – масса, соответствующая верхней точке i -го элемента системы; l_i – расстояние между i и $i+1$ точками.

В (23) использовано приближённое равенство: $1 - \cos(\alpha) = 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{\alpha^2}{2}$.

Вспользуемся формулами (4), использованными при нормализации системы без учёта следящей силы, подставим их в (22) и учтём (5):

$$\begin{aligned} MV\ddot{q} + (K + K_1)Vq &= [f \ 0 \dots 0]^T, \\ V^T MV\ddot{q} + V^T KVq + V^T K_1 Vq &= V^T [f \ 0 \dots 0]^T, \\ E\ddot{q} + (ED + V^T K_1 V)q &= V^T [f_{ynp} \ 0 \dots 0]^T - V^T [px_2 \ 0 \dots 0]^T. \end{aligned} \quad (24)$$

Подстановкой $x_2 = V_{2,1\dots n}q$ последнее выражение в (24) преобразуется к виду:

$$E\ddot{q} + (ED + V^T K_1 V)q + V^T pK_2 q = V^T [f_{ynp} \ 0 \dots 0]^T. \quad (25)$$

Здесь

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,2n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= -a_x l_1 (m_{PH} - m_1), \\ k_2 &= -a_x l_2 (m_{PH} - m_1 - m_2), \\ k_n &= -a_x l_{n-1} \left(m_{PH} - \sum_{i=1}^{n-1} m_i \right) = -a_x l_{n-1} m_n. \end{aligned}$$

Запишем (25) в окончательном виде:

$$E\ddot{q} + (ED + V^T (K_1 V + pK_2))q = V^T [f_{ypp} \ 0 \dots 0]^T. \quad (26)$$

Выражение (26) описывает движение рассматриваемой системы с использованием форм и частот, соответствующих системе без следящей силы, но матрица жёсткости уже не является симметрической. Из-за этого уравнения (26) нельзя рассматривать отдельно. Уменьшение размерности матрицы $V^T (K_1 V + pK_2)$ проверяется так же, как и для (6), путём удаления строк и столбцов после сортировки диагональной матрицы D .

Процедуру вычисления $V^T (K_1 V + pK_2)$ из выражения (26) можно осуществить численно или поручить символьному вычислителю. Однако интересно это проделать вручную для сравнения с формулами, приведёнными в [3]:

$$V^T K_1 V = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n k_i v_{2i,1}^2 & \sum_{i=1}^n k_i v_{2i,2} v_{2i,1} & \dots & \sum_{i=1}^n k_i v_{2i,2n} v_{2i,1} \\ \sum_{i=1}^n k_i v_{2i,1} v_{2i,2} & \sum_{i=1}^n k_i v_{2i,2}^2 & \dots & \sum_{i=1}^n k_i v_{2i,2n} v_{2i,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n k_i v_{2i,1} v_{2i,2n} & \sum_{i=1}^n k_i v_{2i,2} v_{2i,2n} & \dots & \sum_{i=1}^n k_i v_{2i,2n}^2 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$V^T pK_2 = p \begin{bmatrix} v_{1,1} v_{2,1} & v_{1,1} v_{2,2} & \dots & v_{1,1} v_{2,2n} \\ v_{1,2} v_{2,1} & v_{1,2} v_{2,2} & \dots & v_{1,2} v_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1,2n} v_{2,1} & v_{1,2n} v_{2,2} & \dots & v_{1,2n} v_{2,2n} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

К матрице жёсткостей добавляются матрицы (27), (28), элементы которых рассчитываются, как и в [3]. Матрица (27), описывающая влияние продольной составляющей следящей силы, содержит отрицательные элементы, пропорциональные продольному

ускорению. В результате собственные частоты системы (при учёте этой составляющей следящей силы) изменяются в сторону уменьшения. Матрица (28), описывающая влияние поперечной составляющей следящей силы, содержит положительные элементы, пропорциональные тяге двигателя (как и ожидалось, система становится «более жёсткой»), и соответственно увеличивает собственные частоты системы. Следовательно результирующее влияние следящей силы зависит от конструкции ракеты и требует расчёта. При этом, конечно, изменятся и формы собственных движений.

Проведённый тестовый расчёт влияния следящей силы для одной из имеющихся жидкостных РН показал, что для уровней перегрузки, реализуемых при выведении КА, влияние следящей силы на формы и частоты первых тонов упругих колебаний мало (меньше 1%) и их учёт в ОСТ обоснован. При существенном же увеличении перегрузки (более чем в три раза) учёт следящей силы безусловно необходим.

Приведённый учёт влияния следящей силы, отсутствующий в ОСТ и соответствующий [2], демонстрирует гибкость метода и его математическую простоту.

Заключение

Рассматриваемый метод характеризуется своей оперативностью и практической направленностью. В результате его использования инженер быстро получает специализированную систему, заменяющую «Nastran» в части расчёта собственных частот и форм исследуемой конструкции РН. Для частного случая тандемной схемы ракеты метод генерирует динамическую схему, практически совпадающую с ОСТ 92-4548-85.

Использование предлагаемого метода вместо традиционных программ (имеющихся у каждого разработчика РН) предпочтительнее из-за большей автоматизации путём использования символьного вычислителя при программировании уравнений движения и связанной с этим гибкостью учёта изменений конструкции или дополнительных факторов динамики ракеты. Явление аэроупругости, например, учитывается аналогично учёту следящей силы, но силы, зависящие от координат, будут приложены по всей длине ракеты (в матрице, аналогичной K_2 в (25), будут заполнены все строки).

Для задачи разработки исходных данных, используемых при создании алгоритмов системы управления, необходимы только основные динамические свойства ракеты и, следовательно, ограничение количества элементов в расчётной схеме в рассматриваемом подходе не оказывает существенного отрицательного влияния.

В изложенном подходе не накладывается ограничений на форму конструкции, как это сделано в ОСТ. В матрицах M и K можно формализовать любую конструкцию (кольцо, крест, пакет...). Расчётная схема изменится, возможно потребуются вводить дополнительные пространственные измерения, но общий алгоритм сохраняется.

Преимущество рассмотренного метода заключается в его обоснованности и открытости, так как он начинается с уравнения Лагранжа. Этим он отличается от других методов, использующих готовые формулы или программы.

Автор выражает благодарность С.Н. Чверуку за консультации по данной работе.

Библиографический список

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
2. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1983. 296 с.
3. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.

METHOD OF CALCULATING DYNAMIC DESIGNS OF SPACE LAUNCH VEHICLES FOR DESIGNING SYSTEMS OF STABILIZATION OF THEIR MOTION

© 2020

V. A. Lobanov Senior Researcher;
Academician Pilyugin Center, Moscow, Russian Federation;
volekadasa@rambler.ru

Dynamic designs of tandem space launch vehicles are calculated according to the standard OST 92-4548-85. The eigenmodes and eigenfrequencies of the elastic structure are calculated using the MSC Nastran or a similar program. We propose an addition to the existing methods of calculating dynamic designs of liquid-propellant rockets with account for their elasticity applying a method oriented towards operational generation of input data for developing systems of stabilizing their motion. We developed a procedure containing calculation of eigenmodes and eigenfrequencies of missile body elastic modes and the coefficients of impact of the elastic modes and surplus degrees of freedom. To demonstrate the method's efficiency, in taking down the results for tandem launch vehicles in the analytical form the OST formulas are re-derived. In validating the proposed method of calculating design schemes we obtained results practically coincident with the already applied formulas for the range of tasks under examination. The versatility of the proposed method is illustrated by calculation of coefficients absent from the OST because the factors influencing rocket dynamics are not taken into account in the standard. The proposed method is distinguished by its generality, which allows describing various types of launch vehicles while taking into account all significant factors that influence the dynamics of their motion.

Equations of rocket motion; dynamic design of a flexible liquid-propellant booster; Lagrangian equations; mechanical model of fluid dynamics.

Citation: Lobanov V.A. Method of calculating dynamic designs of space launch vehicles for designing systems of stabilization of their motion. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2020. V. 19, no. 1. P. 51-63. DOI: 10.18287/2541-7533-2020-19-1-51-63

References

1. Gantmakher F.R. *Lektsii po analiticheskoy mekhanike* [Lectures on analytical mechanics]. Moscow: Nauka Publ., 1966. 300 p.
2. Rabinovich B.I. *Vvedenie v dinamiku raket-nositeley kosmicheskikh apparatov* [Introduction to launch vehicle dynamics]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1983. 296 p.
3. Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [Missile dynamics]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 2003. 520 p.