

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ АСТЕРОИДА ЭРОС 433

© 2019

**А. Ю. Шорников** аспирант кафедры космического машиностроения;  
Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королёва;  
[andreishornikov@gmail.com](mailto:andreishornikov@gmail.com)

Рассматривается алгоритм оптимизации управляемого движения космического аппарата с двигателями малой тяги в поле притяжения астероида Эрос 433. Гравитационное поле астероида имеет сложную конфигурацию. Приведена математическая модель гравитационного потенциала данного тела и математическая модель движения космического аппарата с электроракетными двигателями малой тяги. Оптимальная по быстродействию программа управления ищется с помощью принципа максимума Понтрягина. Сформулированная краевая задача решается численно модифицированным методом Ньютона. Описанный алгоритм решения может быть использован для решения схожих задач динамики полёта с малой тягой при маневрировании вблизи объектов с гравитационными полями сложной конфигурации.

*Астероид; гравитационное поле сложной конфигурации; космический аппарат; малая тяга; программа оптимального управления; принцип максимума; краевая задача.*

---

*Цитирование:* Шорников А.Ю. Оптимальное управление движением космического аппарата в поле притяжения астероида Эрос 433 // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. Т. 18, № 4. С. 146-156. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-4-146-156

### Введение

Исследования астероидов и комет направлены на удовлетворение познавательных потребностей, поиск схем противодействия космическим угрозам, изучение возможности размещения космических баз на астероидах и даже их разработке с целью добычи полезных ископаемых. Для решения данных задач необходимо проведение исследований космическими аппаратами (КА) у поверхности небесных тел. Движение космического аппарата вблизи астероидов и комет нестабильно. Это связано с неправильной геометрической формой данных тел (смещённый центр масс, полости и пустоты в структуре объекта, неравномерное распределение плотности вещества), приводящей к тому, что и продуцированные гравитационные потенциалы имеют сложную конфигурацию. Движение космического аппарата в таком поле отличается от движения вблизи сфероидальных и эллипсоидальных тел и задача маневрирования вблизи поверхности астероидов и комет становится трудноразрешимой [1].

При планировании миссий требуется проведение маневрирования у поверхности объекта. Ценность полученной научной информации зависит от длительности функционирования КА вблизи астероида. В качестве критерия оптимальности единичного манёвра выбран минимальный расход рабочего тела. В этом случае КА может совершить большее число манёвров и дольше функционировать в районе исследуемого тела. Данная работа направлена на определение оптимальной программы управления направлением тяги двигательной установки при межорбитальном переходе вблизи астероида Эрос 433. Для этого необходимо решить следующую совокупность задач: формирование модели гравитационного поля, постановка задачи оптимального управления, решение её с помощью формализма принципа максимума Понтрягина, включая численное решение краевой задачи. Выбор в качестве объекта астероида Эрос 433 обоснован

наличием результатов измерения гравитационного поля астероида космической станцией NEAR Shoemaker [2], которые позволяют произвести валидацию используемой математической модели.

### Математическая модель

В ряде источников [3-6] рассматривается проблема формализации гравитационных полей объектов со сложной геометрией. В [3] авторы предлагают представление гравитационного потенциала астероида Касталиа 4769 суммой массивных полигонов, расположенных на поверхности тела. В [4] авторы приводят сравнительный анализ полигональной модели и модели точечных притягивающих центров для астероида Клеопатра 216. В [5] авторы приводят сравнительный анализ гравитационных потенциалов, представленных в виде математических рядов, разложенных на сферические, сфероидальные, эллипсоидальные функции для спутников Марса. В [6] авторы рассматривают положение точек равновесия для 23 различных астероидов в полигональных моделях гравитационных полей.

Недостатками полигональной математической модели гравитационного поля является её громоздкость при использовании в задачах динамики полёта космических аппаратов и необходимость заранее знать физические свойства объектов – геометрию и распределение масс. При планировании миссии к неизученному ранее астероиду эти данные не могут быть получены без непосредственных измерений.

В данной работе в качестве модели гравитационного поля предлагается использовать барицентрическую модель, представляющую астероид как суперпозицию массивных точек, вращающихся с заданной угловой скоростью относительно общего барицентра [7]. Такой подход позволяет производить моделирование гравитационного поля объекта с известной степенью точности в случаях, когда информация об объекте практически отсутствует. Подход сводится к представлению гравитационного поля объекта в виде набора притягивающих точек массой  $m_i$ , движущихся вокруг центра масс объекта. Таким образом, задача моделирования гравитационного поля сводится к задаче N-тел [8]:

$$m_i = \sum_{i=1}^n m_i \rightarrow U(\mathbf{r}_{SV}) = \sum_{i=1}^n U_i(\mathbf{r}_{SV}, \mathbf{r}_{AST}^i), \quad (1)$$

где  $m_i$  - масса астероида;  $U(\mathbf{r}_{SV})$  - полный гравитационный потенциал астероида в точке с радиус вектором  $\mathbf{r}_{SV}$ ;  $U_i(\mathbf{r}_{SV}, \mathbf{r}_{AST}^i)$  - гравитационный потенциал от  $i$ -й массивной точки астероида в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}_{SV}$ .

Количество притягивающих центров для каждого астероида определяется индивидуально, исходя из соображения, что пространственная суперпозиция точечных гравитационных полей в каждый момент времени должна обеспечивать наибольшее топологическое соответствие реальной геометрии объекта моделирования. Ключевое допущение в данном случае заключается в том, что форма гравитационного поля объекта соответствует геометрической форме поверхности.

В работе [7] получена математическая модель гравитационного поля астероида Эрос 433, представляющая собой суперпозицию двух притягивающих центров. Физические характеристики астероида [9]: геометрические размеры  $34,4 \times 11,2 \times 11,2$  км, средний диаметр 16,8 км, масса  $m_i = 6,69 \cdot 10^{15}$  кг, период вращения 5,27 ч.

Массы и расстояние между притягивающими центрами выбраны таким образом, чтобы обеспечить равенство центробежных и гравитационных сил. Для астероида Эрос 433 это равенство обеспечивается следующими параметрами: массы притягивающих центров:  $m_1 = 4,356 \cdot 10^{15}$  кг,  $m_2 = 2,334 \cdot 10^{15}$  кг (рис. 1), угловая скорость вращения относительно барицентра  $5,6 \cdot 10^{-4}$  рад/с, расстояние между притягивающими центрами 10,4 км. В работе [7] анализируется точность полученной модели относительно модели гравитационного потенциала для однородного тела, геометрическая форма и масса которого совпадают с астероидом Эрос 433. Погрешность указанных моделей по величине и направлению гравитационного ускорения не превышает 7,9%.

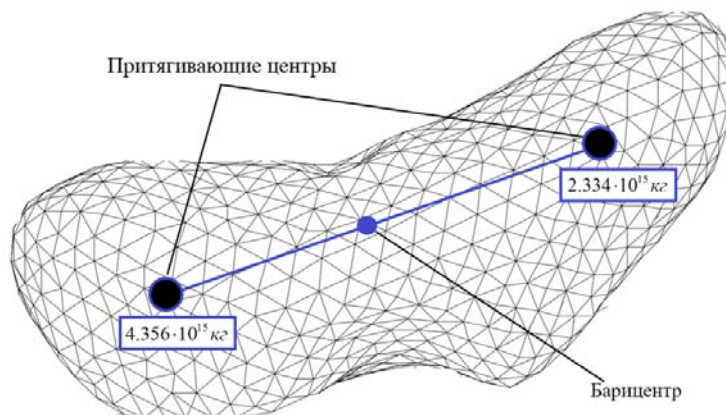


Рис 1. Двухточечная барицентрическая модель гравитационного поля астероида Эрос 433

Задача моделирования управляемого движения космического аппарата при использовании двухточечной барицентрической модели гравитационного поля астероида с учётом возмущающего воздействия от Солнца сводится к ограниченной задаче трёх тел. Моделирование проводится в трёхмерной декартовой барицентрической системе координат BsXYZ (рис. 2), центр которой находится в центре масс объекта, а оси сонаправлены с осями гелиоцентрической инерциальной системы координат. Направление тяги двигателя определяется двумя углами: угол  $\alpha$  между вектором тяги и осью  $X$  и угол  $\beta$  между вектором тяги и осью  $Y$ .

Уравнения движения КА в векторной форме примут вид:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{SV} = -\frac{\mu_{AST}^1}{|\mathbf{r}_{SV} - \mathbf{r}_{AST}^1|^3} (\mathbf{r}_{SV} - \mathbf{r}_{AST}^1) - \frac{\mu_{AST}^2}{|\mathbf{r}_{SV} - \mathbf{r}_{AST}^2|^3} (\mathbf{r}_{SV} - \mathbf{r}_{AST}^2) + \mu_{SUN} \left( \frac{\Delta}{\Delta^3} - \frac{\mathbf{r}_{SUN}}{r_{SUN}^3} \right) + \mathbf{P}; \quad (2)$$

$$\begin{cases} P_x = \frac{P\delta}{m_{SV}} \cos \alpha, & P_y = \frac{P\delta}{m_{SV}} \cos \beta, \\ P_z = \frac{P\delta}{m_{SV}} \left( \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} \right), \\ \dot{m}_{SV} = -\frac{P}{c} \delta. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $\mu_{AST}^i$  – гравитационный параметр  $i$ -го притягивающего центра в математической модели, описывающей гравитационное поле астероида;  $\mu_{SUN}$  – гравитационный параметр Солнца;  $\mathbf{r}_{SV}$  – радиус-вектор космического аппарата относительно барицентра;  $\mathbf{r}_{AST}^1, \mathbf{r}_{AST}^2$  – радиус-вектор первого и второго притягивающих центров относительно барицентра соответственно;  $\delta$  – функция переключения режимов работы двигательной установки: соответственно 0 или 1;  $\mathbf{r}_{SUN}$  – радиус-вектор Солнца относительно барицентра;  $m_{SV}$  – масса космического аппарата;  $c$  – скорость истечения рабочего тела двигателя;  $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)^T$  – вектор тяги двигательной установки.

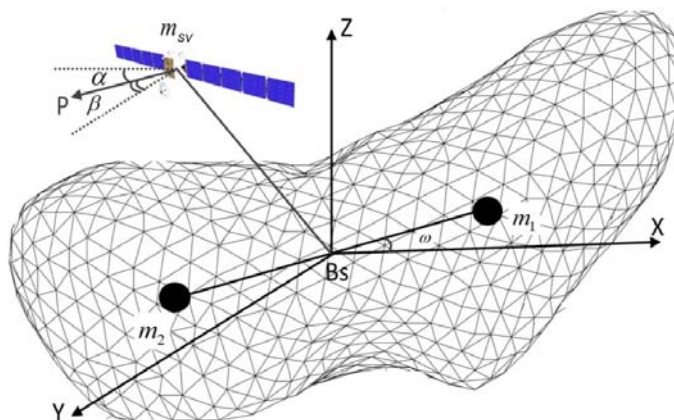


Рис. 2. К определению углов направления тяги двигательной установки космического аппарата

### Оптимизация программного управления

Поиск оптимальной программы управления вектором тяги двигательной установки будем проводить с использованием принципа максимума Понтрягина [10]. В качестве критерия оптимальности примем минимальный расход рабочего тела.

С учётом постоянства силы тяги требуется найти такие законы изменения углов управления двигательной установки и функцию переключения режимов её работы, чтобы обеспечить минимальную длительность перелёта

$$\mathbf{u}_{opt}(t) = (\alpha_{opt}(t), \beta_{opt}(t), \delta_{opt}(t))^T = \arg \min_{\mathbf{u}(t)} (T | \mathbf{r}_{SV}(0) = \mathbf{r}_s, \mathbf{V}_{SV}(T) = \mathbf{V}_s, \mathbf{r}_{SV}(T) = \mathbf{r}_f, \mathbf{V}_{SV}(T) = \mathbf{V}_f), \quad (4)$$

где  $T$  – длительность перелёта;  $\mathbf{r}_s$  и  $\mathbf{V}_s$  – радиус-вектор и вектор скорости КА на орбите старта в начальный момент времени;  $\mathbf{r}_f$  и  $\mathbf{V}_f$  – радиус-вектор и вектор скорости КА на целевой орбите.

Согласно принципу максимума Понтрягина необходимо ввести вектор фазовых координат управляемого объекта

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{r}_{SV}(t), \mathbf{V}_{SV}(t), m_{SV}(t))^T \quad (5)$$

и поставить в соответствие вектор сопряжённых переменных  $\boldsymbol{\psi}(t)$ :

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (\boldsymbol{\psi}_r(t), \boldsymbol{\psi}_v(t), \boldsymbol{\psi}_m)^T. \quad (6)$$

В векторной форме полученный Гамильтониан имеет вид [11]:

$$H = \boldsymbol{\psi}_r \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\psi}_v \dot{\mathbf{V}} - \psi_m \frac{P}{c} \delta. \quad (7)$$

Согласно принципу максимума оптимальная программа управления соответствует максимуму Гамильтониана. В результате дифференцирования Гамильтониана (7) по компонентам управления и решения полученной системы уравнений в [12] была получена оптимальная программа управления:

$$\begin{cases} \alpha = \arccos \left( \frac{\psi_{V_x}}{\sqrt{\psi_{V_x}^2 + \psi_{V_y}^2 + \psi_{V_z}^2}} \right), \\ \beta = \arccos \left( \frac{\psi_{V_y}}{\sqrt{\psi_{V_x}^2 + \psi_{V_y}^2 + \psi_{V_z}^2}} \right), \\ \delta \equiv 1. \end{cases} \quad (8)$$

Тогда вместе с полученными соотношениями (8) и системой для сопряжённых уравнений имеется система из 14 дифференциальных уравнений, описывающих управляемое движение космического аппарата в проекциях на оси барицентрической системы координат: три уравнения положения космического аппарата  $\mathbf{r}_{SV} = (x_{SV}, y_{SV}, z_{SV})^T$ ; три уравнения скоростей  $\mathbf{V}_{SV} = (V_{SV_x}, V_{SV_y}, V_{SV_z})^T$ ; три уравнения сопряжённых переменных для радиус-вектора положения космического аппарата:  $\boldsymbol{\psi}_r = (\psi_x, \psi_y, \psi_z)^T$ ; три уравнения сопряжённых переменных для вектора скоростей:  $\boldsymbol{\psi}_v = (\psi_{V_x}, \psi_{V_y}, \psi_{V_z})^T$ ; одно уравнение изменения массы космического аппарата  $m_{SV}$  и одно уравнение сопряжённой переменной для массы космического аппарата  $\psi_m$ .

Краевая задача формулируется следующим образом: в начальный момент времени фазовый вектор состояния космического аппарата определяется значениями  $\mathbf{r}_s$  и  $\mathbf{V}_s$  и требуется достигнуть некоторой точки фазового пространства, определяемой  $\mathbf{r}_f$  и  $\mathbf{V}_f$ , при минимальной длительности перелёта.

Процедура решения краевой задачи основана на численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (2) с учётом управления (3), (8) и сопряжённой системы уравнений.

В начальный момент времени вектор фазовых координат системы определяется следующим образом:

$$\mathbf{r}_{SV}(0) = (x_{SV_0}, y_{SV_0}, z_{SV_0}, V_{x_{SV_0}}, V_{y_{SV_0}}, V_{z_{SV_0}}, m_0, \psi_{x_0}, \psi_{y_0}, \psi_{z_0}, \psi_{V_{x_0}}, \psi_{V_{y_0}}, \psi_{V_{z_0}}, \psi_{m_0})^T. \quad (9)$$

В конечный момент времени фиксируется полученный вектор конечного состояния

$$\mathbf{r}_{SV}(T) = (x_{SV}(T), y_{SV}(T), z_{SV}(T), V_{x_{SV}}(T), V_{y_{SV}}(T), V_{z_{SV}}(T), \psi_m(T))^T$$

и рассчитывается невязка

$$\begin{aligned} \gamma^2 = & \left( x_{SV}(T) - x_{SV_f} \right)^2 + \left( y_{SV}(T) - y_{SV_f} \right)^2 + \left( z_{SV}(T) - z_{SV_f} \right)^2 + \left( Vx_{SV}(T) - Vx_{SV_f} \right)^2 + \\ & + \left( Vy_{SV}(T) - Vy_{SV_f} \right)^2 + \left( Vz_{SV}(T) - Vz_{SV_f} \right)^2 + \left( \psi_m(T) \right)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Последнее слагаемое в (10) отражает необходимость выполнения условия трансверсальности в конечный момент времени, так как масса космического аппарата не фиксирована.

Если полученный вектор конечного состояния соответствует граничным условиям с заданной степенью точности, то процесс вычислений может быть окончен. В противном случае следующее приближение начального значения сопряжённых переменных вычисляется по модифицированному методу Ньютона [13]. Составляется матричное уравнение  $\mathbf{A} \cdot \Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{B}$  для вычисления приращений к вектору сопряжённых переменных. Матрица  $\mathbf{A}$  является матрицей частных производных невязок по приращениям сопряжённых множителей:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^{\psi_x + \theta_x} - x_{k0}^1}{\theta_x} & \frac{x_1^{\psi_y + \theta_y} - x_{k0}^1}{\theta_y} & \frac{x_1^{\psi_z + \theta_z} - x_{k0}^1}{\theta_z} & \frac{x_1^{\psi_{V_x} + \theta_{V_x}} - x_{k0}^1}{\theta_{V_x}} & \frac{x_1^{\psi_{V_y} + \theta_{V_y}} - x_{k0}^1}{\theta_{V_y}} & \frac{x_1^{\psi_{V_z} + \theta_{V_z}} - x_{k0}^1}{\theta_{V_z}} & \frac{x_1^{\psi_m + \theta_m} - x_{k0}^1}{\theta_m} \\ \frac{y_1^{\psi_x + \theta_x} - y_{k0}^1}{\theta_x} & \frac{y_1^{\psi_y + \theta_y} - y_{k0}^1}{\theta_y} & \frac{y_1^{\psi_z + \theta_z} - y_{k0}^1}{\theta_z} & \frac{y_1^{\psi_{V_x} + \theta_{V_x}} - y_{k0}^1}{\theta_{V_x}} & \frac{y_1^{\psi_{V_y} + \theta_{V_y}} - y_{k0}^1}{\theta_{V_y}} & \frac{y_1^{\psi_{V_z} + \theta_{V_z}} - y_{k0}^1}{\theta_{V_z}} & \frac{y_1^{\psi_m + \theta_m} - y_{k0}^1}{\theta_m} \\ \frac{z_1^{\psi_x + \theta_x} - z_{k0}^1}{\theta_x} & \frac{z_1^{\psi_y + \theta_y} - z_{k0}^1}{\theta_y} & \frac{z_1^{\psi_z + \theta_z} - z_{k0}^1}{\theta_z} & \frac{z_1^{\psi_{V_x} + \theta_{V_x}} - z_{k0}^1}{\theta_{V_x}} & \frac{z_1^{\psi_{V_y} + \theta_{V_y}} - z_{k0}^1}{\theta_{V_y}} & \frac{z_1^{\psi_{V_z} + \theta_{V_z}} - z_{k0}^1}{\theta_{V_z}} & \frac{z_1^{\psi_m + \theta_m} - z_{k0}^1}{\theta_m} \\ \frac{V_{x1}^{\psi_x + \theta_x} - V_{xk0}^1}{\theta_x} & \frac{V_{x1}^{\psi_y + \theta_y} - V_{xk0}^1}{\theta_y} & \frac{V_{x1}^{\psi_z + \theta_z} - V_{xk0}^1}{\theta_z} & \frac{V_{x1}^{\psi_{V_x} + \theta_{V_x}} - V_{xk0}^1}{\theta_{V_x}} & \frac{V_{x1}^{\psi_{V_y} + \theta_{V_y}} - V_{xk0}^1}{\theta_{V_y}} & \frac{V_{x1}^{\psi_{V_z} + \theta_{V_z}} - V_{xk0}^1}{\theta_{V_z}} & \frac{V_{x1}^{\psi_m + \theta_m} - V_{xk0}^1}{\theta_m} \\ \frac{V_{y1}^{\psi_x + \theta_x} - V_{yk0}^1}{\theta_x} & \frac{V_{y1}^{\psi_y + \theta_y} - V_{yk0}^1}{\theta_y} & \frac{V_{y1}^{\psi_z + \theta_z} - V_{yk0}^1}{\theta_z} & \frac{V_{y1}^{\psi_{V_x} + \theta_{V_x}} - V_{yk0}^1}{\theta_{V_x}} & \frac{V_{y1}^{\psi_{V_y} + \theta_{V_y}} - V_{yk0}^1}{\theta_{V_y}} & \frac{V_{y1}^{\psi_{V_z} + \theta_{V_z}} - V_{yk0}^1}{\theta_{V_z}} & \frac{V_{y1}^{\psi_m + \theta_m} - V_{yk0}^1}{\theta_m} \\ \frac{V_{z1}^{\psi_x + \theta_x} - V_{zk0}^1}{\theta_x} & \frac{V_{z1}^{\psi_y + \theta_y} - V_{zk0}^1}{\theta_y} & \frac{V_{z1}^{\psi_z + \theta_z} - V_{zk0}^1}{\theta_z} & \frac{V_{z1}^{\psi_{V_x} + \theta_{V_x}} - V_{zk0}^1}{\theta_{V_x}} & \frac{V_{z1}^{\psi_{V_y} + \theta_{V_y}} - V_{zk0}^1}{\theta_{V_y}} & \frac{V_{z1}^{\psi_{V_z} + \theta_{V_z}} - V_{zk0}^1}{\theta_{V_z}} & \frac{V_{z1}^{\psi_m + \theta_m} - V_{zk0}^1}{\theta_m} \\ \frac{\psi_{m1}^{\psi_x + \theta_x}}{\theta_x} & \frac{\psi_{m1}^{\psi_y + \theta_y}}{\theta_y} & \frac{\psi_{m1}^{\psi_z + \theta_z}}{\theta_z} & \frac{\psi_{m1}^{\psi_{V_x} + \theta_{V_x}}}{\theta_{V_x}} & \frac{\psi_{m1}^{\psi_{V_y} + \theta_{V_y}}}{\theta_{V_y}} & \frac{\psi_{m1}^{\psi_{V_z} + \theta_{V_z}}}{\theta_{V_z}} & \frac{\psi_{m1}^{\psi_m + \theta_m}}{\theta_m} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_{SV}(T) - x_{SV_f} \\ y_{SV}(T) - y_{SV_f} \\ z_{SV}(T) - z_{SV_f} \\ Vx_{SV}(T) - Vx_{SV_f} \\ Vy_{SV}(T) - Vy_{SV_f} \\ Vz_{SV}(T) - Vz_{SV_f} \\ \psi_m(T) \end{bmatrix}, \quad \Delta\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \Delta\psi_x \\ \Delta\psi_y \\ \Delta\psi_z \\ \Delta\psi_{V_x} \\ \Delta\psi_{V_y} \\ \Delta\psi_{V_z} \\ \Delta\psi_m \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Для вычисления матрицы  $\mathbf{A}$  необходимо добавить некоторое приращение к одной из сопряжённых переменных ( $\theta_x, \theta_y, \theta_z, \theta_{V_x}, \theta_{V_y}, \theta_{V_z}, \theta_m$  соответственно) и повто-

ритель процесс численного интегрирования семь раз для вычисления производной невязки по каждой сопряжённой переменной.

Решая систему уравнений  $\mathbf{A} \cdot \Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{B}$ , получаем вектор приращений начальных значений сопряжённых множителей  $\Delta\boldsymbol{\psi}$ , который используется для следующей итерации алгоритма решения краевой задачи:  $\boldsymbol{\psi}_{i+1} = \boldsymbol{\psi}_i + \Delta\boldsymbol{\psi}$ .

На следующей итерации рассчитывается новое значение невязки (10) и итерационный процесс продолжается, если граничные условия не выполнены с заданной степенью точности. При алгоритмизации итерационного процесса были учтены возможности останова при выполнении граничного условия на любом шаге итерации (например, в процессе вычисления производных) и при неразрешимости системы линейных уравнений (линейная зависимость полученных уравнений).

### Результаты оптимизации программного управления и моделирования управляемого движения

Приведённый метод решения краевой задачи хорошо алгоритмируется программными средствами. Был разработан программный комплекс [14], позволяющий решать краевые задачи в рамках описанной математической модели движения. Рассматривался переход с начальной околокруговой орбиты радиусом 200 км относительно барицентра астероида на околокруговую орбиту радиусом 100 км с угловой дальностью перелёта  $\frac{3\pi}{2}$ . В таблице приведены начальные условия, для которых проводилось решение.

Таблица. Данные для оптимизации программы управления и моделирования межорбитального перехода

Параметр	Значение
Масса космического аппарата, кг	1200
Радиус-вектор космического аппарата относительно барицентра системы в начальный момент времени, км	$\mathbf{r}_s = (200 \ 0 \ 0)^T$
Радиус-вектор космического аппарата относительно барицентра системы в конечный момент времени, км	$\mathbf{r}_f = (0 \ -100 \ 0)^T$
Вектор скорости космического аппарата в начальный момент времени, км/с	$\mathbf{v}_s = (0 \ 1,494 \cdot 10^{-3} \ 0)^T$
Вектор скорости космического аппарата в конечный момент времени, км/с	$\mathbf{v}_f = (2,113 \cdot 10^{-3} \ 0 \ 0)^T$
Дата старта	30.05.2025
Тяга двигательной установки, мкН	2,1
Удельный импульс, с	2000

Масса и параметры двигательной установки соответствуют массе космического аппарата миссии Dawn [15] и тяге двигательной установки его системы управления. Начальная и конечная скорости космического аппарата соответствуют круговым скоростям в точках с координатами  $\mathbf{r} = (200 \ 0 \ 0)^T$  и  $\mathbf{r} = (0 \ -100 \ 0)^T$ , если бы астероид был правильным сферическим телом. Условие окончания моделирования: значение квадрата конечной невязки не более  $1 \cdot 10^{-3}$ . Длительность перехода составила 4,38 суток. Расход топлива составил  $3 \cdot 10^{-5}$  кг. На рис. 3 - 5 представлены полученная траектория, программа оптимального управления углами направления тяги двигательной установки, изменение координат и скорости космического аппарата.

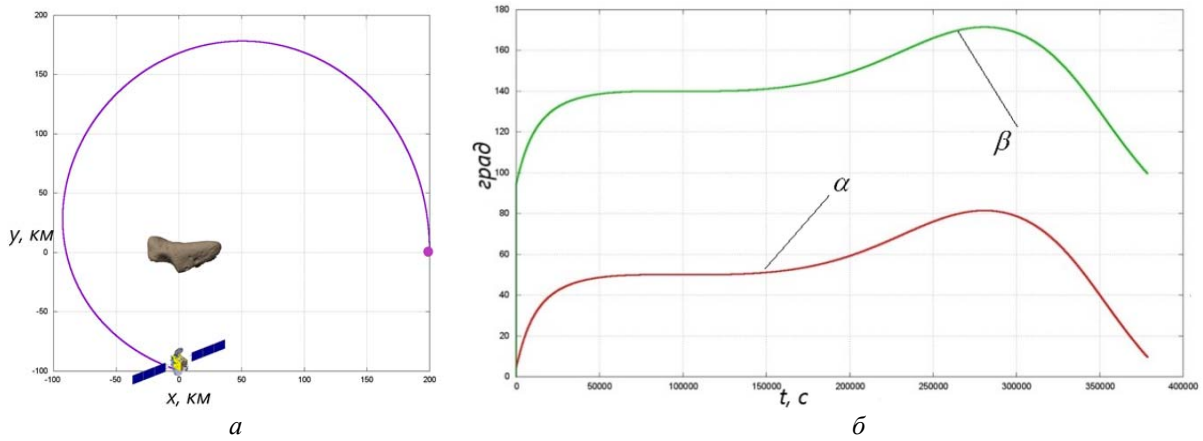


Рис. 3. Межорбитальный перелёт: а - траектория движения; б - программа управления

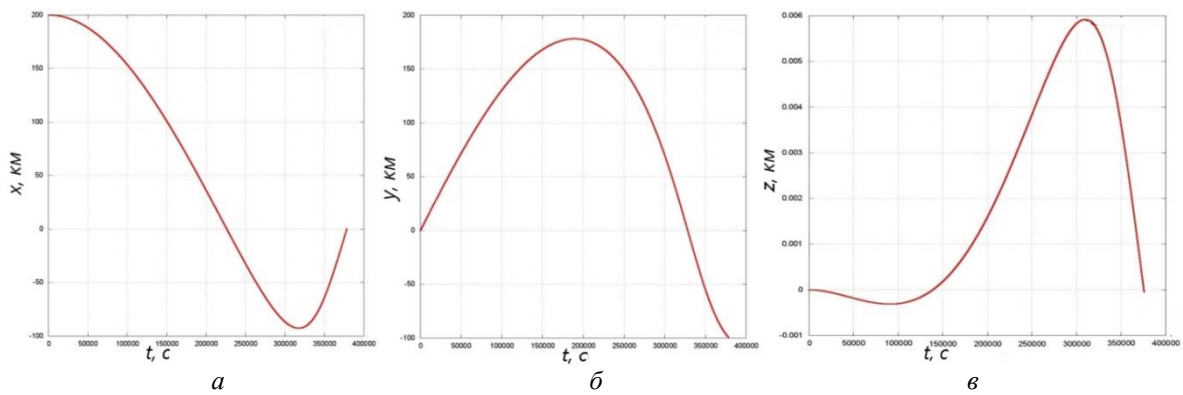


Рис. 4. Изменение компонентов радиус-вектора: а - X; б - Y; в - Z

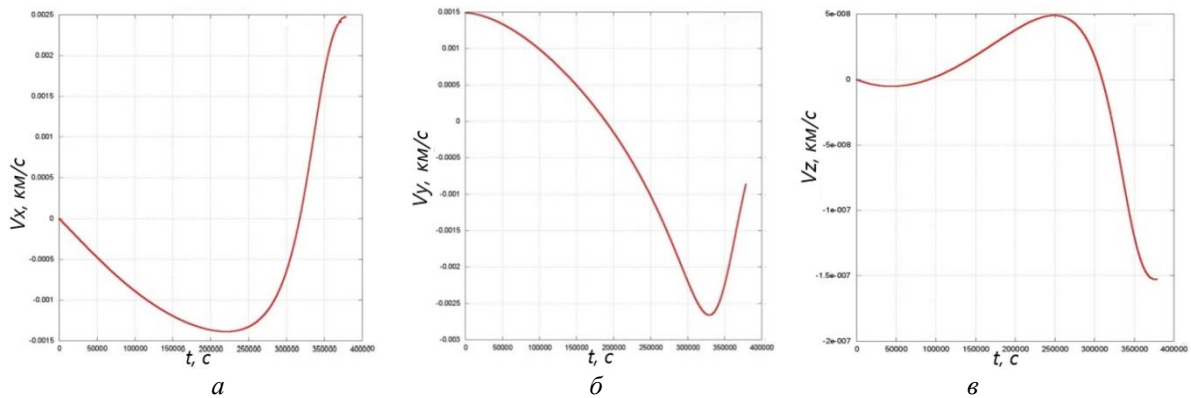


Рис. 5. Изменение компонентов вектора скорости: а -  $V_x$ ; б -  $V_y$ ; в -  $V_z$

Изменения скорости  $V_z$  и координаты  $Z$  объясняются дестабилизирующим влиянием пространственной модели гравитационного поля на космический аппарат. Основную долю конечной невязки составляют именно эти отклонения.

Исходя из величины тяги двигательной установки, можно сделать вывод о том, что в случае реального полёта вблизи астероида возникает необходимость использования особого класса электроракетных двигателей, обеспечивающих достаточно низкие уровни тяги. На текущий момент, исходя из удельного импульса, оптимальным типом



двигателя, который удовлетворяет данным задачам, является ионный электроспрейный двигатель (iESP) – микродвигатель, созданный для космических аппаратов типа CubeSat. Главная особенность iESP – это высокий удельный импульс и низкий уровень тяги (микроньютоны) [16]. Это обеспечивает точное управление как величиной, так и направлением тяги.

### **Заключение**

Решена задача оптимизации программного управления космическим аппаратом с электроракетной двигательной установкой при осуществлении манёвра перехода с высокой на низкую околокруговые орбиты относительно астероида Эрос 433. Гравитационное поле астероида представлено в рамках двухточечной барицентрической модели. С использованием принципа максимума Понтрягина и модифицированного метода Ньютона получено численное решение задачи об оптимальном по расходу рабочего тела перелёте между круговыми орбитами. Показано, что для маневрирования в поле притяжения астероида Эрос 433 целесообразно использовать двигатели системы управления.

### **Библиографический список**

1. Britt D.T., Yeomans D., Housen K., Consolmagno G. Asteroid density, porosity, and structure // *Asteroids III*. 1987. P. 485-500.
2. Zuber M.T., Smith D.E., Cheng A.F., Garvin J.B., Aharonson O., Cole T.D., Dunn P.J., Guo Y., Lemoine F.G., Neumann G.A., Rowlands D.D., Torrence M.H. The shape of 433 Eros from the NEAR-Shoemaker laser rangefinder // *Science*. 2000. V. 289, Iss. 5487. P. 2097-2101. DOI: 10.1126/science.289.5487.2097
3. Geissler P., Petit J.-M., Durda D.D., Greenberg R., Bottke W., Nolan M., Moore J. Erosion and ejecta reaccretion on 243 Ida and its moon // *Icarus*. 1996. V. 120, Iss. 1. P. 140-157. DOI: 10.1006/icar.1996.0042
4. Ren Y., Shan J. On tethered sample and mooring systems near irregular asteroids // *Advances in Space Research*. 2014. V. 54, Iss. 8. P. 1608-1618. DOI: 10.1016/j.asr.2014.06.042
5. Hu X., Jekeli C. A numerical comparison of spherical, spheroidal and ellipsoidal harmonic gravitational field models for small non-spherical bodies: examples for the Martian moons // *Journal of Geodesy*. 2015. V. 89, Iss. 2. P. 159-177. DOI: 10.1007/s00190-014-0769-x
6. Wang X., Jiang Y., Gong S. Analysis of the potential field and equilibrium points of irregular-shaped minor celestial bodies // *Astrophysics and Space Science*. 2014. V. 353, Iss. 1. P. 105-121. DOI: 10.1007/s10509-014-2022-8
7. Shornikov A., Starinova O. Simulation of controlled motion in an irregular gravitational field for an electric propulsion spacecraft // *Proceedings of 7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (June, 16-19, 2015, Istanbul, Turkey)*. 2015. P. 771-776. DOI: 10.1109/RAST.2015.7208444
8. Szebehely V.G. *Theory of orbits: the restricted problem of three bodies*. New York: Academic Press, 1967. 668 p.
9. JPL Small-Body Database Browser. <https://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi>
10. Kopp R.E. Pontryagin maximum principle // *Mathematics in Science and Engineering*. 1962. V. 5, Iss. C. P. 255-279. DOI: 10.1016/S0076-5392(08)62095-0
11. *Методы оптимизации с приложениями к механике космического полёта* / под ред. Дж. Лейтмана. М.: Наука, 1962. 538 с.

12. Салмин В.В., Старинова О.Л. Оптимизация межпланетных полётов космических аппаратов с двигателями малой тяги с учётом эллиптичности и некопланарности планетных орбит // Космические исследования. 2001. Т. 39, № 1. С. 51-59.

13. Ascher U.M., Mattheij R.M.M., Russell R.D. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations. Siam, 1988. 595 p.

14. Шорников А.Ю., Старинова О.Л. Моделирование и оптимизация перелёта космического аппарата с электрореактивными двигателями малой тяги в задаче трёх тел: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014618472; опубл. 21.08.2014.

15. Rayman M.D., Fraschetti T.C., Raymond C.A., Russell C.T. Dawn: A mission in development for exploration of main belt asteroids Vesta and Ceres // Acta Astronautica. 2006. V. 58, Iss. 11. P. 605-616. DOI: 10.1016/j.actaastro.2006.01.014

16. Paulo L., Benajmin Glass B., Martinez-Sanchez M. Performance characteristics of a linear ionic liquid electrospray thruster // Proceedings of the 29th International Electric Propulsion Conference (October 31-November 4, 2005, Princeton, USA). 2005.

## OPTIMAL CONTROL OF SPACECRAFT MOTION IN THE VICINITY OF EROS 433 ASTEROID

© 2019

**A. Y. Shornikov** Postgraduate Student, Department of Space Engineering;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[andreishornikov@gmail.com](mailto:andreishornikov@gmail.com)

The article describes an algorithm for optimizing controlled motion of a spacecraft equipped with low-thrust electric propulsion engines maneuvering in the vicinity of an object with an irregular gravitational field (asteroid Eros 433). A mathematical model of the object's gravitational potential and a model of spacecraft motion are presented. The Pontryagin maximum principle is used to get the time-optimal control program. The formulated boundary value problem is solved numerically by the modified Newton method. The described algorithm can be used to solve similar problems of low-thrust flight dynamics in the vicinity of objects with irregular gravitational fields.

*Asteroid; irregular gravitational field; spacecraft; low thrust; optimal control program; maximum principle; boundary value problem.*

---

*Citation:* Shornikov A.Y. Optimal control of spacecraft motion in the vicinity of Eros 433 asteroid. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2019. V. 18, no. 4. P. 146-156. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-4-146-156

### References

1. Britt D.T., Yeomans D., Housen K., Consolmagno G. Asteroid density, porosity, and structure. *Asteroids III*. 1987. P. 485-500.

2. Zuber M.T., Smith D.E., Cheng A.F., Garvin J.B., Aharonson O., Cole T.D., Dunn P.J., Guo Y., Lemoine F.G., Neumann G.A., Rowlands D.D., Torrence M.H. The shape of 433 Eros from the NEAR-Shoemaker laser rangefinder. *Science*. 2000. V. 289, Is. 5487. P. 2097-2101. DOI: 10.1126/science.289.5487.2097

3. Geissler P., Petit J.-M., Durda D.D., Greenberg R., Bottke W., Nolan M., Moore J. Erosion and ejecta reaccretion on 243 Ida and its moon. *Icarus*. 1996. V. 120, Iss. 1. P. 140-157. DOI: 10.1006/icar.1996.0042

4. Ren Y., Shan J. On tethered sample and mooring systems near irregular asteroids. *Advances in Space Research*. 2014. V. 54, Is. 8. P. 1608-1618. DOI: 10.1016/j.asr.2014.06.042
5. Hu X., Jekeli C. A numerical comparison of spherical, spheroidal and ellipsoidal harmonic gravitational field models for small non-spherical bodies: examples for the Martian moons. *Journal of Geodesy*. 2015. V.89, Iss. 2. P. 159-177. DOI: 10.1007/s00190-014-0769-x
6. Wang X., Jiang Y., Gong S. Analysis of the potential field and equilibrium points of irregular-shaped minor celestial bodies. *Astrophysics and Space Science*. 2014. V. 353, Iss. 1. P. 105-121. DOI: 10.1007/s10509-014-2022-8
7. Shornikov A., Starinova O. Simulation of controlled motion in an irregular gravitational field for an electric propulsion spacecraft. *Proceedings of 7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (June, 16-19, 2015, Istanbul, Turkey)*. 2015. P. 771-776. DOI: 10.1109/RAST.2015.7208444
8. Szebehely V.G. Theory of orbits: the restricted problem of three bodies. New York: Academic Press, 1967. 668 p.
9. JPL Small-Body Database Browser. Available at: <http://space.frieger.com/asteroids/>
10. Kopp R.E. Pontryagin maximum principle. *Mathematics in Science and Engineering*. 1962. V. 5, Iss. C. P. 255-279. DOI: 10.1016/S0076-5392(08)62095-0
11. Optimization techniques with applications to aerospace systems / ed. by G. Leitmann. New York: Academic Press, 1962. 452 p.
12. Salmin V.V., Starinova O.L. Optimization of interplanetary flights of spacecraft with low-thrust engines taking into account the ellipticity and noncoplanarity of planetary orbits. *Cosmic Research*. 2001. V. 39, Iss. 1. P. 46-54. DOI: 10.1023/A:1002835811494
13. Ascher U.M., Mattheij R.M.M., Russell R.D. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations. Siam, 1988. 595 p.
14. Shornikov A.Yu., Starinova O.L. *Modelirovanie i optimizatsiya pereleta kosmicheskogo apparata s elektroreaktivnymi dvigatelyami maloy tyagi v zadache trekh tel* [Modeling and optimization of spacecraft flight with low-thrust electric jet engines in the three-body problem]. Certificate of state registration of the computer program no. 20144618472. (Publ. 21.08.2014)
15. Rayman M.D., Fraschetti T.C., Raymond C.A., Russell C.T. Dawn: A mission in development for exploration of main belt asteroids Vesta and Ceres. *Acta Astronautica*. 2006. V. 58, Iss. 11. P. 605-616. DOI: 10.1016/j.actaastro.2006.01.014
16. Paulo L., Benajmin Glass B., Martinez-Sanchez M. Performance characteristics of a linear ionic liquid electrospray thruster. *Proceedings of the 29th International Electric Propulsion Conference (October 31-November 4, 2005, Princeton, USA)*. 2005.