

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ С РЕЛАКСАЦИОННЫМ ГИСТЕРЕЗИСНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

© 2011 Ф. М. Шакиров

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва  
(национальный исследовательский университет)

Приведены результаты исследований колебательной системы с гистерезисным демпфированием и виброзащитным устройством при помощи модели Пойнтинга-Томпсона.

*Вибрация, релаксационное гистерезисное демпфирование, оптимизация.*

Исследования энергодиссипационных характеристик конструкционных и эластомерных материалов [1,2] показывают, что свойство внутреннего трения во многих из них (а в некоторых случаях и внешнего сухого трения) может быть описано с помощью вязкого демпфера, у которого коэффициент вязкого демпфирования  $d$  изменяется обратно пропорционально частоте возмущающего сигнала  $\omega$ :  $d = k/\omega$ , где  $k$  – коэффициент гистерезисного демпфирования. Демпферная сила в этом случае пропорциональна относительному перемещению, но находится в фазе с относительной скоростью через демпфер. А рассеянная за цикл колебаний энергия независима от частоты колебаний, в отличие от вязкого демпфирования, диссипированная энергия при котором линейно зависит от  $\omega$ .

Виброзащитное устройство (ВЗУ) в форме модели Пойнтинга–Томпсона (иначе – Зенера) с гистерезисным типом демпфирования может служить для описания свойств, находящихся в условиях гармонического вибровозмущения составных подвесок в виде комбинации элемента из сплошного материала (эластомерного или конструкционного) и параллельного ему упругого элемента.

Схема колебательной системы (КС) с гистерезисным демпфированием и ВЗУ в форме модели Пойнтинга-Томпсона дана на рис. 1. Допущения математической модели: масса основания значительно больше массы объекта и обе недеформируемые; объект является точечной массой, а КС имеет сосредоточенные параметры; элементы связи объекта с основанием обладают пренебрежимо

малой массой; упругий и диссипативный элементы линейны; колебания являются установившимися однонаправленными.

Движение КС описывается системами уравнений:

для кинематического возмущения (рис. 1,а) –

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_2(t) + c_1[x_2(t) - x_1(t)] + c[x_2(t) - x_3(t)] &= 0 \\ \omega c[x_2(t) - x_3(t)] &= k[\dot{x}_3(t) - \dot{x}_1(t)] \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

для силового возмущения (рис. 1,б) –

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_2(t) + c_1x_2(t) + c[x_2(t) - x_3(t)] &= F(t) \\ \omega c[x_2(t) - x_3(t)] &= k\dot{x}_3(t) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $m$  – масса защищаемого объекта;  $c$ ,  $c_1$  – соответственно релаксационная и статическая жесткости;  $x_1(t)$ ,  $\dot{x}_1(t)$  – перемещение основания и его скорость;  $x_2(t)$ ,  $\ddot{x}_2(t)$  – перемещение и ускорение объекта;  $x_3(t)$ ,  $\dot{x}_3(t)$  – перемещение связи между упругим и диссипативным элементами и ее скорость,  $F(t)$  – внешняя сила,  $t$  – время.

Из передаточных функций (ПФ) и связанных с ними частотных характеристик [3], которые можно получить на основании систем уравнений (1) и (2), рассмотрим наиболее часто используемые для оценки прочности и структурной целостности объекта основания и их связи. При кинематическом возмущении это следующие ПФ:  $W_A(s)$  – по абсолютному и  $W_R(s)$  – по относительному параметру (перемещение, скорость, ускорение); здесь  $s$  – комплексная величина, отражающая применение процедуры преобразования Лапласа. В случае силового возмущения:  $W_{II}(s)$  – по перемещению;  $W_{СК}(s)$  – по скорости;  $W_{УС}(s)$  – по ускорению.

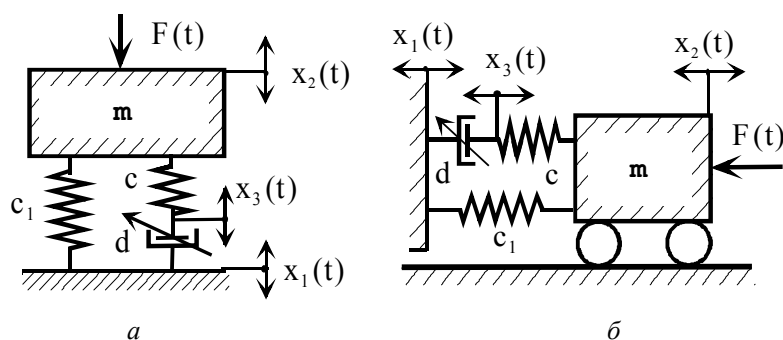


Рис. 1. Схема КС с гистерезисным демпфированием и ВЗУ в форме модели Пойнтинга-Томсона (Зенера) при различных направлениях осцилляции: а - вертикальной, б - горизонтальной

Указанные ПФ, модули и аргументы частотных ПФ приведены в табл. 1. Здесь  $\mu$  - коэффициент передачи,  $\nu$  - коэффициент динамического усиления,  $\eta = \omega/\omega_0$  - безразмерная частота возмущения,

$$A = \frac{2\bar{\xi}}{N\omega_0^3} s^3 + \frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{N+1}{N} \cdot \frac{2\bar{\xi}}{\omega_0} s + 1;$$

$$B = (1 - \eta^2)^2 + \left[ \zeta (N + 1 - \eta^2) / N \right]^2;$$

$\varphi$  - угол сдвига фаз;  $\omega_0 = (c_1/m)^{0.5}$  - собственная частота недемпфированной КС;  $N = c/c_1$  - безразмерная жесткость;  $\bar{\xi} = \zeta / 2\eta$  - частотно-зависимый безразмерный коэффициент демпфирования;  $\zeta = k/c_1$  - коэффициент потерь; индексы частотных функций соответствуют индексам ПФ. Графики АЧХ по табл. 1 представлены на рис. 2.

Выражения резонансных значений модулей частотных ПФ и соответствующих им безразмерных резонансных частот в функции коэффициента потерь  $\zeta$  и безразмерной жесткости  $N$  представлены в табл. 2. Графики указанных функций приведены на рис. 3...6.

Аналитические выражения оптимальных величин коэффициента потерь  $\zeta_{opt}$ , которые обеспечивают соблюдение условий минимаксов АЧХ, получаются подстановкой в выражение резонансной частоты  $\eta_p$  по табл. 2 частотной координаты инвариантной точки. Координата определяется из условия равенства ординат предельных резонансов АЧХ.

Выражения координат инвариантных точек и оптимальных значений коэффициента потерь как функций безразмерной жесткости представлены в табл. 3 для рассмотренных выше модулей частотных ПФ. Графическая иллюстрация указанных функций приведена на рис. 7.

Объем публикации не позволяет привести полный анализ представленного аналитического и графического материала. Поэтому ограничимся лишь формулировкой выводов на его основе.

Поведение КС с ВЗУ в форме модели Пойнтинга-Томпсона (Зенера) и гистерезисным демпфированием во многом похоже на поведение КС с вязким демпфированием и тем же видом ВЗУ, но имеет и явные отличия. Так, для рассмотренных АЧХ характерно:

1) при нулевом ( $\zeta = 0$ ) и бесконечном ( $\zeta = \infty$ ) гистерезисном демпфировании АЧХ имеют предельные положения, через точку пересечения которых - инвариантную точку - проходят линии АЧХ при конечных уровнях демпфирования ( $0 < \zeta < \infty$ ) - рис.2. Предельный резонанс при  $\zeta = 0$  локализован на недемпфированной собственной частоте  $\omega_0$ , второй (при  $\zeta = \infty$ ) - на частоте  $\omega_\infty = \omega_0(1+N)^{0.5}$ . Обе резонансные кривые по виду идентичны резонансной кривой консервативной КС;

2) с ростом уровня гистерезисного демпфирования в системе максимумы АЧХ вначале снижаются, проходят через минимум, совпадающий с инвариантной точкой и зависящий только от величины безразмерной жесткости  $N$ , а затем возрастают (рис.2...7). Безразмерные резонансные частоты при этом только возрастают (в отличие от случая вязкого демпфирования) от  $\eta_p = 1$  при  $\zeta = 0$  до  $\eta_p = (1+N)^{0.5}$  при  $\zeta = \infty$ ;

3) инвариантные точки АЧХ при гистерезисном демпфировании совпадают с инвариантными точками аналогичных АЧХ при вязком демпфировании в пределах одной и той же по структуре КС (рис. 7,а);

Таблица 1. Параметры передаточных функций

Нагружение	Передаточная функция $W(s)$	Модуль частотной ПФ (АЧХ): $\mu(\eta), \nu(\eta)$	Аргумент частотной ПФ (ФЧХ): $\varphi(\eta)$
Кинематическое	$W_A(s) = \frac{N+1 \cdot \frac{2\bar{\xi}}{\omega_0} s + 1}{A}$	$\mu_A(\eta) = \sqrt{\frac{1 + \left[\frac{\zeta(N+1)}{N}\right]^2}{B}}$	$\varphi_A(\eta) = \begin{cases} -\arctg(\zeta\eta^2/Q), & \text{при } Q \geq 0 \\ -\pi - \arctg(\zeta\eta^2/Q), & \text{при } Q < 0 \end{cases}$ где $Q = 1 - \eta^2 + \zeta^2(N+1)(N+1-\eta^2)/N^2$
	$W_R(s) = \frac{-\frac{2\bar{\xi}}{N\omega_0^3} s^3 - \frac{1}{\omega_0^2} s^2}{A}$	$\mu_R(\eta) = \sqrt{\frac{\eta^4 + \left(\frac{\zeta\eta^2}{N}\right)^2}{B}}$	$\varphi_R(\eta) = \begin{cases} -\arctg(\zeta/Q), & \text{при } Q \geq 0 \\ -\pi - \arctg(\zeta/Q), & \text{при } Q < 0, \end{cases}$ где $Q = 1 - \eta^2 + \zeta^2(N+1-\eta^2)/N^2$
Силовое	$W_{\Pi}(s) = \frac{\frac{2\bar{\xi}}{N\omega_0} s + 1}{A}$	$\nu_{\Pi}(\eta) = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\zeta}{N}\right)^2}{B}}$	$\varphi_{\Pi}(\eta) = \begin{cases} -\arctg(\zeta/Q), & \text{при } Q \geq 0 \\ -\pi - \arctg(\zeta/Q), & \text{при } Q < 0, \end{cases}$ где $Q = 1 - \eta^2 + \zeta^2(N+1-\eta^2)/N^2$
	$W_{CK}(s) = \frac{\frac{2\bar{\xi}}{N\omega_0^3} s^2 + \frac{1}{\omega_0} s}{A}$	$\nu_{CK}(\eta) = \sqrt{\frac{\eta^2 + \left(\frac{\zeta\eta}{N}\right)^2}{B}}$	$\varphi_{CK}(\eta) = -2\pi + \arctg \frac{1 - \eta^2 + \zeta(N+1-\eta^2)/N^2}{\zeta}$
	$W_{VC}(s) = \frac{\frac{2\bar{\xi}}{N\omega_0^3} s^3 + \frac{1}{\omega_0^2} s^2}{A}$	$\nu_{VC}(\eta) = \sqrt{\frac{\eta^4 + \left(\frac{\zeta\eta^2}{N}\right)^2}{B}}$	$\varphi_{VC}(\eta) = \begin{cases} -\pi - \arctg(\zeta/Q), & \text{при } Q \geq 0 \\ -2\pi - \arctg(\zeta/Q), & \text{при } Q < 0, \end{cases}$ где $Q = 1 - \eta^2 + \zeta^2(N+1-\eta^2)/N^2$

Таблица 2. Выражения резонансных значений передаточных функций

Резонансное значение модуля частотной ПФ: $\mu_p, \nu_p$	Безразмерная резонансная частота: $\eta_p$
$\mu_{Ap} = \sqrt{[N^2 + (N+1)^2\zeta^2](N^2 + \zeta^2)/N^4\zeta^2}$	$\sqrt{\frac{N^2 + (N+1)\zeta^2}{N^2 + \zeta^2}}$
$\mu_{Rp} = \sqrt{[N^2 + (N+1)^2\zeta^2](N^2 + \zeta^2)/N^4\zeta^2}$	$\sqrt{\frac{N^2 + (N+1)^2\zeta^2}{N^2 + (N+1)\zeta^2}}$
$\nu_{\Pi p} = (N^2 + \zeta^2)/N^2\zeta$	$\sqrt{\frac{N^2 + (N+1)\zeta^2}{N^2 + \zeta^2}}$
$\nu_{CKp} = \sqrt{\frac{0,5(N^2 + \zeta^2)}{[N^2 + (N+1)^2\zeta^2](N^2 + \zeta^2) - N^2 - (N+1)\zeta^2}}$	$\sqrt[4]{\frac{N^2 + (N+1)^2\zeta^2}{N^2 + \zeta^2}}$
$\nu_{VCp} = \sqrt{[N^2 + (N+1)^2\zeta^2](N^2 + \zeta^2)/N^4\zeta^2}$	$\sqrt{\frac{N^2 + (N+1)^2\zeta^2}{N^2 + (N+1)\zeta^2}}$

Таблица 3. Выражения координат инвариантных точек и оптимальных значений коэффициента потерь

АЧХ	Координаты инвариантных точек		Оптимальный коэффициент потерь $\zeta_{опт}$
	$\eta_{ин}(N)$	$W_{ин}(N)$	
$\mu_b, \nu_c$	$\sqrt{2(N+1)/(N+2)}$	$(N+2)/N$	$N/\sqrt{N+1}$
$\mu_R, \nu_{VC}$	$\sqrt{(N+2)/2}$	$(N+2)/N$	$N/\sqrt{N+1}$
$\nu_{\Pi}$	$\sqrt{(N+2)/2}$	$2/N$	$N$
$\nu_{CK}$	$\sqrt{(N+2)/2}$	$\sqrt{2(N+2)/N}$	$N\sqrt{(N+4)/(3N+4)}$

4) один из пары низко- и высокочастотных модулей всех рассмотренных частотных ПФ зависит от гистерезисного демпфирования, второй – нет (в отличие от случая

вязкого демпфирования), а темпы затухания низко- и высокочастотных колебаний равны соответствующим показателям консервативной КС (рис.2);

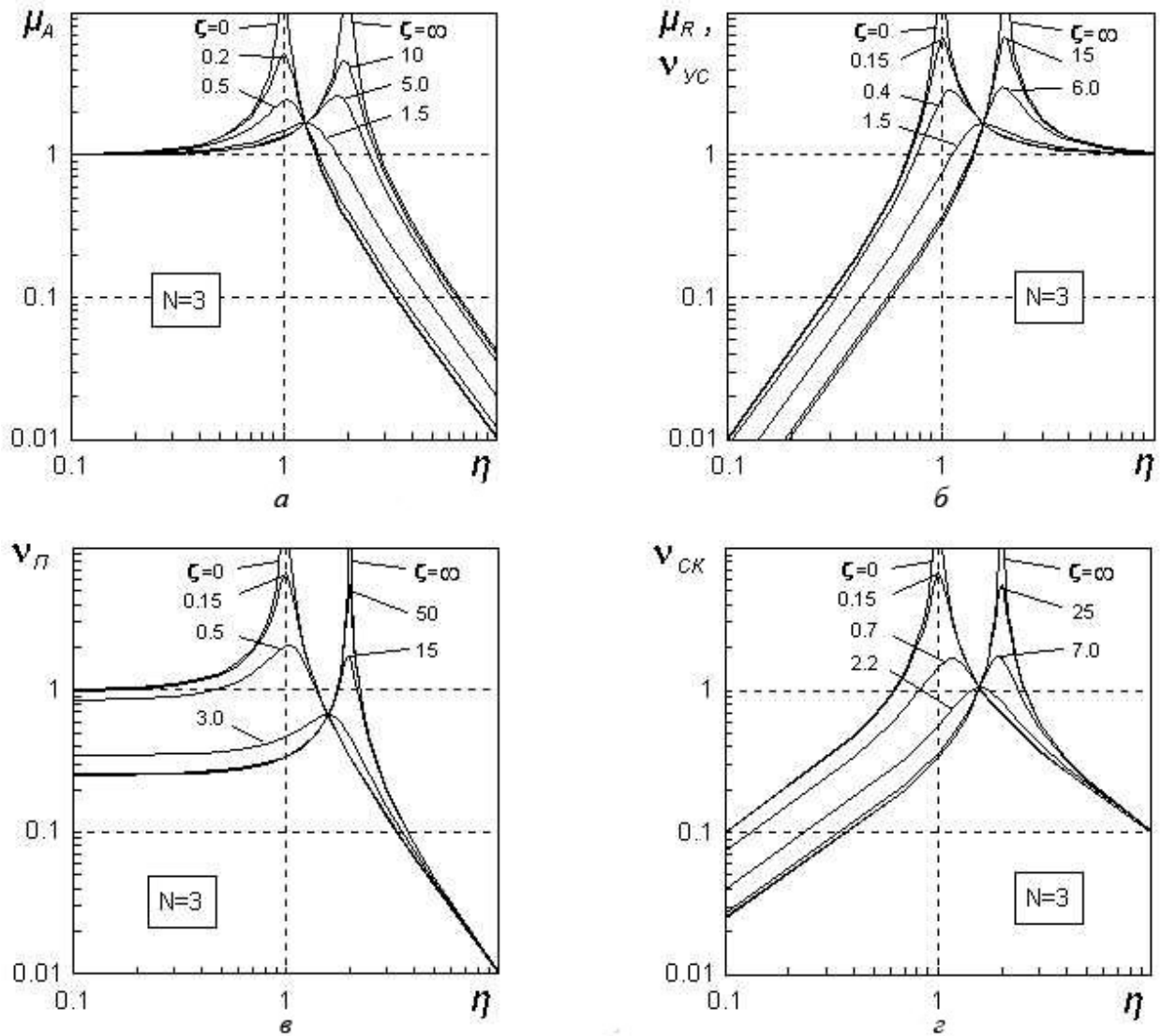


Рис.2. АЧХ по абсолютному (а) и относительному (б) параметрам (кинематическое возмущение), по перемещению (в), скорости (г) и ускорению (б) при силовом возмущении

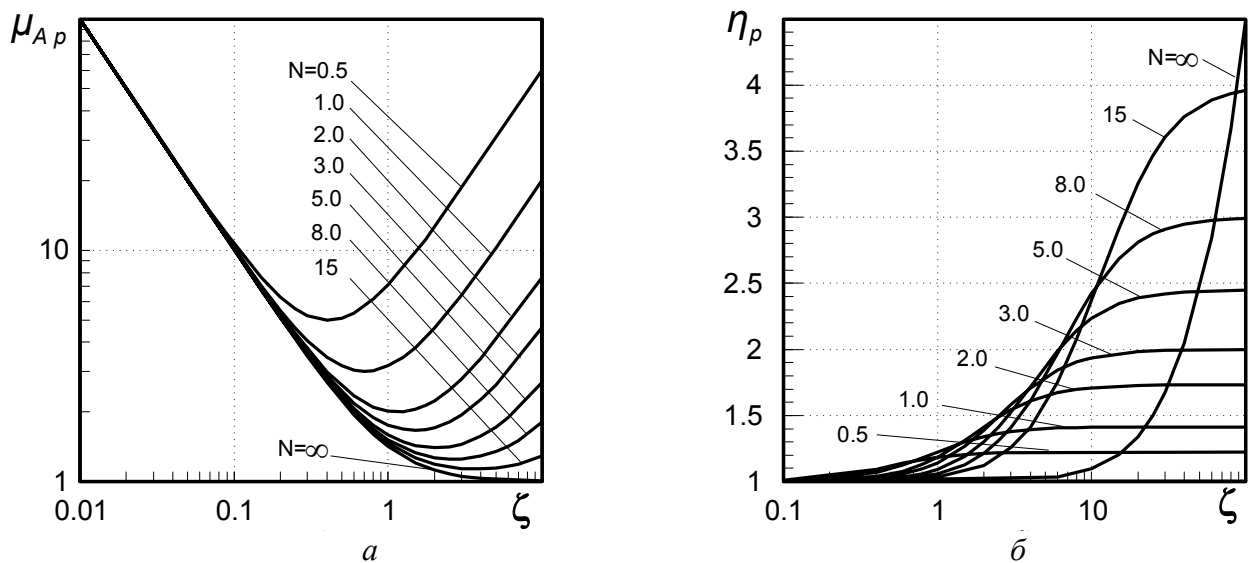


Рис.3. Резонансные характеристики по абсолютному параметру при кинематическом возмущении

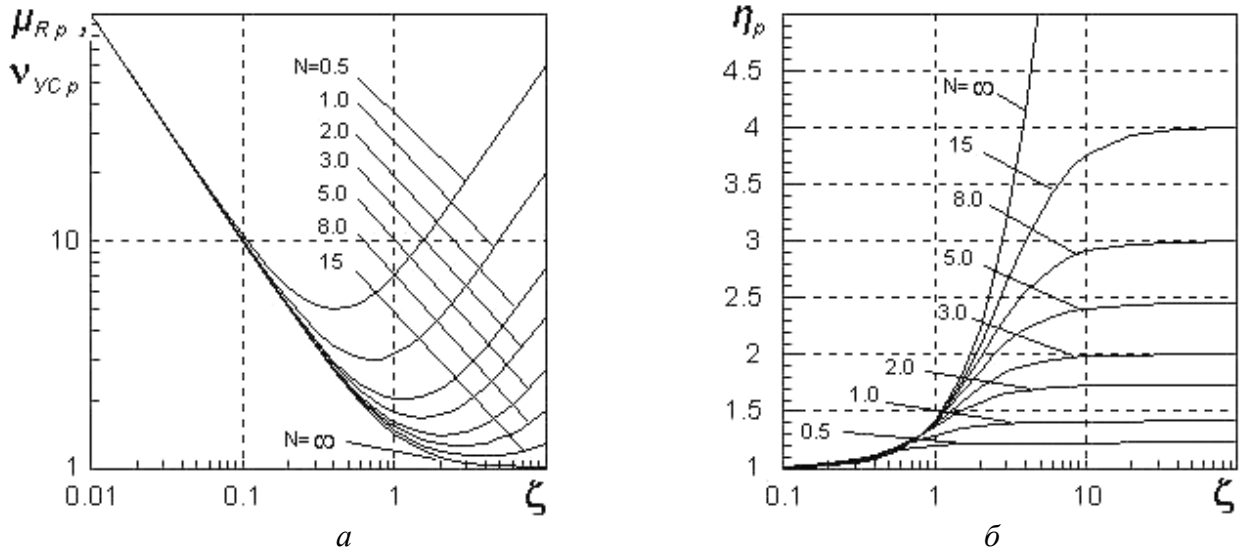


Рис.4. Резонансные характеристики по относительному параметру (кинематическое возмущение) и ускорению (силовое возмущение)

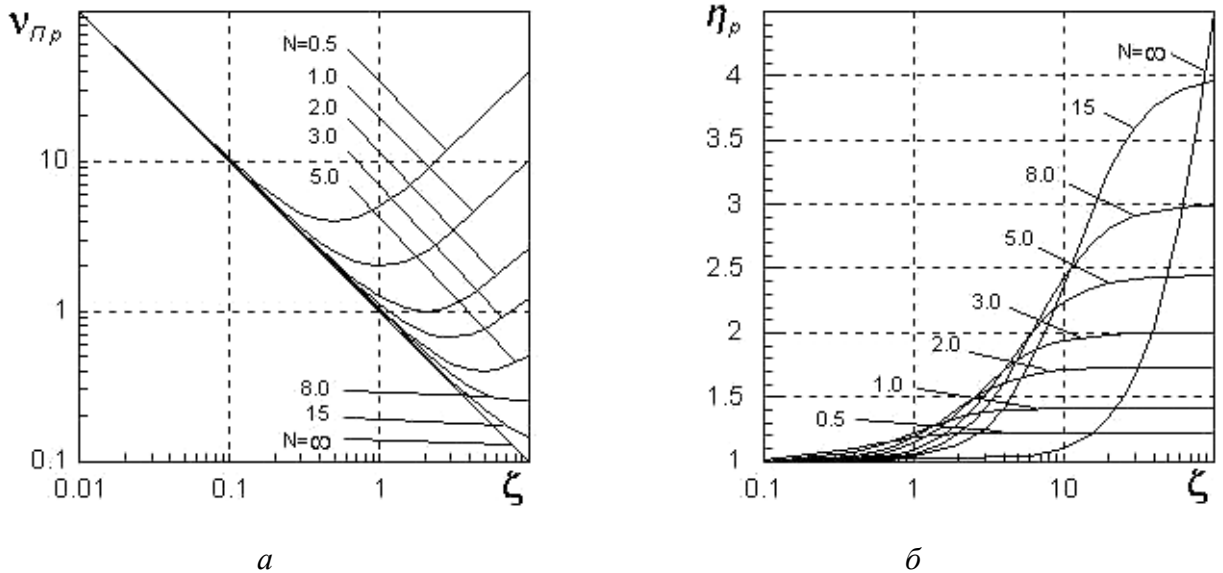


Рис.5. Резонансные характеристики по перемещению (силовое возмущение)

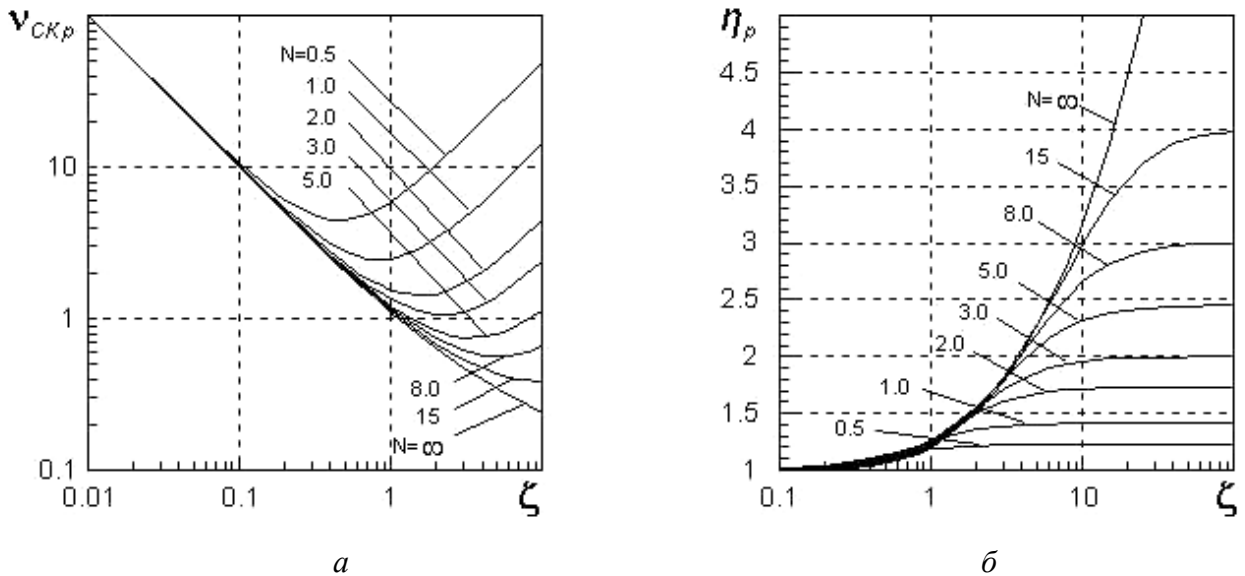


Рис.6. Резонансные характеристики по скорости (силовое возмущение)

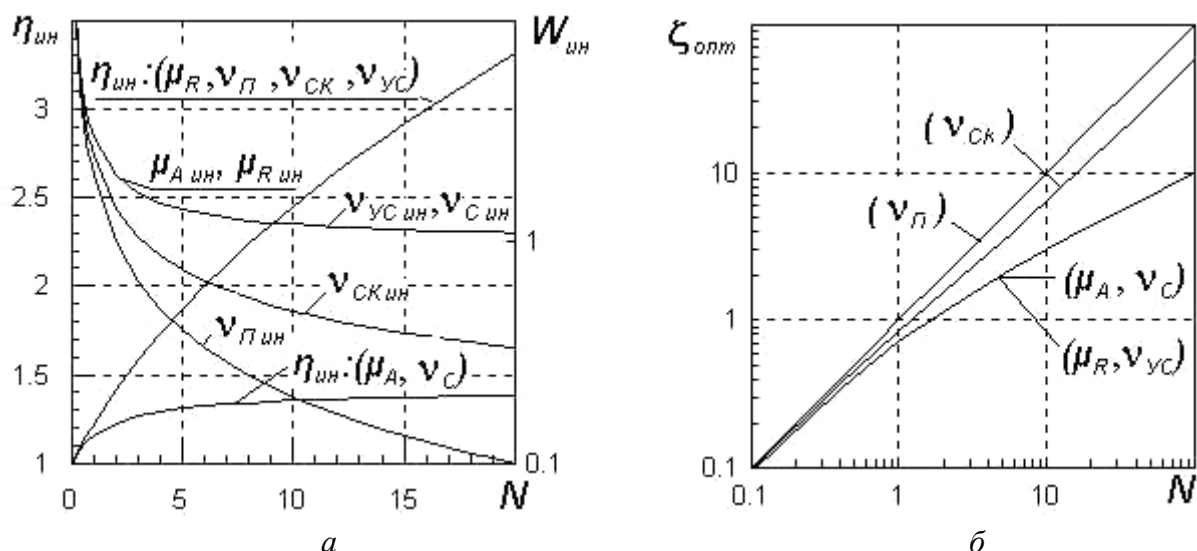


Рис.7. Координаты инвариантных точек (а) и оптимальные величины коэффициента потерь (б) в зависимости от параметра безразмерной жесткости

5) как и при вязком демпфировании, диапазоны низко- и высокочастотной виброизоляции являются функциями уровня демпфирования (параметра  $\zeta$ ) и безразмерной жесткости  $N$  (рис.2). Диапазоны виброизоляции в низкочастотной области не меньше, а в высокочастотной – не больше аналогичных диапазонов консервативной КС;

6) уровень гистерезисного демпфирования в КС можно оптимизировать при данном значении параметра  $N$  с целью достижения минимальной величины резонансного пика АЧХ – рис.3...7;

7) резонансные значения всех АЧХ мало чувствительны к изменению уровня демпфирования в окрестности оптимума ( $\zeta_{опт}$ ) – рис.3...6;

8) при малых уровнях гистерезисного демпфирования ( $\zeta < 0,2$ ) и величинах безразмерной жесткости  $N > 1,0$  резонансные значения всех рассмотренных АЧХ очень близки (рис.3...6) и в пределах 10%-ой ошибки могут быть определены из выражения:  $W_p(\zeta) \approx 1/\zeta$ ;

9) резонансные частоты функций  $\mu_R(\eta)$ ,  $\nu_{П}(\eta)$ ,  $\nu_{СК}(\eta)$ ,  $\nu_{УС}(\eta)$  очень чувствительны к малым отклонениям гистерезисного демпфирования от оптимального значения ( $\zeta_{опт}$ ), а резонансные частоты функций  $\mu_A(\eta)$  и  $\nu_C(\eta)$  - мало чувствительны (рис.3...6);

10) при малых величинах гистерезисного демпфирования ( $\zeta < 0,1$ ) резонансные

частоты всех АЧХ приблизительно равны недемпфированной собственной частоте  $\omega_0$  для всех значений параметра  $N$ ;

11) одновременное обеспечение относительной устойчивости резонансных значений АЧХ и их резонансных частот к флуктуациям гистерезисного демпфирования в окрестности оптимальной величины ( $\zeta_{опт}$ ) возможно для функций  $\mu_A(\eta)$  и  $\nu_C(\eta)$ , тогда как для функций  $\mu_R(\eta)$ ,  $\nu_{П}(\eta)$ ,  $\nu_{СК}(\eta)$ ,  $\nu_{УС}(\eta)$  – нет (рис. 3...6).

При заданном параметре  $\omega_0$ , величина которого обычно зависит от статической осадки КС, выбор значений параметров  $\zeta$  и  $N$  для рассматриваемой модели может иметь или не иметь компромиссного характера в зависимости от того, модуль какой частотной передаточной функции является при этом приоритетным.

### Библиографический список

1. Писаренко, Г.С. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов [Текст]: справочник / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – Киев: Наукова Думка, 1971. – 375 с.
2. Чегодаев, Д.Е. Демпфирование [Текст] / Д.Е. Чегодаев, Ю.К. Пономарев. – Самара: СГАУ, 1997. – 334 с.
3. Динамические свойства линейных виброзащитных систем [Текст] / отв. ред. К.В. Фролов. – М.: Наука, 1982. – 208 с.

**MODELING OF DYNAMICS OF SYSTEM  
WITH RELAXATION HYSTERETIC DAMPING**

© 2011 F. M. Shakirov

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov  
(National Research University)

The paper describes a hysteretic relaxation damping model and results of the study on its basis of dynamics of system.

*Vibration, relaxation hysteretic damping, optimization.*

**Информация об авторах**

**Шакиров Фарид Мигдетович**, кандидат технических наук, доцент, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Тел.: (846) 334-47-77. Область научных интересов: динамика виброзащитных систем с конструкционным демпфированием.

**Shakirov Farid Migdetovich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). Phone: (846) 334-47-77. Area of research: dynamic of system, Vibration, relaxation hysteretic damping.