

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА

© 2009 Н. И. Лиманова<sup>1</sup>, Е. А. Мамзин<sup>1</sup>, С. Г. Матвеев<sup>2</sup><sup>1</sup>Тольяттинский государственный университет<sup>2</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет

В работе выполнено моделирование процессов теплообмена в камерах сгорания энергетических установок. Предложен способ моделирования, основанный на методе клеточных автоматов. Отличием разработанной модели от известных является учет неоднородности коэффициента теплопроводности на рассматриваемой области. Предложенный подход позволил повысить точность определения температуры и сократить время вычислений более чем в 4 раза.

*Компьютерное моделирование, теплообмен, камеры сгорания, клеточные автоматы*

Неотъемлемыми частями машин, силовых и энергетических установок являются камеры сгорания. Именно этими частями газового тракта определяется ресурс установок. Известно также, что качество и стабильность температурного поля потока газов в камерах и на выходах из них обуславливают надежность этих узлов. Поэтому основной целью разработки методов и программ моделирования процессов теплообмена в них является повышение достоверности результатов расчета при проектировании силовых и энергетических установок, что обеспечивает снижение затрат на создание новых изделий. С точки зрения обеспечения безопасности экспериментов становится важной задача прогнозирования протекания процессов теплообмена в камерах сгорания на различных режимах работы машин и энергетических установок с помощью аппарата компьютерного моделирования. Возможности современных компьютеров позволяют решать подобные задачи в двух- и трехмерной постановке, однако время таких расчетов остается весьма длительным.

В работе предложен способ моделирования, основанный на методе клеточных автоматов [1]. В соответствии с [1] под клеточными автоматами понимаются сети элементов, изменяющих свое состояние в последовательные дискретные моменты времени по определенному закону. Разработана математическая модель детерминированного клеточного автомата, для которого определен закон перехода из предыдущего состояния в последующее [2]. В отличие от существующих моделей, отражающих протекание

процессов теплообмена, в которых коэффициент теплопроводности вносится как неизменное число, на которое происходит умножение количества переносимого тепла, разработанная модель учитывает неоднородность коэффициента теплопроводности на рассматриваемой области.

Основной закон теплопроводности — закон Фурье устанавливает закономерность между количеством тепловой энергии  $dQ$ , перетекающим в период времени  $dt$  через площадку  $dF$  в перпендикулярном ей направлении  $S$ , в виде зависимости:

$$dQ = q \cdot dF \cdot dt = -\lambda_s \frac{\partial T}{\partial S} dF dt; \text{ Дж (ккал)}, (1)$$

где  $q$  — плотность теплового потока  $\left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = \frac{\text{ккал}}{\text{ч} \cdot \text{м}^2} \right]$ ,  $\lambda_s$  — коэффициент теплопроводности среды в направлении  $S$   $\left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}} = \frac{\text{ккал}}{\text{ч} \cdot \text{м} \cdot \text{град}} \right]$ ,  $\frac{dT}{dS}$  — температурный градиент.

Таким образом, за конечный промежуток времени  $t_2-t_1$  через площадку  $dF$  пройдет количество тепла:

$$Q = -dF \int_{t_1}^{t_2} \lambda_s \frac{\partial T}{\partial S} dT (2)$$

Уравнение теплопроводности, описывающее стационарное поле (при неизменной во времени температуре, т. е. при  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ) принимает вид уравнения Пуассона:

$$\Delta T = -\frac{1}{\lambda} \omega, (3)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (4)$$

$\omega$  – удельная мощность теплового источника,  $\left[ \frac{Вт}{м^3} = \frac{ккал}{ч \cdot м^3} \right]$ .

Рассмотрим смешанную краевую задачу, описывающую стационарное поле камеры сгорания энергетической тепловой установки в двумерной области  $V$  вначале для однородной теплопроводящей среды ( $\lambda = const$ ) [3]:

$$\begin{cases} \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = -\omega(x, y), & x, y \in V \\ T(x, y_0) = T(x, y_1), & x, y \in \tilde{A}_1 \\ \frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{1}{\lambda} q(x, y), & x, y \in \tilde{A}_2 \end{cases}. \quad (5)$$

Здесь  $n$  — нормаль к границе области  $V$ ,  $x, y$  — координаты положения точки в пространстве по принимаемым координатным направлениям.

Решением краевой задачи (5) станет функция температуры теплопроводящей среды  $T(x, y)$ , удовлетворяющая в области  $V$  двумерному дифференциальному уравнению теплопроводности в первой строке системы (5) и краевым условиям, записанным во второй и третьей строках (5).

Пусть область тепловыделения  $V$  камеры сгорания энергетической тепловой установки будет прямоугольной (рис. 1).

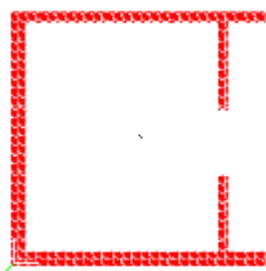


Рис. 1. Конфигурация области тепловыделения камеры сгорания

Для представленной на рис. 1 области  $V = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$ .

Примем коэффициент теплопроводности однородной среды  $\lambda = 40 \frac{Вт}{м \cdot град}$ . В центре области, в точке, расположенной на

расстоянии  $x = 2,4 м, y = 3 м$  от левого верхнего угла выделенной области, действует точечный тепловой источник плотностью

$$\omega = 800 \frac{Вт}{м^3}.$$

В области  $\tilde{A}_1$ , включающей две противоположные грани прямоугольной области  $V(x = 0 \cup x = l_1)$

$$\tilde{A}_1 = \{(x, y) \mid x = 0 \cup x = l_1, 0 \leq y \leq l_2\},$$

заданы известные значения температуры (краевые условия первого рода) и пусть на обеих гранях  $T_r = 180^\circ = const$ .

На двух других гранях прямоугольника  $V$  в области  $\tilde{A}_2$ :

$$\tilde{A}_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq l_1, y = 0 \cup y = l_2\}$$

задана тепловая нагрузка (краевые условия второго рода) плотностью теплового потока  $q = -20 \frac{Вт}{м^2}$ , действующего на направлении  $n$ , перпендикулярном границам области.

Из рис. 1 видно, что при  $y = 0$ , производная от функции температуры по нормали к границе  $\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial y}$ , а на противоположной

стороне, где  $y = l_2$ ,  $\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\partial T}{\partial y}$ .

Перепишем формулировку краевой задачи (5) с учетом заданных значений:

$$\begin{cases} \lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \bar{\omega}(x, y), & 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2, \\ T = 180, & x = 0 \cup x = l_1, 0 \leq y \leq l_2, \\ \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{40}(-20), & 0 < x < l_1, y = 0, \\ -\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{40}(-20), & 0 < x < l_1, y = l_2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{где } \bar{\omega} = \begin{cases} 800 & \text{при } x = 2,4, y = 3,0, \\ 0 & \text{в остальных точках} \end{cases}.$$

Для решения заданной краевой задачи воспользуемся методом конечных разностей. Нанесем на область  $V$  прямоугольную равномерную разностную сетку  $5 \times 5$ . Пронумеруем узлы разностной сетки в направлении оси  $Ox$  индексом  $i: 0 \leq i \leq 4$ , а в направлении оси  $Oy$  — индексом  $j: 0 \leq j \leq 4$ .

Конечноразностный аналог задачи (6) относительно сеточной функции  $T_{i,j}$  – дис-

кретного приближения функции  $T(x, y)$  – будет иметь вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \lambda \left( \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{h_1^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{h_2^2} \right) = -\bar{\omega}, \\ & \text{при } 0 \leq i \leq 4, \quad 0 \leq j \leq 4, \\ & T_{i,j} = 180, \quad \text{при } i = 0 \cup i = 4, \quad 0 \leq j \leq 4, \\ & \frac{T_{i,1} - T_{i,0}}{h_2} = 0.5, \quad \text{при } i = 1, 2, 3, \\ & -\frac{T_{i,4} - T_{i,3}}{h_2} = 0.5 \quad \text{при } i = 1, 2, 3. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где  $\bar{\omega} = \begin{cases} 800 & \text{при } i = 2, \quad j = 2, \\ 0 & \text{в остальных точках} \end{cases}$ ,

$h_1$  и  $h_2$  – шаги равномерной разностной сетки в направлениях  $i$  и  $j$ .

Таким образом, краевая задача (6), полученная по методу конечных разностей, представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (7) и уравнения в матричном виде

$$A \times \bar{T} = \bar{F}, \quad (8)$$

где  $\bar{F}$  – функция, характеризующая действие источника тепла. Систему уравнений необходимо решить относительно 25 значений искомой дискретной функции температуры  $T_{i,j}$ . Каждое из уравнений системы справедливо для одного из 25 узлов выбранной разностной сетки.

Численное решение заданной краевой задачи состояло в формировании и решении системы из 25 уравнений относительно 25 искомых значений температуры в узлах разностной сетки.

Максимальная температура в камере сгорания  $320,49^\circ$  располагается над источником тепла, уменьшение температуры в сторону выхода теплового потока составляет  $220,5^\circ$ .

Если температурное поле рассмотренной двумерной области поместить в трехмерный объем  $V'$ , что является эквивалентом реальной камеры сгорания, то можно подсчитать количество тепла (количество тепловой энергии), выделяемой на выходе камеры:

$$Q = C\rho V'\delta T, \quad \text{Дж (ккал)}, \quad (10)$$

где  $C$  – удельная теплоемкость среды,  $\frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$ ;  $\rho$  – плотность среды,  $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ;

$V'$  – объем камеры,  $\text{м}^3$ ;

$\delta T$  – изменение температуры.

Величина  $Q$  также является сложной зависимостью от источника тепла и вида топлива.

Особенность разработанной модели распространения тепла в камере сгорания заключается в учете того, что коэффициент теплопроводности не однороден на рассматриваемой области. Распределение значений коэффициентов теплопроводности задается в виде комбинации различных элементов: источников тепла и границ камеры сгорания.

Задаваясь для простоты линейным законом изменения коэффициента теплопроводности  $\lambda(x, y)$  двумерной области  $V$  теплопроводящей среды камеры сгорания, на основе разработанной модели детерминированного клеточного автомата получаем более точную компьютерную модель распределения температуры  $T(x, y)$ .

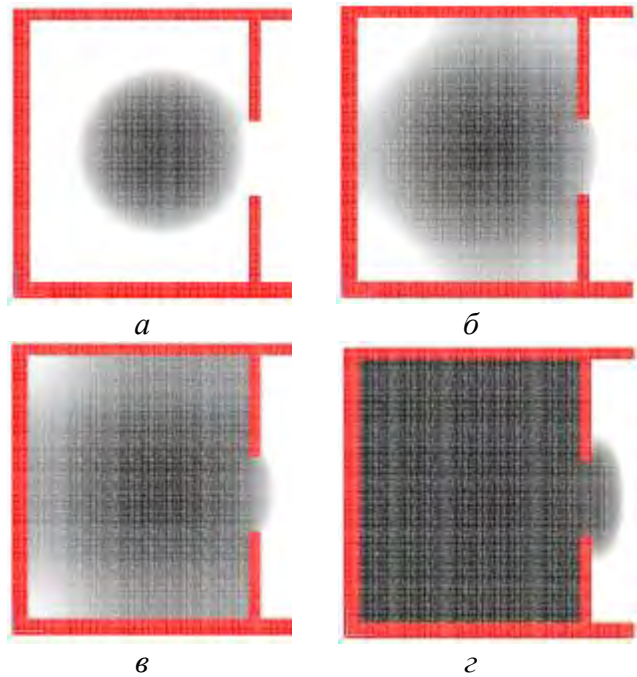


Рис. 2. Моделирование распределения температуры  $T(x, y)$  в моменты времени  $t = 1000$  (а),  $t = 2000$  (б),  $t = 3000$  (в) и  $t = 6000$  (z)

На рис. 2 представлена картина распределения температуры  $T(x, y)$  в прямоугольной области тепловыделения  $V$  камеры сгорания в разные моменты времени. Цветом обозначены различные значения температуры моделируемой области. Черный цвет соответствует максимальному значению температуры, равному величине тем-

пературы источника тепла, белый – минимальному значению, т.е. величине температуры в камере до нагрева. В программе использованы следующие значения:  $0^0$  – начальная температура,  $350^0$  – температура источника. Коэффициент теплопроводности варьируется от 0 (стенки) до 1 (моделируемая область). Данный коэффициент в каждой ячейке рассчитывался по формуле:  $\lambda = \lambda 1 / \lambda 2$ , где  $\lambda 1$  – текущий коэффициент теплопроводности,  $\lambda 2$  – максимальный коэффициент теплопроводности на всей области моделирования.

Таким образом, в данной работе выполнено компьютерное моделирование процессов теплообмена в камерах сгорания энергетических тепловых установок. Отличием разработанной модели от известных является учет неоднородности коэффициента теплопроводности в области тепловыделения камеры сгорания. Предложенный способ учета коэффициента теплопроводности на каждом шаге вычислений позволил увеличить точность определения температуры и сократить время вычислений более чем в 4 раза. Ускорению работы программы способствовало использование распараллеливания программного кода и пошаговой смены конфигураций шаблонов, учитываемых в расчетах состояний соседних элементов, что в конечном итоге дало возможность наблюдать моделируемые процессы в динамике в реальном масштабе времени. Созданная компьютерная модель позволяет наблюдать процессы теплообмена, не проводя сложных и долгих экспериментов, изменяя лишь параметры, отражающие режимы работы машин и энергетических установок. На основе разработанной модели детерминированного клеточного автомата и метода распараллеливания MPI [4] была написана программа, наглядно отражающая динамику процессов те-

плообмена в камерах сгорания. Программирование выполнено на языке Си++. Визуализация результатов вычисления производилась с помощью графической библиотеки OpenGL. В программе реализовано вращение моделируемой области, приближение и возможности установки паузы для детального рассмотрения участка сетки. Результаты моделирования соответствуют экспериментальным данным.

#### Библиографический список

1. Тоффоли, Т. Машинные клеточные автоматы / Т. Тоффоли, Н. Марголюс. – М.: Мир, 1991. – 280 с.
2. Лиманова, Н.И. Моделирование физических явлений на основе использования клеточных автоматов /Н.И. Лиманова, Е.А. Мамзин // V Всесибирский конгресс женщин-математиков – Красноярск: РИО СФУ, 2008. – С. 262 – 266.
3. Горелов, В.В. Математическое моделирование физических явлений / В.В. Горелов. – Омск.: ОмГУ. – 2001. – 287 с.
4. Богачев, К.Ю. Основы параллельного программирования /К.Ю. Богачев. – М.: БИНОМ, 2003. – 342 с.

#### References

1. Toffoli T., Margolus N. A Cellular Automata Machine. – М.: WORLD, 1991. – 280 p.
2. Limanova N.I., Mamzin E.A. Physical Phenomena Modeling with the help of Cellular Automata // The materials of the 5th Siberian Congress of women-mathematicians – Krasnoyarsk, 2008. – pp. 262 – 266.
3. Gorelov V.V. Mathematical Modeling of Physical Phenomena. – Омск. – 2001. – 287 p.
4. Bogachov K.U. The Principles of Parallel Programming. – М.: BINOM, – 342 p.

**MODELING OF THE HEAT EXCHANGE PROCESSES**©2009 N. I. Limanova<sup>1</sup>, E. A. Mamzin<sup>1</sup>, S. G. Matveev<sup>2</sup><sup>1</sup>Togliatti State University,<sup>2</sup>Samara State Aerospace University

The heat exchange processes computer models in combustion chambers of power installations have been elaborated with the help of cellular automata. The peculiarity of worked out models is in calculation of not homogeneous heat conduction coefficient in examined field. Comparison with analogs shows increase of computer models precision and rise of calculations rate in more than 4 times.

*Computer modeling, heat exchange, combustion chambers, cellular automata*

**Информация об авторах**

**Лиманова Наталия Игоревна**, доктор технических наук, доцент Тольяттинского государственного университета. Тел. (8482) 53-95-14. E-mail: [N.Limanova@tltsu.ru](mailto:N.Limanova@tltsu.ru). Область научных интересов: математическое и компьютерное моделирование, клеточные автоматы, процессы теплообмена

**Мамзин Евгений Анатольевич**, аспирант кафедры прикладной математики и информатики Тольяттинского государственного университета. Тел.: (8482) 53-95-14. E-mail: [cheerka@yandex.ru](mailto:cheerka@yandex.ru). Область научных интересов: компьютерное моделирование, клеточные автоматы, процессы теплообмена.

**Матвеев Сергей Геннадьевич**, кандидат технических наук, доцент кафедры теплотехники и тепловых двигателей Самарского государственного аэрокосмического университета. Тел.: (846) 267-43-92. E-mail: [retskod@ssau.ru](mailto:retskod@ssau.ru). Область научных интересов: теплотехника, тепловые двигатели, математическое моделирование, процессы теплообмена.

**Limanova Nataliya Igorevna**, doctor of technical sciences, professor of the Togliatti State University of Applied Mathematics and Informatics Department. E-mail: [N.Limanova@tltsu.ru](mailto:N.Limanova@tltsu.ru). Area of research: Mathematical and computer modeling, cellular automata, heat exchange processes.

**Mamzin Evgeniy Anatolyevich**, postgraduate of the Togliatti State University of Applied Mathematics and Informatics Department. E-mail: [cheerka@yandex.ru](mailto:cheerka@yandex.ru). Area of research: Computer modeling, cellular automata, heat exchange processes.

**Matveev Sergey Gennadyevich**, candidate of technical sciences, associate professor of Samara State Aerospace University of Thermal Engineering Department. E-mail: [retskod@ssau.ru](mailto:retskod@ssau.ru). Area of research: Thermal engineering, heat exchange processes, mathematical modeling.