

## МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ПОТОКАМИ И ЧАСТИЧНОЙ ВЗАИМОПОМОЩЬЮ МЕЖДУ КАНАЛАМИ

© 2011 В. А. Романенко

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П.Королёва (национальный исследовательский университет)

Описана динамическая модель многоканальной системы массового обслуживания с нестационарными потоками, ожиданием в очереди ограниченной длины и частичной взаимопомощью каналов, выражающейся в возможности одновременного обслуживания заявки двумя каналами. Приведены выражения для основных вероятностно-временных характеристик системы. Описаны результаты моделирования функционирования узлового аэропорта как примера рассматриваемой системы.

*Система массового обслуживания, нестационарный поток, взаимопомощь между каналами, узловой аэропорт.*

### Введение

Рассматривается многоканальная система массового обслуживания (СМО) с ожиданием в очереди ограниченной длины. Особенностью рассматриваемой СМО является частичная взаимопомощь между каналами, выражающаяся в возможности одновременного использования двух каналов для обслуживания одной заявки. Объединение усилий каналов приводит в общем случае к сокращению среднего времени обслуживания. Предполагается, что в СМО поступает нестационарный пуассоновский поток заявок. Продолжительность обслуживания заявки зависит от времени.

Характерным примером СМО, обладающей перечисленными особенностями, является система обслуживания перевозок аэропорта. Одновременное использование нескольких (как правило, двух) средств (стоек регистрации, авиатопливозаправщиков, спецмашин и т.п.) для обслуживания одного рейса предусматривается технологическими графиками аэропортового обслуживания больших воздушных судов (ВС). При этом необходимость повышения качества и сокращения продолжительности наземного обслуживания перевозок, особенно актуальная для крупных аэропортов, приводит к тому, что доля операций, выполняемых не одним, а несколькими (двумя) средствами, возраста-

ет с увеличением масштаба аэропорта. Описанная в статье модель разработана для решения задач анализа и оптимизации функционирования производственных комплексов узловых аэропортов (хабов), характеризующихся насыщенностью средств наземного обслуживания перевозок при ярко выраженной нестационарности потоков пассажиров, ВС и грузов и колебаниях интенсивности их обслуживания.

### Общее описание модели

Модель предназначена для определения временных зависимостей вероятностных характеристик СМО, содержащей  $N$  обслуживающих каналов. Число заявок, находящихся в СМО, не должно превышать  $K$ , что может быть обусловлено техническими ограничениями по числу обустроенных в аэропорту мест стоянки ВС, вместимости аэровокзального или грузового комплекса и т.п. Число выделяемых для обслуживания одной заявки каналов  $a$  может составлять как 1, так и 2. В случае наличия не менее двух свободных каналов поступившая заявка с заданной вероятностью  $v_1$  занимает для обслуживания один из них и - с вероятностью  $v_2 = 1 - v_1$  - оба канала. Если же в момент поступления на обслуживание заявки СМО располагает только одним свободным каналом, то эта заявка в любом случае занимает имеющийся

единственный канал. В случае отсутствия незанятых каналов вновь поступившая заявка «становится в очередь» и ожидает обслуживания. Если число заявок, находящихся в очереди, составляет  $K-N$ , то вновь прибывшая заявка покидает СМО необслуженной. Вероятность такого события должна быть малой.

На вход СМО поступает пуассоновский (не обязательно стационарный) поток заявок с интенсивностью  $\lambda(t)$ . Предполагается, что продолжительности обслуживания заявки как одним каналом  $T_{обсл1}(t)$ , так и двумя -  $T_{обсл2}(t)$  являются показательно распределёнными случайными функциями времени (случайными процессами).

Интенсивности обслуживания заявки одним каналом  $\mu_1(t)$  и одновременно двумя каналами  $\mu_2(t)$  определяются как

$$\mu_1(t) = [\bar{T}_{обсл1}(t)]^{-1}, \quad \mu_2(t) = [\bar{T}_{обсл2}(t)]^{-1},$$

где  $\bar{T}_{обсл1}(t) = M[T_{обсл1}(t)]$ ,  $\bar{T}_{обсл2}(t) = M[T_{обсл2}(t)]$  - среднее время обслуживания заявки одним каналом и двумя каналами соответственно.

Связь между величинами  $\mu_1(t)$  и  $\mu_2(t)$  задаётся соотношением

$$\mu_2(t) = \theta \mu_1(t),$$

где  $\theta$  - коэффициент, учитывающий относительное увеличение интенсивности обслуживания при использовании двух каналов.

На практике связь между числом привлекаемых средств и интенсивностью обслуживания имеет довольно сложный характер, определяемый особенностями рассматриваемой операции обслуживания. Для операций, продолжительность которых связана с объёмом выполняемых работ (например, заправка ВС авиатопливом посредством авиатопливозаправщиков, посадка в ВС или высадка из ВС пассажиров и др.), зависимость интенсивности обслуживания от числа каналов приближается к прямо пропорциональной, не являясь, однако, строго таковой из-за наличия затрат времени на подготовитель-

но-заключительные операции, на которые число средств не влияет. Для таких операций  $\theta \leq 2$ . Для ряда операций зависимость продолжительности выполнения от числа средств или исполнителей менее выражена (например, регистрация или предполётный досмотр пассажиров). В этом случае  $\theta \approx 1$ .

В произвольный момент времени  $t$  рассматриваемая СМО может находиться в одном из  $b+1$  дискретных состояний -  $S_0, S_1, \dots, S_b$ . Переход из состояния в состояние может осуществляться в любой момент времени. Вероятность того, что в момент времени  $t$  СМО будет находиться в состоянии  $S_i$  ( $i = 0, 1, \dots, b$ ), обозначена далее как  $P_i(t)$ . В любой момент времени  $t$  должно выпол-

няться условие нормировки  $\sum_{i=0}^b P_i(t) = 1$ . Зна-

ние вероятностей  $P_0(t), P_1(t), \dots, P_b(t)$  позволяет определять такие важные виртуальные (мгновенные) характеристики СМО, как средняя длина очереди, среднее число занятых каналов, среднее число заявок, находящихся в СМО, и др.

Вероятности состояний  $P_i(t)$  находят-ся путём решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова, в общем виде записываемой как [1]

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \varphi_{ji}(t) P_j(t) - P_i(t) \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(t),$$

$$i = 0, 1, \dots, b,$$

где  $\varphi_{ij}(t)$  - плотности (интенсивности) вероятностей перехода из состояния с порядковым номером  $i$  в состояние с порядковым номером  $j$ . Величины  $\varphi_{ij}(t)$  определяются по формуле

$$\varphi_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t; \Delta t)}{\Delta t},$$

где  $P_{ij}(t; \Delta t)$  — вероятность того, что СМО, пребывавшая в момент  $t$  в состоянии  $S_i$ , за

время  $\Delta t$  перейдёт из него в состояние  $S_j$  ( $i \neq j$ ).

Для составления уравнений Колмогорова используется размеченный граф состояний СМО. В нём над стрелками, ведущими из  $S_i$  в  $S_j$ , проставляют соответствующие интенсивности  $\phi_{ij}$ . Производная вероятности каждого состояния определяется как сумма всех потоков вероятности, идущих из других состояний в данное состояние, за вычетом суммы всех потоков вероятности, идущих из данного состояния в другие.

Чтобы составить граф, вводится трёхиндексная система обозначений, в которой состояние рассматриваемой СМО в произвольный момент времени характеризуется тремя параметрами: числом занятых каналов  $n$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ), числом заявок, обслуживаемых  $k$  ( $k = 0, 1, \dots, K$ ) и ожидающих обслуживания  $m$  ( $m = 0, 1, \dots, K - N$ ).

На рис. 1 представлен размеченный граф состояний, составленный с использованием описанных выше правил и введённых обозначений, для СМО, выбранной в качестве простого примера.

На графе и в приводимой ниже соответствующей системе уравнений Колмогорова в целях экономии места опущены обозначения функциональной зависимости от времени интенсивностей  $\lambda$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и вероятностей состояний.

$$\begin{aligned} dP_{000}/dt &= -(v_1\lambda + v_2\lambda)P_{000} + \mu_1P_{110} + \mu_2P_{210}, \\ dP_{110}/dt &= -(\mu_1 + v_1\lambda + v_2\lambda)P_{110} + v_1\lambda P_{000} + \\ &\quad + 2\mu_1P_{220} + \mu_2P_{320}, \\ dP_{210}/dt &= -(\mu_2 + v_1\lambda + v_2\lambda)P_{210} + v_2\lambda P_{000} + \\ &\quad + \mu_1P_{320} + 2\mu_2P_{420}, \\ dP_{220}/dt &= -(2\mu_1 + v_1\lambda + v_2\lambda)P_{220} + v_1\lambda P_{110} + \\ &\quad + 3\mu_1P_{330} + \mu_2P_{430}, \\ dP_{320}/dt &= -(\mu_2 + \mu_1 + v_1\lambda + v_2\lambda)P_{320} + \\ &\quad + v_1\lambda P_{210} + v_2\lambda P_{110} + 2\mu_1P_{430} + \\ &\quad + 2\mu_2P_{530}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dP_{420}/dt &= -(\lambda + 2\mu_2)P_{420} + v_2\lambda P_{210} + \mu_1P_{530}, \\ dP_{330}/dt &= -(3\mu_1 + v_1\lambda + v_2\lambda)P_{330} + v_1\lambda P_{220} + \\ &\quad + 4v_1P_{440} + \mu_2P_{540}, \\ dP_{430}/dt &= -(2\mu_1 + \mu_2 + \lambda)P_{430} + v_1\lambda P_{320} + \\ &\quad + v_2\lambda P_{220} + 3\mu_1P_{540} + 2\mu_2P_{531}, \\ dP_{530}/dt &= -(\mu_1 + 2\mu_2 + \lambda)P_{530} + \lambda P_{420} + \\ &\quad + v_2\lambda P_{320} + \mu_1P_{531}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} dP_{440}/dt &= -(4\mu_1 + \lambda)P_{440} + v_1\lambda P_{330} + \\ &\quad + 5\mu_1P_{550} + \mu_2P_{541}, \\ dP_{540}/dt &= -(\mu_2 + 3\mu_1 + \lambda)P_{540} + \lambda P_{430} + \\ &\quad + v_2\lambda P_{330} + 3\mu_1P_{541} + 2\mu_2P_{532}, \\ dP_{531}/dt &= -(\mu_1 + 2\mu_2 + \lambda)P_{531} + \lambda P_{530} + \\ &\quad + \mu_1P_{532}, \\ dP_{550}/dt &= -(5\mu_1 + \lambda)P_{550} + \lambda P_{440} + \\ &\quad + 5\mu_1P_{551} + \mu_2P_{542}, \\ dP_{541}/dt &= -(\mu_2 + 3\mu_1 + \lambda)P_{541} + \lambda P_{540} + \\ &\quad + 3\mu_1P_{542}, \\ dP_{532}/dt &= -(\mu_1 + 2\mu_2)P_{532} + \lambda P_{531}, \\ dP_{551}/dt &= -(5\mu_1 + \lambda)P_{551} + \lambda P_{550} + 5\mu_1P_{552}, \\ dP_{542}/dt &= -(3\mu_1 + \mu_2)P_{542} + \lambda P_{541}, \\ dP_{552}/dt &= -5\mu_1P_{552} + \lambda P_{551}. \end{aligned}$$

Если в момент  $t = 0$  в СМО нет заявок, то начальные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} P_{000}(0) &= 1, \\ P_{110}(0) &= P_{210}(0) = P_{220}(0) = \dots = P_{552}(0) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение систем большой размерности, подобных (1), (2), с переменными величинами  $\lambda(t)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  возможно только численными методами с использованием ЭВМ.

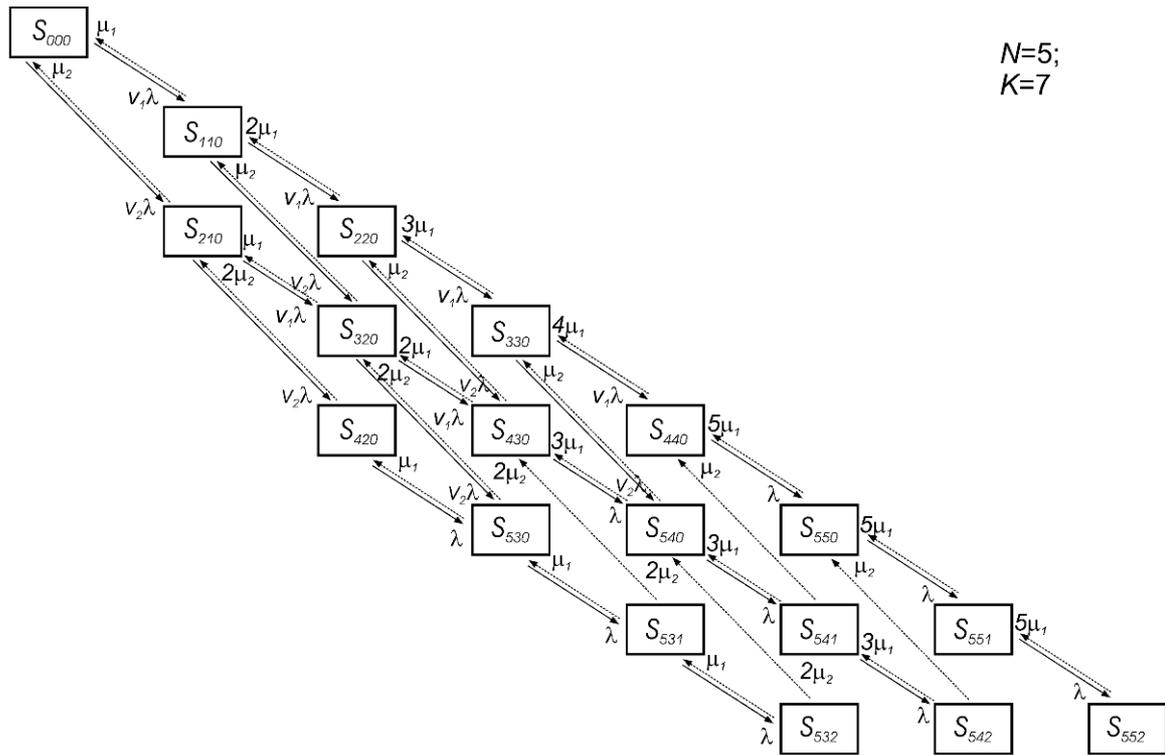


Рис. 1. Граф состояний СМО

**Построение модели СМО**

В соответствии с алгоритмическим подходом [1] рассмотрим методику преобразования системы уравнений Колмогорова произвольной размерности к виду, пригодному для компьютерных вычислений. С целью упрощения записи используем вместо тройной двойную систему обозначений состояний СМО, в которой  $i$  – число занятых обслуживанием каналов плюс длина очереди,  $j$  – число заявок в СМО. Связь между системами обозначений выражают зависимости:

$$i = n + m, \quad i = 0, 1, \dots, K;$$

$$j = k + m, \quad j = 0, 1, \dots, K.$$

Реализовано может быть не любое состояние из формальной совокупности  $S_{ij}$  ( $i = 0, 1, \dots, K; j = 0, 1, \dots, K$ ). В частности, в рамках описываемой модели невозможны состояния, при которых две или более заявок одновременно обслуживаются одним

каналом, т.е.  $P_{ij}(t) = 0$ , если  $j > i$ . Обозначим символом  $S$  множество допустимых состояний СМО. Состояние  $S_{ij}$  существует, и соответствующая ему вероятность  $P_{ij}(t)$  может быть ненулевой, если выполняется одно из условий:

- 1)  $j \leq i \leq 2j$ , если  $2j \leq N$ ,
  - 2)  $j \leq i \leq j + q - 1$ , если  $\begin{cases} 2j > N, \\ j + q - 1 < K, \end{cases}$
  - 3)  $j \leq i \leq K$ , если  $j + q - 1 \geq K$ ,
- $i = 0, 1, \dots, K; j = 0, 1, \dots, K$ ,

где  $q$  – максимальное число состояний с различным количеством обслуживающих каналов для заданного числа заявок, определяемое по формуле

$$q = N - [N/2].$$

Здесь скобки обозначают операцию отбрасывания дробной части. Так, например,

судя по графу состояний, изображённому на рис. 1, две заявки могут обслуживаться двумя, тремя или четырьмя каналами. Поэтому в рассмотренном выше примере

$$q = 5 - \lceil 5/2 \rceil = 5 - 2 = 3.$$

Для реализации компьютерных вычислений с использованием системы уравнений Колмогорова произвольной размерности её уравнения должны быть приведены к некоторой универсальной форме, допускающей запись любого уравнения. С целью выработки такой формы рассмотрим фрагмент графа состояний, отображающий одно произвольное состояние  $S_{ij}$  с ведущими из него стрелками интенсивностей. Обозначим римскими цифрами соседние состояния, непосредственно связанные с  $S_{ij}$ , так, как это показано на рис. 2.

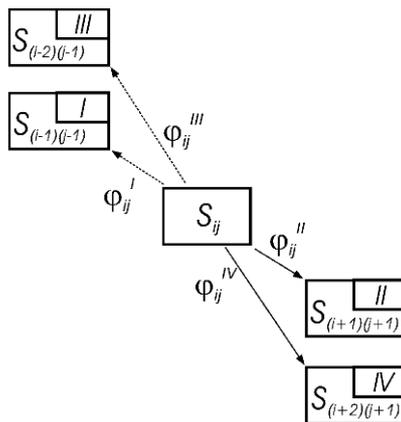


Рис. 2. Фрагмент графа состояний СМО

С учётом наличия соседних по отношению к  $S_{ij}$  состояний уравнение для  $S_{ij}$  запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{ij}}{dt} = & -[\varphi_{ij}^I(t) + \varphi_{ij}^{II}(t) + \varphi_{ij}^{III}(t) + \\ & + \varphi_{ij}^{IV}(t)]P_{ij}(t) + \varphi_{(i+1)(j+1)}^I(t)P_{(i+1)(j+1)}(t) + \\ & + \varphi_{(i-1)(j-1)}^{II}(t)P_{(i-1)(j-1)}(t) + \\ & + \varphi_{(i+2)(j+1)}^{III}(t)P_{(i+2)(j+1)}(t) + \\ & + \varphi_{(i-2)(j-1)}^{IV}(t)P_{(i-2)(j-1)}(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Для каждого состояния

$S_{ij}$  ( $i = 0, 1, \dots, K; j = 0, 1, \dots, K$ ), такого, что  $S_{ij} \in \mathbf{S}$ , в момент времени  $t$  величины  $\varphi_{ij}^I(t), \varphi_{ij}^{II}(t), \varphi_{ij}^{III}(t), \varphi_{ij}^{IV}(t)$  принимают различные значения (в том числе равные нулю). Однако при этом структура уравнения (3) сохраняется неизменной, что позволяет использовать его для компьютерной реализации системы уравнений Колмогорова произвольной размерности.

Интенсивности  $\varphi_{ij}^{II}(t), \varphi_{ij}^{IV}(t)$ , стремящиеся перевести СМО в состояния с большими значениями  $i$  и  $j$ , если наличие таких состояний является возможным, определяются исходя из ряда условий следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^{II}(t) = & \begin{cases} 0, & \text{если } S_{ij} \notin \mathbf{S} \text{ или } \\ & S_{(i+1)(j+1)} \notin \mathbf{S}, \\ v_1 \lambda(t), & \text{если } \begin{cases} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+2)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ i \leq N-2, \end{cases} \\ 1, & \text{если } \begin{cases} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \text{ или } \\ S_{(i+2)(j+1)} \notin \mathbf{S}, \end{cases} \begin{cases} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ i > N-A, \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^{IV}(t) = & \begin{cases} 0, & \text{если } S_{ij} \notin \mathbf{S} \text{ или } \\ & S_{(i+1)(j+1)} \notin \mathbf{S} \text{ или } i > N-2, \\ v_2 \lambda(t), & \text{если } \begin{cases} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+2)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ i \leq N-2, \end{cases} \\ 1, & \text{если } \begin{cases} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+1)(j+1)} \notin \mathbf{S}, \\ S_{(i+2)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ i \leq N-2, \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$i = 0, 1, \dots, K, \quad j = 0, 1, \dots, K.$$

Интенсивности  $\varphi_{ij}^I(t)$ ,  $\varphi_{ij}^{III}(t)$ , переводящие СМО из состояния  $S_{ij}$  в состояния с меньшими значениями  $i$  и  $j$  (если наличие таких состояний возможно), прямо пропорциональны задействованному числу каналов, обслуживающих находящиеся в СМО заявки различного типа (занимающие для обслуживания один или два канала). Группу из двух каналов, занятых обслуживанием одной заявки соответствующего типа, можно рассматривать в качестве одного канала. Поэтому в общем случае

$$\varphi_{ij}^I(t) = k_{ij1}\mu_1(t), \quad \varphi_{ij}^{III}(t) = k_{ij2}\mu_2(t),$$

где  $k_{ij1}$  – число заявок, занимающих один канал, обслуживаемых СМО в состоянии  $S_{ij}$ ;  $k_{ij2}$  – число заявок, занимающих по два канала, обслуживаемых СМО в состоянии  $S_{ij}$ .

Через  $i$  и  $j$  указанные величины определяются следующим образом:

$$k_{ij1} = \begin{cases} 2j - i, & \text{если } i \leq N, \\ N - 2(i - j), & \text{если } i > N, \end{cases} \quad (4)$$

$$k_{ij2} = i - j.$$

С учётом ограничений по возможности существования состояний выражения для  $\varphi_{ij}^I(t)$ ,  $\varphi_{ij}^{III}(t)$  имеют вид

$$\varphi_{ij}^I(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{ij} \notin \mathbf{S} \text{ или } S_{(i-1)(j-1)} \notin \mathbf{S}, \\ k_{ij1}\mu_1(t), & \text{если } \begin{cases} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i-1)(j-1)} \in \mathbf{S}, \end{cases} \end{cases}$$

$$\varphi_{ij}^{III}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{ij} \notin \mathbf{S} \text{ или } S_{(i-1)(j-1)} \notin \mathbf{S}, \\ k_{ij2}\mu_2(t), & \text{если } \begin{cases} S_{ij} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i-1)(j-1)} \in \mathbf{S}, \end{cases} \end{cases}$$

$$i = 0, 1, \dots, K, \quad j = 0, 1, \dots, K.$$

### Показатели эффективности функционирования СМО

Описанная модель позволяет определить временные зависимости следующих показателей эффективности функционирования рассматриваемой СМО.

Средняя длина очереди:

$$M_{ож}(t) = \sum_{i=n+1}^K \sum_{j=0}^K (i-n) P_{ij}(t).$$

Среднее число занятых каналов:

$$N_z(t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^K iP_{ij}(t).$$

Среднее число заявок в СМО:

$$M_z(t) = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K jP_{ij}(t).$$

Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{отк}(t) = \sum_{j=K-q+1}^K P_{Kj}(t).$$

Может быть получено **распределение виртуального времени ожидания заявки обслуживания**  $W(x, t) = P(t_{ож}(t) < x)$ , позволяющее характеризовать качество обслуживания рассматриваемой СМО. Поступившая в систему заявка вынуждена ожидать обслуживания в случае, если все каналы заняты обслуживанием заявок, поступивших ранее. Существует вероятность  $P_{w=0}(t)$  немедленного обслуживания поступившей заявки при наличии свободного канала (или нескольких свободных каналов)

$$P_{w=0}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{K-1} P_{ij}(t),$$

$$P_{ij}(t) \equiv 0, \text{ если } S_{ij} \notin \mathbf{S}.$$

С учётом возможности отказа искомая величина функции распределения  $W(x, t)$  определится как

$$W(x, t) = \frac{1}{1 - P_{\text{отк}}(t)} \left( P_{w=0}(t) + \sum_{i=N}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} W(x, t | (i, j)) P_{ij}(t) \right),$$

$P_{ij}(t) \equiv 0$ , если  $S_{ij} \notin S$ .

Здесь  $W(x, t | (i, j))$  - условная функция распределения времени ожидания некоторой заявки при условии, что в момент своего поступления  $t$  она застала СМО в состоянии  $ij$ .

В рассматриваемой СМО длительность ожидания обслуживания входящей заявкой зависит не только от числа заявок, уже находящихся в СМО, но и от распределения каналов между групповым и индивидуальным обслуживанием имеющихся заявок. Если бы взаимопомощи между каналами не существовало, то рассматриваемая СМО представляла бы собой традиционную СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины, для которой общее время ожидания начала обслуживания заявкой, заставшей в момент поступления  $m$  других заявок в очереди, имело бы распределение Эрланга  $E_{m+1}^{N\mu(t)}(x)$  [1].

Здесь верхний индекс содержит интенсивность обслуживания заявок всеми  $N$  каналами, действующими при наличии очереди; нижний индекс – порядок распределения по закону Эрланга. В рассматриваемой здесь СМО описанный закон справедлив только в отношении заявок, вошедших в СМО в состояниях, когда заняты все каналы, причём все они обслуживают по одной заявке. Для этих состояний можно записать

$$W(x, t | (N + m, N + m)) = E_{m+1}^{N\mu(t)}(x). \tag{5}$$

Обозначим как  $E_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{y_1, y_2, \dots, y_n}(x)$  функцию распределения обобщённого закона Эрланга, имеющего порядок  $\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1$ , где  $\alpha_i$  - число случайных величин, распределённых по

показательному закону с параметром  $y_i$ . С использованием введённого обозначения запишем выражения для функции распределения времени ожидания в других состояниях. По сравнению с (5) эти выражения имеют более сложный вид, что не мешает их программной реализации. Далее, в качестве примера они приводятся только для трёх первых состояний полной занятости каналов с использованием введённой ранее трёхсимвольной индексации:

- к моменту входа заявки очереди нет, однако все каналы заняты:

$$W(x, t | (n, k, m)) = W(x, t | (N, N - g, 0)) = E_1^{H(N)(N-g)}(x), \quad 0 \leq g \leq q,$$

где  $H_{ij} = k_{ij1}\mu_1(t) + k_{ij2}\mu_2(t)$ ;

- к моменту входа заявки в очереди находится одна заявка:

$$W(x, t | (n, k, m)) = W(x, t | (N, N - g, 1)) = \frac{k_{ij2}\mu_2(t)}{H_{(N)(N-g)}} E_1^{H(N)(N-g)}(x) + \frac{k_{ij1}\mu_1(t)}{H_{(N)(N-g)}} E_2^{H(N)(N-g)}(x);$$

- к моменту входа заявки в очереди находятся две заявки:

$$W(x, t | (N, N - g, 2)) = \frac{k_{ij2}\mu_2(t)}{H_{(N)(N-g)}} E_{1,1}^{H(N)(N-g), H(N)(N-g+1)}(x) + \frac{k_{ij1}\mu_1(t)}{H_{(N)(N-g)}} \left[ \frac{k_{ij2}\mu_2(t)}{H_{(N)(N-g)}} E_2^{H(N)(N-g)}(x) + \frac{k_{ij1}\mu_1(t)}{H_{(N)(N-g)}} E_3^{H(N)(N-g)}(x) \right].$$

**Среднее виртуальное время ожидания заявки  $\bar{T}_{\text{ож}}(t)$**  определяется численно как

$$\bar{T}_{ож} (t) = \int_0^{\infty} x dW(x, t).$$

Может быть также определено **распределение виртуального времени обслуживания произвольно выбранной заявки**  $T_{обсл} (t)$ .

Поскольку изменение  $T_{обсл} (t)$  в рассматриваемой СМО является случайным процессом, представляющим собой смесь двух показательно распределённых случайных процессов  $T_{обсл1} (t)$  и  $T_{обсл2} (t)$ , то распределение  $V(x, t) = P(T_{обсл} (t) < x)$  не будет показательным. С учётом возможности отказа выражение для функции распределения  $V(x, t)$  запишется в виде

$$V(x, t) = \frac{1}{1 - P_{омк} (t)} \left( \sum_{i=N}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} V(x, t | (i, j)) P_{ij} (t) \right),$$

$$P_{ij} (t) \equiv 0, \text{ если } S_{ij} \notin \mathbf{S}.$$

Здесь  $V(x, t | (i, j))$  - условная функция распределения времени обслуживания некоторой заявки при условии, что в момент своего поступления она застала СМО в состоянии  $ij$ .

Если в момент начала обслуживания заявки СМО находится в состоянии, при котором возможно как групповое, так и индивидуальное обслуживание, то время обслуживания представляет собой смесь двух продолжительностей:  $T_{обсл1} (t)$  и  $T_{обсл2} (t)$ , распределённых показательно с параметрами  $\mu_1 (t)$  и  $\mu_2 (t)$ , соответственно. Если же в этот момент нет возможности выделения двух каналов, то время обслуживания заявки распределено показательно с параметром  $\mu_1 (t)$ . При подходе заявки к обслуживающим каналам в состоянии  $S_{ij}$  переход к индивидуальному обслуживанию допустим при наличии возможности состояния  $S_{(i+1)(j+1)}$ ,

переход к групповому обслуживанию – при наличии возможности состояния  $S_{(i+2)(j+1)}$  (рис.2). Таким образом, имеем:

$$V(x, t | (i, j)) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu_1(t)x}, & \text{если } \begin{cases} S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+2)(j+1)} \notin \mathbf{S}, \end{cases} \\ v_1 (1 - e^{-\mu_1(t)x}) + v_2 (1 - e^{-\mu_2(t)x}), & \text{если } \begin{cases} S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, \\ S_{(i+2)(j+1)} \in \mathbf{S}, \end{cases} \end{cases}$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Поскольку при отсутствии двух свободных каналов любая заявка обслуживается одним каналом, то **фактическая вероятность  $v_1^\phi (t)$  выделения одного канала** будет больше заданной  $v_1$ . Функция  $v_1^\phi (t)$  определяется как

$$v_1^\phi (t) = \frac{1}{1 - P_{омк} (t)} \left( \sum_{i=N}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} v_1 (i, j) P_{ij} (t) \right),$$

$$P_{ij} (t) \equiv 0, \text{ если } S_{ij} \notin \mathbf{S}.$$

Здесь  $v_1 (i, j)$  - вероятность выделения одного аппарата для обслуживания заявки, поступившей в СМО в состоянии  $ij$ :

$$v_1 (i, j) = \begin{cases} 1, & S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, S_{(i+2)(j+1)} \notin \mathbf{S}, \\ v_1, & S_{(i+1)(j+1)} \in \mathbf{S}, S_{(i+2)(j+1)} \in \mathbf{S}, \end{cases}$$

$$i = 0, 1, \dots, K-1, \quad j = 0, 1, \dots, K-1.$$

**Средняя продолжительность обслуживания заявки**, вошедшей в СМО в момент  $t$ , может быть через  $v_1^\phi (t)$  определена как

$$\bar{T}_{обсл} (t) = v_1^\phi (t) \bar{T}_{обсл1} (t) + [1 - v_1^\phi (t)] \bar{T}_{обсл2} (t).$$

**Распределение виртуального времени пребывания заявки в СМО**

$$U(x, t) = P(T_{проб} (t) < x)$$

определяется с использованием полученных ранее выражений для функций распределения времени ожидания и времени обслуживания как

$$U(x, t) = \frac{1}{1 - P_{омк}(t)} \left( \sum_{i=N}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} U(x, t | (i, j)) P_{ij}(t) \right),$$

$$P_{ij}(t) \equiv 0, \text{ если } S_{ij} \notin S.$$

Здесь  $U(x, t | (i, j))$  - условная функция распределения времени пребывания в СМО некоторой заявки при условии, что в момент своего поступления  $t$  она застала систему в состоянии  $ij$ .

Для состояний со свободными каналами время пребывания в СМО совпадает со временем обслуживания:

$$U(x, t | (i, j)) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu_1(t)x}, & \text{если } \begin{cases} S_{(i+1)(j+1)} \in S, \\ S_{(i+2)(j+1)} \notin S, \end{cases} \\ v_1 (1 - e^{-\mu_1(t)x}) + \\ + v_2 (1 - e^{-\mu_2(t)x}), & \text{если } \begin{cases} S_{(i+1)(j+1)} \in S, \\ S_{(i+2)(j+1)} \in S, \end{cases} \end{cases}$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Для других состояний формулы условной функции распределения записываются по аналогии с формулами для  $W(x, t | (n, k, m))$  с использованием трёхсимвольной индексации. Ниже они приведены для трёх первых состояний полной занятости каналов:

- к моменту входа заявки очереди нет, однако все каналы заняты:

$$U(x, t | (n, k, m)) = U(x, t | (N, N - g, 0)) = E_{1,1}^{\mu_1(t), H_{(N)(N-g)}}(x), \quad 0 \leq g \leq q;$$

- к моменту входа заявки в очереди находится одна заявка:

$$U(x, t | (n, k, m)) = U(x, t | (N, N - g, 1)) = \frac{k_{ij2} \mu_2(t)}{H_{(N)(N-g)}} E_{1,1}^{\mu_1(t), H_{(N)(N-g)}}(x) + \frac{k_{ij1} \mu_1(t)}{H_{(N)(N-g)}} E_{1,2}^{\mu_1(t), H_{(N)(N-g)}}(x);$$

- к моменту входа заявки в очереди находятся две заявки:

$$U(x, t | (N, N - g, 2)) = \frac{k_{ij2} \mu_2(t)}{H_{(N)(N-g)}} E_{1,1,1}^{\mu_1(t), H_{(N)(N-g)}, H_{(N)(N-g+1)}}(x) + \frac{k_{ij1} \mu_1(t)}{H_{(N)(N-g)}} \left[ \frac{k_{ij2} \mu_2(t)}{H_{(N)(N-g)}} E_{1,2}^{\mu_1(t), H_{(N)(N-g)}}(x) + \frac{k_{ij1} \mu_1(t)}{H_{(N)(N-g)}} E_{1,3}^{\mu_1(t), H_{(N)(N-g)}}(x) \right].$$

**Среднее виртуальное время пребывания заявки в СМО** определяется как

$$\bar{T}_{преб}(t) = \bar{T}_{обсл}(t) + \bar{T}_{ож}(t).$$

**Пример использования модели СМО**

Моделируется функционирование в течение суток производственного комплекса одного из восточноевропейских региональных узловых аэропортов при выполнении отдельной технологической операции обслуживания прибывающих ВС. В качестве исходных данных для моделирования использованы временные зависимости усреднённой интенсивности потока ВС, поступающих на обслуживание,  $\lambda(t)$  и интенсивности обслуживания ВС одним средством  $\mu_1(t)$ . Как следует из построенного по данным сайта аэропорта графика зависимости  $\lambda(t)$  (рис. 3а), поступление ВС характеризуется существенной неравномерностью: в течение суток наблюдаются четыре максимума интенсивности, соответствующие четырём «вол-

нам» прибытия-отправления рейсов. Пиковые значения  $\lambda(t)$  для основных «волн» достигают 25-30 ВС/ч.

На рис. 3а также отображён график зависимости  $\mu_1(t)$ . Предполагается, что не только интенсивность потока ВС, но и интенсивность их обслуживания является функцией времени и зависит от фазы «волны». Дело в том, что для сокращения среднего времени трансфера пассажиров расписание узлового аэропорта строится таким образом, чтобы «волну» инициировали прилёты самолётов большой пассажироместимости, обслуживание которых требует больших затрат времени, а завершали прилёты малых самолётов. В примере принимается, что средняя длительность выполнения операции одним средством, составляющая для большей части продолжительности суток 20 мин., на начальном этапе «волны» возрастает до 25 мин. и сокращается на заключительном этапе до 15 мин. Таким образом, четыре интервала с пониженным уровнем  $\mu_1(t)$  на рис. 3а соответствуют начальным фазам «волн», когда преобладают прилёты больших самолётов. В свою очередь, четыре интервала повышения уровня  $\mu_1(t)$  выпадают на завершающие фазы «волн» с преобладанием малых самолётов.

Ниже описаны результаты моделирования, позволяющие оценить эффективность функционирования системы. На рис. 3б–3г представлены временные зависимости средних величин числа занятых каналов  $N_3(t)$ , общего числа заявок в системе  $M_3(t)$  и длины очереди  $M_{ож}(t)$ , полученные для двух предельных значений вероятности  $\nu_1 = 0$  и  $\nu_1 = 1$  при следующих расчётных характеристиках:  $N = 10$ ;  $K = 40$ ;  $\theta = 1.75$ .

Судя по графику зависимости  $N_3(t)$  (рис. 3б), в течение большей части суточного интервала времени занятость обслуживающих каналов системы остаётся низкой, что является следствием нестационарности вхо-

дящего потока самолётов. Высокая загрузка (60-80 %) достигается только в течение второй «волны» прилётов-вылетов, причём вариант  $\nu_1 = 0$  при больших значениях  $\lambda(t)$  вызывает большую загруженность системы, а при малых значениях  $\lambda(t)$  – меньшую по сравнению с вариантом  $\nu_1 = 1$ . При этом, как показало моделирование, вероятность отказа в рассматриваемой системе для обоих вариантов пренебрежимо мала.

Сравнение графиков зависимостей  $M_3(t)$  и  $M_{ож}(t)$  (рис. 3в и 3г соответственно) позволяет сделать вывод о том, что в СМО при  $\nu_1 = 0$  находится заявок в среднем меньше, а ожидают обслуживания заявок больше, чем при  $\nu_1 = 1$ . Противоречие это объясняется тем, что каждая поступившая в СМО заявка, занимающая в случае  $\nu_1 = 0$  два канала, оставляет меньше свободных каналов следующим за ней заявкам, вынуждая их создавать большую очередь, чем в случае  $\nu_1 = 1$ . В то же время групповое использование каналов, сокращая время обслуживания, служит причиной снижения общего числа обслуживаемых и ожидающих обслуживания заявок. Так, в рассматриваемом примере среднее в течение суток время обслуживания для варианта  $\nu_1 = 1$  составляет 20 мин., а для варианта  $\nu_1 = 0$  - 11.7 мин.

Рассмотренная выше модель даёт возможность решать задачи, связанные с поиском оптимального управления качеством обслуживания перевозок. На рис. 3д, 3е приведены некоторые результаты решения подобной задачи, смысл которой пояснён далее на примере рассматриваемого аэропорта.

Небольшая даже в течение пиковых нагрузок средняя длина очереди, не превышающая в рассматриваемом примере 0.6 ВС (рис. 3г), не даёт гарантии, что для подавляющего числа ВС время ожидания в очереди будет приемлемым. Малое среднее время ожидания при удовлетворительном среднем времени выполнения операции обслужива-

ния также не исключает возможности недопустимо длительных простоев на обслуживании отдельных ВС. Рассмотрим пример, когда к качеству аэропортового обслуживания предъявляются требования как по обеспечению удовлетворительных значений времени ожидания обслуживания, так и по времени пребывания в системе. Будем считать, что более 90 % ВС должны простаивать на обслуживании меньше 40 мин., причём время ожидания обслуживания для такой же доли самолётов должно быть меньше 5 мин. С использованием введённых выше обозначений эти требования к качеству аэропортового обслуживания запишутся в виде неравенств:

$$P(T_{\text{преб}}(t) < 40 \text{ мин}) > 0.9,$$

$$P(T_{\text{ож}}(t) < 5 \text{ мин}) > 0.9.$$

На рис. 3д, 3е приведены временные зависимости вероятностей  $P(T_{\text{преб}}(t) < 40 \text{ мин})$  и  $P(T_{\text{ож}}(t) < 5 \text{ мин})$  для интервала времени 460-640 мин. от начала модельных суток, соответствующего второй «волне» прилётов. Как видно из рисунков, вариант  $v_1 = 1$  не обеспечивает расчётной надёжности по времени обслуживания: требование к времени обслуживания, задаваемое условием  $P(T_{\text{преб}}(t) < 40 \text{ мин}) > 0.9$ , выполняется только в течение краткого промежутка 530-560 мин., соответствующего прилётам малых ВС. В свою очередь, вариант  $v_1 = 0$  не обеспечивает расчётной надёжности по времени ожидания в очереди: в течение промежутка прилётов больших ВС (500-510 мин.) не вы-

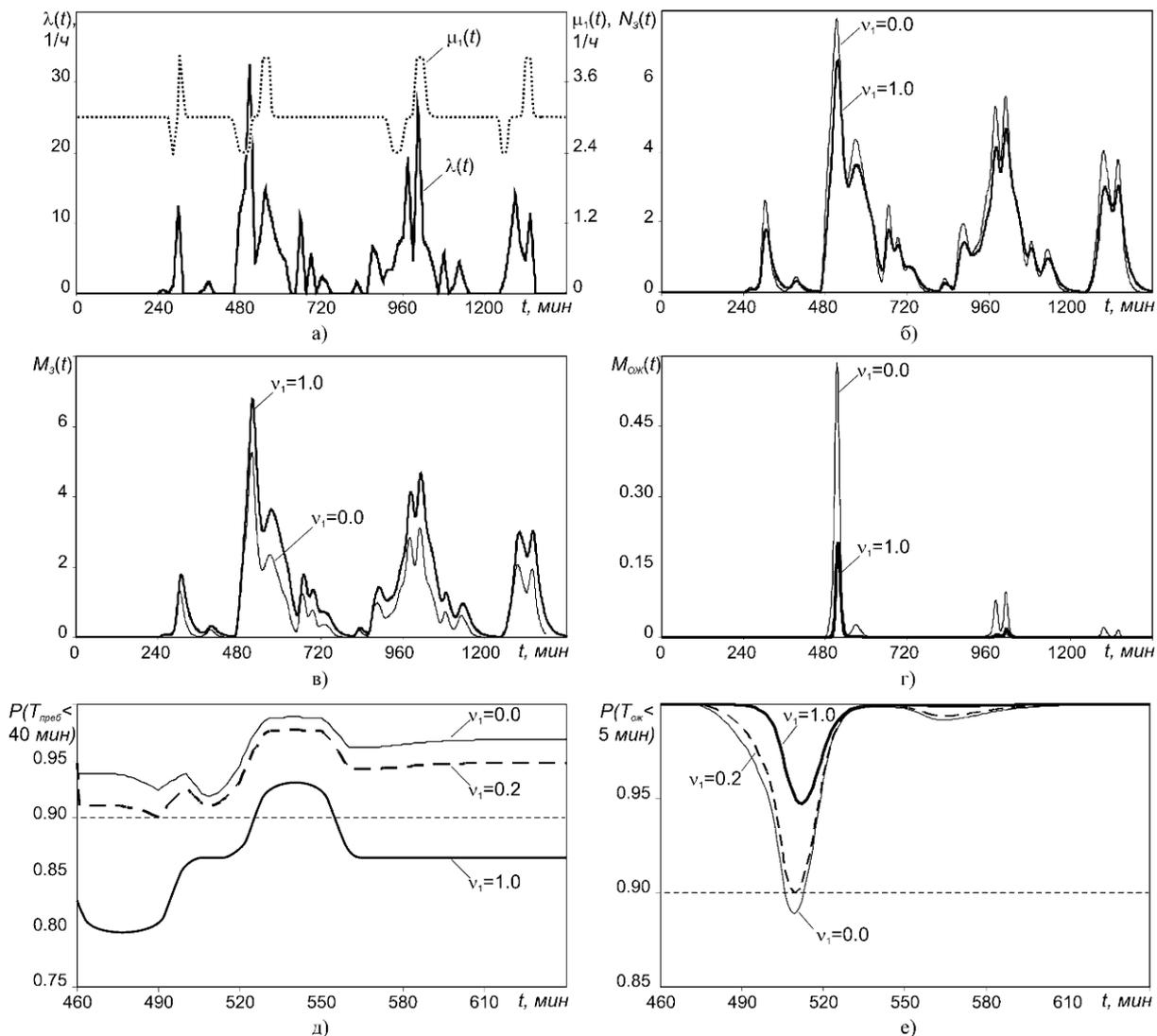


Рис. 3. Результаты моделирования

полняется условие  $P(T_{ож}(t) < 5 \text{ мин}) > 0.9$ . Как показало моделирование, выходом из сложившейся ситуации может явиться выбор компромиссного варианта  $v_1 \approx 0.2$ . На практике этот вариант означает, что службам аэропорта следует направлять по два средства на обслуживание не всех ВС, а только выбранных по определённому признаку, например, пассажировместимости. Здесь  $v_1$  играет роль параметра, позволяющего управлять показателями функционирования СМО: временем ожидания заявки в очереди и временем пребывания заявки в СМО или временем обслуживания.

Итак, рассмотренная система, используемая для обслуживания заявки один или одновременно два канала, является частным, но практически значимым случаем СМО с

взаимопомощью каналов. Использование динамической модели такой СМО позволяет ставить и решать различные оптимизационные, в том числе многокритериальные, задачи, связанные с управлением не только общей численностью средств, но и их взаимопомощью. Такого рода задачи особенно актуальны для насыщенных средствами обслуживания узловых аэропортов с их нестационарными потоками рейсов и колеблющейся интенсивностью обслуживания. Таким образом, модель рассмотренной СМО является инструментом анализа и оптимизации параметров такого перспективного класса аэропортов, как хабы.

#### Библиографический список

1. Бочаров, П.П. Теория массового обслуживания [Текст] / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.

## MODEL OF A QUEUEING SYSTEM WITH NON-STATIONARY STREAMS AND PARTIAL MUTUAL ASSISTANCE BETWEEN CHANNELS

© 2011 V. A. Romanenko

Samara State Aerospace University  
named after academician S. P. Korolyov (National Research University)

A dynamic model of multichannel queueing system with non-stationary streams, waiting in a limited-length queue and partial mutual assistance of channels expressed in the opportunity of simultaneous service of a customer by two channels is described. Expressions for the basic probability-time characteristics of the system are given. The results of modeling the functioning of a hub airport as an example of the system discussed are described.

*Queueing system, non-stationary flow, mutual assistance between channels, hub airport.*

#### Информация об авторе

**Романенко Владимир Алексеевич**, кандидат технических наук, доцент, докторант кафедры организации и управления перевозками на транспорте, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: vla\_rom@mail.ru. Область научных интересов: оптимизация и моделирование системы обслуживания перевозок узлового аэропорта.

**Romanenko Vladimir Alexeevitch**, candidate of technical sciences, associate professor, doctor's degree at the department of transportation organization and management, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). E-mail: vla\_rom@mail.ru. Area of research: optimization and simulation of a hub airport transportation service system.