УДК 539.3

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОГО СЛОЯ

© 2003 В. В. Глаголев

Тульский государственный университет

На основе термомеханического анализа построены характеристики стационарного процесса направленного разделения, получена их взаимосвязь с известными критериями разрушения.

Рассматривается установившееся разделение сплошной среды при симметричном внешнем воздействии относительно плоскости разделения $x_2 = const$. Выделяется слой взаимодействия толщиной δ_0 [1], образуемый материалом, переходящим в стадию разупрочнения, где напряженно-деформируемое состояние полагается однородным в направлении нормали к плоскости разделения. В данной области компонент тензора напряжений Коши σ_{22} определяется из условия $\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \equiv 0$ и, как следствие, $\sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1)$ относительно декартовой прямоугольной системы координат, ось OX_1 которой совпадает с направлением разделения. Из уравнений равновесия при плоской деформации слоя взаимодействия следует $\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial {x_1}^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial {x_2}^2} = 0$. Таким образом, $\sigma_{11} = C_1 x_1 + C_0$, где C_0, C_1 - постоянные, x_i $(i = 1, 2)$ - пространственные координаты. С учетом отсутствия напряжений на бесконечности и в точке образования новых поверхностей имеем $\sigma_{11} \equiv 0$.

Для материала, ограниченного в произвольный момент разделения замкнутым контуром $R''M''S''N''T''Z''K''K'Z'T'N'S'M'R'$ (рис. 1), запишем основное термодинамическое соотношение [2], которое примет следующий вид:

$$\int\limits_{\Sigma_{(0)}} (\dot{\psi} + \eta \dot{T} + \dot{w}) \rho_0 \, d\Sigma_0 = \oint\limits_{\ell_{(0)}} \vec{q}_0 \cdot \dot{\vec{v}} \, d\ell_0 , \qquad (1)$$

где $\dot{\psi}$ – скорость удельной (отнесенной к массе) свободной энергии; η - удельная энтропия; $\dot{T}$ - скорость изменения температуры; $\dot{w}$ - скорость удельной диссипации; $\vec{q}_0$ – вектор напряжения, отнесенный к начальной площади; $d\ell_0$ – элементарная длина граничного контура в недеформированном состоянии; $d\Sigma_0$ - элементарная площадь материальной плоскости в недеформированном состоянии.

Полагая процесс изотермическим, соотношение (1) приводим к виду

$$\int\limits_{\Sigma_{(0)}} (\dot{\psi} + \dot{w}) \rho_0 \, d\Sigma_0 = \oint\limits_{\ell_{(0)}} \vec{q}_0 \cdot \dot{\vec{v}} \, d\ell_0 . \qquad (2)$$

Выделим области с площадью $\Sigma_{(w)}$, где имеется диссипация, и область $\Sigma_{(y)} = \Sigma_{(0)} - \Sigma_{(w)}$, где диссипация отсутствует. Для последней термодинамическое соотношение примет вид

$$\int\limits_{\Sigma_{(y)}} \dot{\psi} \rho_0 \, d\Sigma_0 - \oint\limits_{\ell_{(y)}} \vec{q}_0 \cdot \dot{\vec{v}} \, d\ell_0 = 0 , \qquad (3)$$

где ℓ_y - контур, ограничивающий область с $\dot{w} = 0$.

Дальнейшее рассмотрение будем относить к декартовой прямоугольной системе координат $X_1'X_2'X_3'$ (рис. 1), движущейся с постоянной скоростью a в направлении разделения, совпадающем с осью OX_1'. Так как распределение свободной энергии в области $\Sigma_{(y)}$ непрерывно и непрерывна производная $\frac{\partial\psi}{\partial x_1'}$, то левую часть (3) преобразуем, выражая $\vec{v}(\vec{x}') = -a\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_1'}$ и $\frac{d\psi(\vec{x}')}{dt} = -a\frac{\partial\psi}{\partial x_1'}$ [3], с использованием теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\oint_{\ell_{(y)}}\left(-\rho_0 n_1^{(0)}\psi + \vec{q}_0\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_1'}\right)d\ell_0 = 0, \qquad (4)$$

где $n_1^{(0)}$ – проекция внешней нормали к контуру на направление разделения.

Представим левую часть (4) в соответствии с распределением областей диссипации, показанным на рис. 1. Будем считать, что область диссипации охватывает как часть слоя взаимодействия (область $S''K''K'S'$), так и сплошную среду вне его (области $Z'T'N'S'$ и $Z''T''N''S''$).

Перемещение окрестности срединной поверхности слоя взаимодействия представим в виде

$$\vec{u}(x_1', x_2') = u_1(x_1')\vec{e}_1 + u_2(x_1', \Delta x_2')\vec{e}_2, \qquad (5)$$

где $u_2(x_1', \Delta x_2') = \frac{\partial u_2(x_1', x_2')}{\partial x_2'}\Delta x_2 + o(\Delta x_2') =$

$= f(x_1')\Delta x_2' + o(\Delta x_2')$, $x'_{i,\, i=1,2}$ - координаты начального состояния.

Поведение материала слоя взаимодействия рассматривается как на стадии устойчивого, так и неустойчивого в смысле Дракера деформирования. Начало стадии разупрочнения определяется достижением максимальным главным значением линейного тензора деформаций критического значения. Связь между главными значениями тензоров истинных напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$ и деформаций $\underset{\sim}{\varepsilon}$ на стадии разупрочнения представим в следующем виде [3]:

$$\varepsilon_1' = \frac{1}{E_н}\left(\sigma_1' - \nu_н(\sigma_2' + \sigma_3')\right)$$
$$\varepsilon_2' = \frac{1}{E_н}\left(\sigma_2' - \nu_н(\sigma_1' + \sigma_3')\right) \qquad (6)$$
$$\varepsilon_3' = \frac{1}{E_н}\left(\sigma_3' - \nu_н(\sigma_2' + \sigma_1')\right).$$

Штрихованные компоненты из (6) связаны с текущими главными значениями формулами:

$$\sigma_i' = -\sigma_i + \sigma_i^{(k)};\ \ \varepsilon_i' = \varepsilon_i - \varepsilon_i^{(k)}, \qquad (7)$$

где $E_н = \sigma_i^{(k)} \Big/ \left(\varepsilon_i^{(m)} - \varepsilon_i^{(k)}\right)$, $\nu_н = \left|\frac{\varepsilon_j'}{\varepsilon_i'}\right|$ $i \neq j$;

ε_i - главное значение деформации тензора Генки; $\varepsilon_i^{(k)}$ - деформация, характеризующая начало неустойчивого по Дракеру деформирования; $\sigma_i^{(k)}$ - соответствующее ему напряжение; $\varepsilon_i^{(m)}$ - деформация, соответствующая образованию новых поверхностей.

Располагая точки R' и R'' так, что внешняя нагрузка на отрезках берегов $R'M'$ и $R''M''$ отсутствует, получим следующие условия на границе области:

$$n_1^{(0)} = 0;\ \vec{q}_0 = 0,\ \text{при } x_1' \in R'M' \text{ и } R''M'',$$
$$n_1^{(0)} = 0;\ \vec{q}_0 = \underset{\sim}{\sigma}\cdot\vec{e}_2 = \sigma_2\vec{e}_2,\ \text{при } x_1' \in M''S'',$$
$$n_1^{(0)} = 0;\ \vec{q}_0 = \underset{\sim}{\sigma}\cdot(-\vec{e}_2) = -\sigma_2\vec{e}_2,\ \text{при } x_1' \in S'M', \qquad (8)$$
$$n_1^{(0)} = n_1;\ \vec{q}_0 = \vec{q},\ \text{при } \ell_s \in S''N''T''Z''K''K'Z'T'N'S'.$$

Интегрируя левую часть (4) по контуру $R'R''K''K'$, охватывающему область обратимого деформирования, с учетом (8) получим

$$J^{(i)} + 2\int_0^b \sigma_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1'}dx_1' + I_1 = \oint_{\ell_{(y)}}\left(\rho_0 n_1^{(0)}\psi - \vec{q}_0\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_1'}\right)d\ell_0 = 0, \qquad (9)$$

где $J^{(i)} = \int\limits_{R'\cup R''}\left(\rho_0 n_1^{(0)}\psi - \vec{q}_0\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_1'}\right)d\ell_0$ -

внутренний инвариантный интеграл, определяемый интегрированием по произвольному контуру с началом в точке R' отрезка $A'M'$ и окончанием в точке R'' отрезка $A''M''$; $I_1 = \int\limits_{\ell_s} \left(\rho_0 n_1^{(0)} \psi - \vec{q}_0 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1'} \right) d\ell_0$, где ℓ_S – контур, охватывающий область с диссипацией.

Вычислим первый интеграл в левой части (9). Для части слоя $0 \le x_1' \le b$, заполненной разупрочняющимся материалом, поле перемещений в силу однородности ε_2 по x_2' внутри слоя взаимодействия имеет вид

$$u_2 = \varepsilon_2(x_1')x_2', \tag{10}$$

а определяющие соотношения (7) при плоской деформации -

$$\sigma_2 = E(\varepsilon_2^m - \varepsilon_2), \quad \varepsilon_2^k \le \varepsilon_2 \le \varepsilon_2^m, \tag{11}$$

где $E = \dfrac{E_н}{1-\nu_н^2}$.

Из (11) найдем

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1'} = -E\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1'}. \tag{12}$$

Из (10), (11) и (12) получим

$$\begin{aligned} A_p &= -2\int_0^b \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1'} dx_1' = -2\int_0^b \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1'}\Big|_{x_2'=\frac{\delta_0}{2}} dx_1' = \\ &= -2\left(\int_0^b \frac{\partial(\sigma_2 u_2)}{\partial x_1'} dx' - \int_0^b u_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1'} dx_1'\right) = -2\sigma_2^k u_k - \\ &- \int_0^b \varepsilon_2 \frac{\delta_0}{2} E \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x_1} dx_1') = -\sigma_2^k \delta_0 \varepsilon_2^k + \frac{\delta_0}{2}\sigma_2^k(\varepsilon_2^m + \varepsilon_2^k) = \\ &= \frac{\delta_0}{2}\sigma_2^k(\varepsilon_2^m - \varepsilon_2^k). \end{aligned} \tag{13}$$

Отметим, что A_p – величина положительная, $\lim A_p\Big|_{(u_m - u_k)\to 0} = 0$ и соответствует работе напряжений в зоне неустойчивого деформирования слоя взаимодействия.

Для определения значения интеграла I_1 рассмотрим замкнутую область, где имеется диссипация $S''N''T''Z''K''K'Z'T'N'S'$ (рис. 1), и запишем для нее основное термодинамическое соотношение (2), полагая, что величина диссипации не зависит от скорости деформирования. Так как распределение свободной энергии и диссипации в области непрерывно и непрерывны производные $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1'}, \dfrac{\partial w}{\partial x_1'}$, то, преобразуя (2) для рассматриваемой области с использованием теоремы Остроградского-Гаусса, получим

$$\oint\limits_{\ell_{(n)}} \left(\rho_0 n_1^{(0)} (\psi + w) - \vec{q}_0 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1'} \right) d\ell = 0, \tag{14}$$

где $\ell_{(n)}$ - контур, ограничивающий область $S''N''T''Z''K''K'Z'T'N'S'$ с $\dot{w} > 0$. На границе области имеем

$$\begin{aligned} &n_1^{(0)} = -n_1;\ \vec{q}_0 = -\vec{q}, \text{ при } \ell_s \in S''N''T''Z''K''K'Z'T'N'S', \\ &n_1^{(0)} = -1;\ \vec{q}_0 = \sigma_1\vec{e}_1 = 0, \psi = \psi_к, w = w_к \text{ при } -\frac{\delta_0}{2} \le x_2' \le \frac{\delta_0}{2},\ x_1' = b. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (14) с учетом (15) получаем

$$I_1 = -\rho_0\delta_0\psi_к - D = 0, \tag{16}$$

где $D = \int\limits_{\ell_s} \rho_0 n_1^{(0)} w d\ell + \rho_0\delta_0 w_к$, $\psi_k = \psi(\varepsilon_k)$ и $w_k = w(\varepsilon_k)$ - значения плотности свободной энергии и диссипации в точках $x_1' = b$ слоя взаимодействия.

Подставляя (16), (13) в (9), приходим к следующему представлению $J^{(i)}$ - интеграла:

$$J^{(i)} = \rho_0 \cdot \delta_0 \cdot \psi_к + D + A_p. \tag{17}$$

Таким образом, определена инвариантная характеристика процесса через упругую энергию, диссипацию и слагаемое, отвечающее за разупрочнение материала.

Для определения понятия поверхностной энергии выделим, согласно рис. 1, разупрочняющийся материал, ограниченный контуром $M''S''S'M'$, и запишем для него термомеханическое соотношение

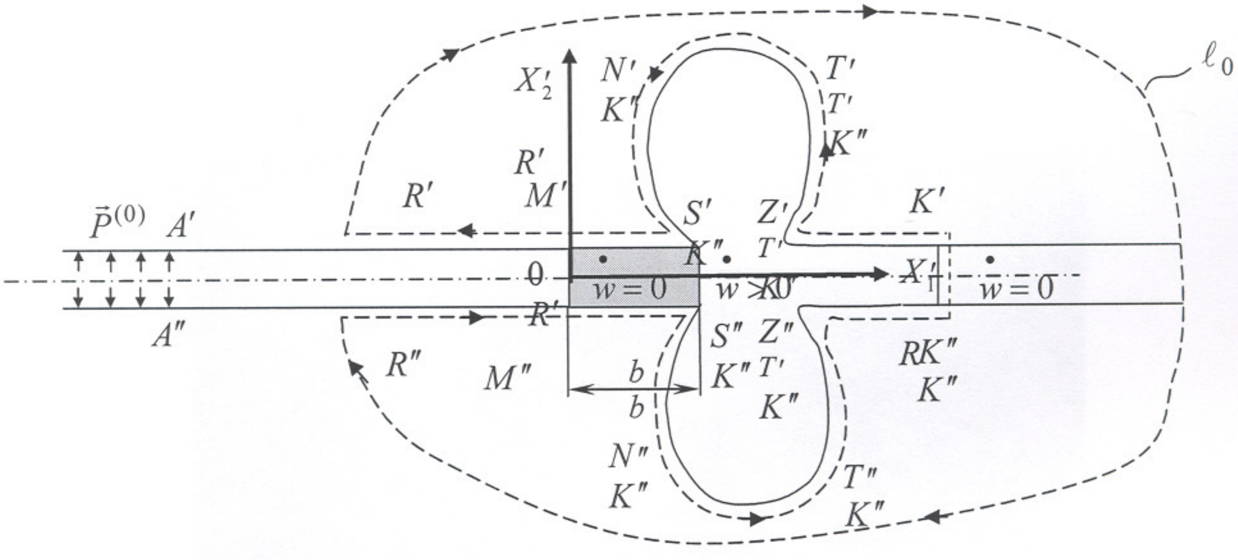

Рис. 1. Схема зон диссипации при стационарном разделении

$$\dot{\psi}_b = -\oint \vec{q}_0 \cdot \vec{\mathrm{v}}\, d\ell_0, \tag{18}$$

где ψ_b - свободная энергия разупрочняющегося материала.

Контурный интеграл представим в виде

$$-\oint \vec{q}_0 \cdot \vec{\mathrm{v}}\, d\ell_0 = a\oint \vec{q}_0 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \mathrm{x}_1'}\, d\ell_0 . \tag{19}$$

Представим скорость свободной энергии разупрочняющегося материала в следующем виде:

$$\dot{\psi}_b = \frac{d\psi_b}{dt} = aA_p . \tag{20}$$

Рассмотрим структуру изменения свободной энергии разупрочняющегося материала с учетом прекращения взаимодействия в момент $t + \Delta t$ между границами слоя взаимодействия на отрезке $a \cdot \Delta t$. Положим, что часть свободной энергии, распределенной в момент $t + \Delta t$ на отрезке $a \cdot \Delta t$, полностью переходит в поверхностную энергию, аккумулируемую в приповерхностных микрослоях поверхности разделения. Тогда в момент $t + \Delta t$ энергия разупрочняющегося участка будет состоять из поверхностной энергии, распределенной по поверхностным слоям $a \cdot \Delta t$, и энергии разупрочняющегося материала на длине $b - a \cdot \Delta t$:

$$\psi_b(t+\Delta t) = \delta_0 \int_0^b \psi(t+\Delta t, \mathrm{x}_1')\rho_0\, d\mathrm{x}_1' = \delta_0 \int_0^{a\Delta t} \psi(t+\Delta t, \mathrm{x}_1')\rho_0\, d\mathrm{x}_1' +$$
$$+ \delta_0 \int_{a\cdot\Delta t}^{b} \psi(t+\Delta t, \mathrm{x}_1')\rho_0\, d\mathrm{x}_1' = 2\gamma a \cdot \Delta t + \delta_0 \int_{a\cdot\Delta t}^{b} \psi(t+\Delta t, \mathrm{x}_1')\rho_0\, d\mathrm{x}_1'. \tag{21}$$

Первое слагаемое в правой части (21) отождествляем с удельной поверхностной энергией γ , отнесенной к единице образуемой площади. В силу стационарности процесса для второго слагаемого в правой части (21) должно выполняться условие

$$\int_{a\cdot\Delta t}^{b} \psi(t+\Delta t, \mathrm{x}_1')\rho_0\, d\mathrm{x}_1' = \int_0^{b-a\cdot\Delta t} \psi(t, \mathrm{x}_1')\rho_0\, d\mathrm{x}_1' . \tag{22}$$

Используя (21), (22), находим изменение свободной энергии за время Δt для разупрочняющегося материала:

$$\Delta\psi_b = \psi_b(t+\Delta t) - \psi_b(t) = a \cdot \Delta t \cdot 2\gamma + \int_0^{b-a\cdot\Delta t} \psi(t, \mathrm{x}_1')\rho_0\, d\mathrm{x}_1' -$$
$$- \int_0^{b} \psi(t, \mathrm{x}_1')\rho_0\, d\mathrm{x}_1' = a \cdot \Delta t \cdot 2\gamma + \delta_0 \cdot \int_b^{b-a\cdot\Delta t} \psi(t, \mathrm{x}_1')\rho_0\, d\mathrm{x}_1'. \tag{23}$$

Из (23) с учетом $\psi_k = \psi(t,b)$ следует, что скорость свободной энергии разупрочняющегося материала связана с поверхностной энергией следующим выражением:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\psi_b}{\Delta t}=\frac{d\psi_b}{dt}=a(2\gamma-\delta_0\rho_0\psi_k)\,. \quad (24)$$

Из (24) и(20) следует определение поверхностной энергии:

$$\gamma=\frac{\delta_0}{2}\rho_0\cdot\psi_\kappa+\frac{A_p}{2}\,. \quad (25)$$

Отметим, что полученное определение поверхностной энергии (25) универсально в том смысле, что оно не зависит от распределения областей обратимого и необратимого деформирования вне слоя взаимодействия. Первое слагаемое в правой части (25) определяет критическую энергию обратимых деформаций на единицу длины - $\rho_0\cdot\psi_\kappa$, второе - работу на стадии неустойчивого деформирования A_p.

С учетом (25) интеграл (17) можно представить через свободную энергию в виде

$$J^{(i)}=2\gamma+D\,. \quad (26)$$

В случае хрупких и квазихрупких материалов энергия образования новых поверхностей для плоской деформации определяется по формуле [4]

$$2\gamma=(1-\nu^2)\frac{K_c^2}{E}\,, \quad (27)$$

где K_c - универсальная постоянная материала – вязкость разрушения.

Несмотря на то, что формула (27) строго справедлива лишь для материалов упруго-деформируемых вплоть до разрушения, ее используют для квазихрупких материалов в соответствии с концепцией Ирвина-Орована [6, 7]. На основании такого подхода из сравнения (27) и (25) получим

$$(1-\nu^2)\frac{K_c^2}{E}=\delta_0\rho_0\cdot\psi_\kappa+A_p\,. \quad (28)$$

Из выражения (28) можно оценить толщину слоя взаимодействия на основании полной диаграммы деформирования и, зная распределение энергии диссипации, вычислить J - интеграл по (26). Основываясь на результатах работы [8], приведем параметры полной диаграммы деформирования для сталей: σ_k - истинное напряжение начала разупрочнения, E - модуль Юнга, ψ_c - относительное сужение, ε_κ - соответствующая σ_k деформация, K_w - коэффициент трещиностойкости пластичных материалов [9] как отношение работы на стадии разупрочнения A_p к запасенной упругой энергии $\delta_0\rho_0\psi_\kappa$.

Для удельной энергии упругой деформации начала неустойчивого деформирования

$$\delta_0\cdot\rho_0\cdot\psi_\kappa=0.5\sigma_k\varepsilon_y\delta_0=\frac{{\sigma_k}^2(1-\psi_c)\delta_0}{2E}=\frac{A_p}{K_w}\,. \quad (29)$$

Из (28) и (29) получаем следующую оценку толщины слоя взаимодействия:

$$\delta_0=(1-\nu^2)\frac{2K_c^2}{(1+K_w)(1-\psi_c){\sigma_k}^2}\,. \quad (30)$$

В частности, для стали Ст.3, следуя [7], имеем: $\sigma_k=900\ МПа$, $K_c=80{,}9\ МПа\sqrt{м}$, $K_w=20$, $\psi_c=0{,}655$, что приводит к следующему значению толщины слоя: $\delta_0=2\cdot 10^{-3}\,м$.

Значение J-интеграла (26) зависит от характеристик материала, конфигурации области диссипации и закона ее распределения.

В случае идеально хрупкого разрушения (без рассмотрения пластических свойств и разупрочнения) из (26) получаем известное выражение для критического значения J-интеграла [4-7]: $J^{(i)}=2\gamma=(1-\nu^2)\frac{K_c^2}{E}$.

Рассматривая диссипацию в границах слоя взаимодействия, из (17) для случая идеально пластического [10], несжимаемого материала с учетом $\sigma_{11}\equiv 0$ получим

$$J^{(i)}=\delta_0\sigma_k\varepsilon_k+A_p\,. \quad (31)$$

Полагая ниспадающую ветвь вертикальной, из (31) получим известное выражение J-интеграла для δ_κ -модели [5]:

$$J^{(i)} = \delta_\kappa \sigma_k ,$$

где $\delta_k = \varepsilon_k \delta_0$ - критическое смещение границ слоя взаимодействия, $\sigma_2 = \sigma_k = const$ - предел текучести.

Таким образом, полученные результаты, основанные на гипотезе локализации разрушения в слое с однородным напряженно-деформируемым состоянием, не противоречат классическим результатам механики упругопластического разрушения при замене участка разупрочнения вертикальной ветвью.

Величина диссипации D, входящая в выражение (17), может зависеть как от формы тела, так и от характера распределения внешней нагрузки. Следовательно, $J^{(i)}$ - интеграл, определенный по (17), в общем случае не может быть универсальным критерием упругопластического разрушения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-96011.

Список литературы

1. Маркин А. А., Глаголев В. В. Моделирование процесса разделения материала// Проблемы механики неупругих деформаций: Сборник статей. К семидесятилетию Д. Д. Ивлева. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 190-198.

2. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Издательство МГУ, 1990. – 310 с.

3. Глаголев В. В., Маркин А. А. Исследование установившегося разделения материального слоя//Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. Том 7. Выпуск 2. 2001. С. 56-64.

4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. - 640 с.

5. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. - 504 с.

6. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. - 256 с.

7. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991. - 416 с.

8. Лебедев А. А., Чаусов Н. Г. Феноменологические основы оценки трещиностойкости материалов по параметрам спадающих участков диаграмм деформаций//Пробл. прочности. 1983. № 2. С. 6-10.

9. Лебедев А. А., Чаусов Н. Г. К оценке трещиностойкости пластичных материалов. //Пробл. прочности. 1982. № 2. С. 11-13.

10. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.- 231с.

LINEAR ANALYSIS OF MATERIAL LAYER STATIONARY SEPARATION

© 2003 V. V. Glagolev

Tula State University

Characteristics of a stationary process of directional separation have been constructed on the basis of thermomechanical analysis, their interrelation with the known destruction criteria has been established.