УДК 621.486

# ГАРМОНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ЦИКЛА, РЕАЛИЗУЕМОГО В РЕГЕНЕРАТОРЕ ТЕРМОАКУСТИЧЕСКОГО ДВИГАТЕЛЯ

© 2011 Е. А. Зиновьев, А. И. Довгялло, Г. В. Воротников

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Представлена модель цикла, реализуемого газом в регенераторе термоакустического двигателя. Показано, что элементарный объем газа совершает в регенераторе термодинамический цикл, зависящий от сдвига фаз между колебаниями давления и смещения газа.

*Термоакустический двигатель, регенератор, акустическая волна, элементарный газовый объем, термодинамический цикл, критический фазовый угол.*

## Введение

Регенератор любого термоакустического двигателя можно рассматривать как некую термодинамическую “губку”, обладающую способностью поочередно поглощать и отдавать тепло рабочему газу. Если в регенераторе организовать продольное распределение температуры и возбудить в газе акустическую волну, то в нем начнут протекать определенные термодинамические процессы, которые приведут к генерации акустической мощности и усилению этой волны [1].

Данные процессы достаточно сложны, и провести их точный расчет на практике часто не представляется возможным. Поэтому предлагается рассмотреть теоретическую модель, в которой некоторые физические условия идеализированы с тем, чтобы в какой-то степени иметь возможность провести анализ рабочего процесса.

## Теоретическая модель

Пусть регенератор представляет собой множество капиллярных каналов, в которых располагается газ. Ограничимся рассмотрением процесса колебания газа в одном из них с приложенным температурным перепадом вдоль стенки. Выделим элементарный объем газа и будем полагать, что газ является идеальным и имеет полный термический контакт с поверхностью канала. В данном случае вязкостью будем пренебрегать. Данный элементарный объем под действием акустической волны будет совершать колебательные смещения. Процесс колебания элементарного объема газа в канале схематично представлен на рис. 1.

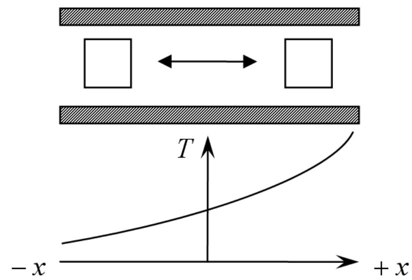


*Рис. 1. Колебание элементарного объема газа в капиллярном канале с приложенным температурным перепадом*

Будем рассматривать процесс колебания элементарного объема газа в канале относительно фиксированной точки $x = 0$. При этом будем считать, что колебания давления $p$ и скорости газа $u$ осуществляются по гармоническому закону. Смещение указанного элементарного объема газа относительно точки $x = 0$ характеризуется величиной $|\xi|$.

Величину давления и колебательной скорости определим следующим образом:

$$p = p_m + p_A \cos(\omega t), \quad (1)$$

$$u = \frac{p_A}{\rho_m a}\cos(\omega t + \theta), \quad (2)$$

где $p_m$ – среднее давление газа; $\rho_m$ – средняя плотность газа; $p_A$ – амплитуда колебания давления; $a$ – скорость звука; $\theta$ – фаза колебания скорости. Фаза колебания $\theta$ может принимать значения в диапазоне $0 < \theta < \pi/2$.

Смещение элементарного объема найдем из соотношения:

$$\xi = \int u dt = \int \frac{p_A}{\rho_m a}\cos(\omega t)dt =$$

$$= \frac{p_A}{\rho_m a\omega}\cos\left(\omega t - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) \qquad (3)$$

Из последнего выражения следует, что в акустической волне смещение элементарного объема газа отстает по фазе от колебания давления на величину $(\pi/2 - \theta)$. Схематично это представлено на рис. 2.

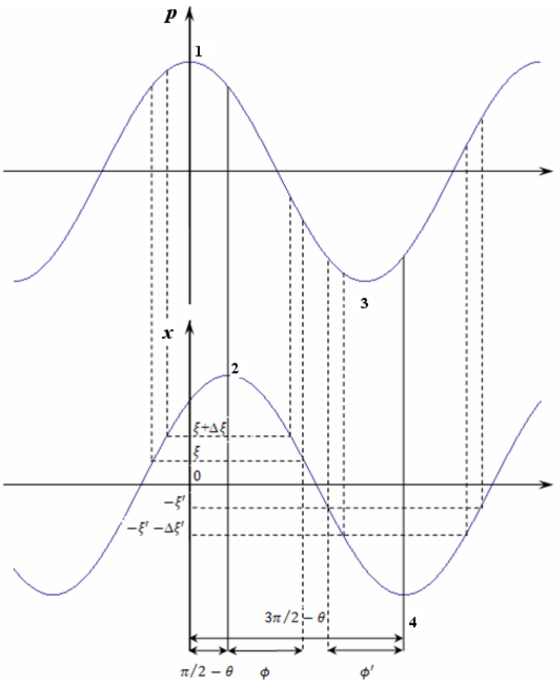


*Рис. 2. Колебание давления и смещение элементарного объема газа*

Рассмотрим ситуацию, когда величина смещения является положительной величиной ($\xi > 0$). Положительному смещению будут соответствовать фазовые углы: $(\pi/2 - \theta - \phi)$ и $(\pi/2 - \theta + \phi)$, где $0 \le \phi < \pi/2$. Рассмотрим область канала, заключенную между положениями $\xi$ и $\xi + \Delta\xi$, где $\Delta\xi > 0$. При перемещении элементарного объема из положения $\xi$ в положение $\xi + \Delta\xi$, и наоборот, происходит приращение фазы колебания на величину $\Delta\alpha$.

Если $\phi < \pi/2 - \theta$, то, как видно из рис. 2, при перемещении элементарного объема из положения $\xi$ в положение $\xi + \Delta\xi$, и наоборот, будет наблюдаться расширение. При этом газ будет поглощать тепло.

Если $\phi = \pi/2 - \theta$, то при перемещении элементарного объема газа из положения $\xi$ в положение $\xi + \Delta\xi$ теплообмена между ним и стенкой канала не происходит, так как давление в этом случае меняется незначительно и его температура практически не меняется. Однако при перемещении из положения $\xi + \Delta\xi$ в положение $\xi$ элементарный объем будет испытывать расширение с поглощением теплоты.

При $\phi > \pi/2 - \theta$ и перемещении из положения $\xi$ в положение $\xi + \Delta\xi$ газ будет сжиматься, отдавая при этом тепло стенке канала. При перемещении из положения $\xi + \Delta\xi$ в положение $\xi$ будет наблюдаться расширение газа с поглощением теплоты. Будем предполагать, что эти процессы являются изотермическими.

Количество теплоты, отдаваемое газом стенке в процессе изотермического сжатия при перемещении на расстояние $\Delta\xi$, определяется следующим образом:

$$\Delta Q_c = mRT\ln\left(\frac{p + \left(\frac{dp}{d\alpha}\right)\Delta\alpha}{p}\right), \qquad (4)$$

где $m$ – масса элементарного объема газа; $R$ – газовая постоянная; $T$ – локальная температура стенки; $\Delta\alpha = \omega\Delta t$. С учетом уравнения (1) уравнение (4) принимает вид:

$$\Delta Q_c = mRT\ln\left(1 - \frac{p_A\cos(\theta + \phi)\Delta\alpha}{p_m + p_A\sin(\theta + \phi)}\right). \quad (5)$$

Количество теплоты, получаемое газом в процессе изотермического расширения при перемещении на расстояние $\Delta\xi$, определяется следующим образом:

$$\Delta Q_e = mRT\ln\left(\frac{p}{p + \left(\frac{dp}{d\alpha}\right)\Delta\alpha}\right). \qquad (6)$$

С учетом уравнения (1) уравнение (6) принимает вид:

$$\Delta Q_e = mRT\ln\left(1-\frac{p_A\cos(\theta-\phi)\Delta\alpha}{p_m+p_A\sin(\theta-\phi)}\right)^{-1}. \quad (7)$$

Анализ выражений (5) и (7) показывает, что при любых значениях $\phi$ и $\theta$ выполняется следующее условие:

$\Delta Q_c < \Delta Q_e$.

Это означает, что при положительном смещении $(\xi > 0)$ и $\phi > \pi/2-\theta$ элементарный объем газа за цикл поглощает некоторое количество теплоты.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда величина смещения является отрицательной величиной ($\xi' < 0$). В этом случае отрицательному смещению будут соответствовать фазовые углы: $(3\pi/2-\theta-\phi')$ и $(3\pi/2-\theta+\phi')$, где $0 \le \phi' < \pi/2$. Здесь интересна область, заключенная между $-\xi'$ и $-(\xi'+\Delta\xi')$, где $\Delta\xi' > 0$. Схематично это представлено на рис. 2. При перемещении элементарного объема из положения $-\xi'$ в положение $-(\xi'+\Delta\xi')$, и наоборот, происходит приращение фазы колебания на величину $\Delta\alpha'$.

Если $\phi' < \pi/2-\theta$, то, как видно из рис. 2, при перемещении элементарного объема из положения $-\xi'$ в положение $-(\xi'+\Delta\xi')$, и наоборот, будет наблюдаться изотермическое сжатие газа. При этом газ будет отдавать тепло.

Если $\phi' = \pi/2-\theta$, то при перемещении элементарного объема газа из положения $-\xi'$ в положение $-(\xi'+\Delta\xi')$ можно предположить, что теплообмена между ним и стенкой не будет. Однако при перемещении из положения $-(\xi'+\Delta\xi')$ в положение $-\xi'$ элементарный объем будет испытывать сжатие с сообщением стенке теплоты.

При $\phi' > \pi/2-\theta$ газ расширяется по мере перемещения из положения $-\xi'$ в положение $-(\xi'+\Delta\xi')$ и сжимается по мере перемещения из $-(\xi'+\Delta\xi')$ в $-\xi'$. Примем допущение изотермичности этих процессов.

Тогда количество теплоты, получаемое газом в процессе расширения при перемещении на расстояние $\Delta\xi'$, будет определяться следующим образом:

$$\Delta Q_e' = mRT'\ln\left(\frac{p}{p+\left(\frac{dp}{d\alpha}\right)\Delta\alpha'}\right). \quad (8)$$

С учетом уравнения (1) и фазового угла $(3\pi/2-\theta-\phi')$ уравнение (8) принимает вид:

$$\Delta Q_e' = mRT'\ln\left(1+\frac{p_A\cos(\theta+\phi')\Delta\alpha}{p_m-p_A\sin(\theta+\phi')}\right)^{-1}, \quad (9)$$

где $T'$ – локальная температура стенки.

Количество теплоты, отдаваемое газом стенке в процессе сжатия при перемещении на расстояние $\Delta\xi'$, определяется следующим образом:

$$\Delta Q_c' = mRT'\ln\left(\frac{p+\left(\frac{dp}{d\alpha}\right)\Delta\alpha'}{p}\right). \quad (10)$$

С учетом уравнения (1) и фазового угла $(3\pi/2-\theta+\phi')$ уравнение (10) принимает вид:

$$\Delta Q_c' = mRT'\ln\left(1+\frac{p_A\cos(\theta-\phi')\Delta\alpha}{p_m-p_A\sin(\theta-\phi')}\right). \quad (11)$$

Анализ уравнений (9) и (11) показывает, что:

$$\begin{aligned}&\Delta Q_e' > \Delta Q_c', \text{ если } \phi' < \phi'_{кр},\\ &\Delta Q_e' = \Delta Q_c', \text{ если } \phi' = \phi'_{кр}, \qquad (12)\\ &\Delta Q_e' < \Delta Q_c', \text{ если } \phi' > \phi'_{кр},\end{aligned}$$

где $r_p = p_A/p_m$, $\phi'_{кр}$ – критический фазовый угол. Физический смысл фазового угла опишем ниже. В явном виде критический фазовый угол выглядит следующим образом:

$$\phi'_{кр} = \arccos\left(\frac{\sqrt{C}-\cos\theta}{r_p d\alpha}\right), \quad (13)$$

где

$C = \cos^2\theta + 2r_p^2\sin\theta\cos\theta d\alpha + r_p^2 d\alpha^2\sin^2\theta$.

При значениях $\theta$, близких к нулю, выражение (13) с большой степенью точности можно аппроксимировать следующим образом:

$$\phi'_{кр} = \arccos(r_p\sin\theta). \quad (14)$$

Подставляя его в уравнение (3), получим выражение для критического смещения:

$$\xi_{кр} = \frac{u_a}{\omega}\cos\left(\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) =$$
$$= -\frac{u_a}{\omega}\cos\phi' = -\frac{u_a}{\omega} r_p \sin\theta \,. \qquad (15)$$

Из последних двух уравнений видно, что критический фазовый угол $\phi'_{кр} < \theta$, а критическое смещение $\xi_{кр} < 0$.

Проведенный анализ показывает, что газ при перемещении по каналам регенератора с приложенным температурным перепадом поглощает тепло, если $\phi' < \phi'_{кр}$, отдает тепло при $\phi' > \phi'_{кр}$, и переноса тепла не происходит, когда $\phi' = \phi'_{кр}$.

С учетом вышесказанного можно заключить следующее: под действием акустической волны элементарный объем газа, перемещаясь между двумя температурными уровнями, должен осуществлять термодинамический цикл.

В начале цикла элементарный объем газа находится в положении, которому соответствует давление $p_1$ и температура $T_1$ (точка 1). Далее рассматриваемый элементарный объем под действием акустической волны смещается в точку 2. При этом его давление падает до значения $p_2$ (см. рис. 2), а температура возрастает до значения $T_2$. В точке 2 элементарный объем газа меняет направление движения на противоположное и начинает смещаться к точке 3. При этом его давление падает до значения $p_3$, а температура газа снижается до значения $T_3$. Затем он смещается к точке 4, в точке 4 температура элементарного объема принимает наименьшее значение $T_4$. Схематично изменения параметров газа представлены на рис. 3 в виде процесса в $T$-$x$ и циклограмм в $T$-$S$ и $p$-V координатах.

Общий вид представленных на рис. 3 циклограмм, в конечном счете, будет определяться соотношением фаз между колебаниями давления и смещениями газа.

Очевидно, что принятые допущения изотермичности протекающих процессов при выводе $\Delta Q_c$ и $\Delta Q_e$ предполагают модель цикла Карно. Ожидать его реализации не следует.

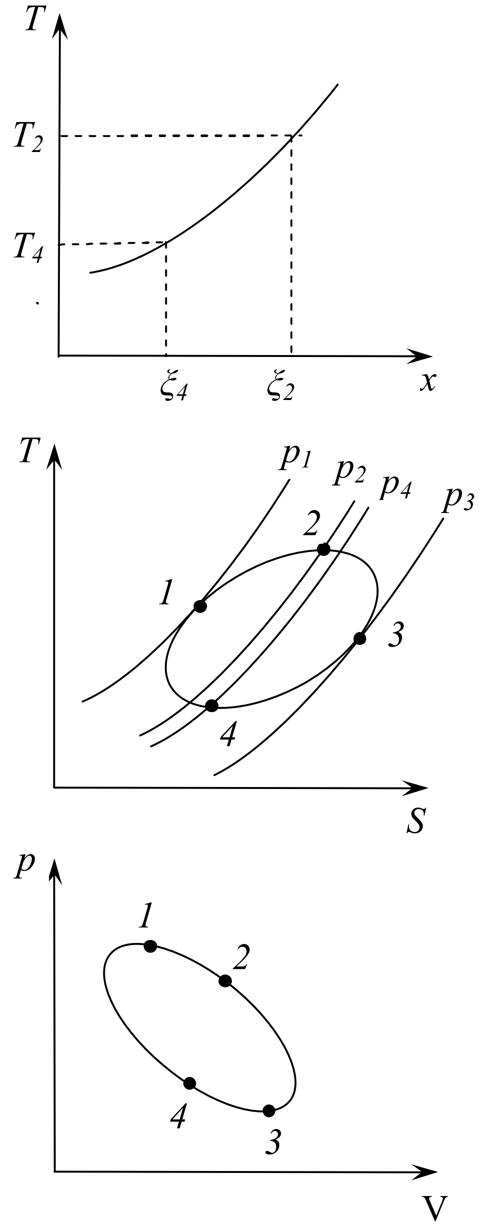


*Рис. 3. Термодинамический цикл, осуществляемый элементарным объемом газа в регенераторе термоакустического двигателя*

Однако независимо от конфигурации этого цикла разница между $\Delta Q_c$ и $\Delta Q_e$ должна быть преобразована в энергию волны, которая и переносит эту энергию к потребителю – альтернатору (линейному электрогенератору).

**Библиографический список**

1. Backhaus, S. A thermoacoustic Stirling heat engine: Detailed study [Text] / S. Backhaus, G.W. Swift - J. Acoust. Soc. Am. – 2000. – P. 3148- 3166.

# HARMONIC MODEL OF THERMODYNAMIC CYCLE IN THERMOACOUSTIC ENGINE REGENERATOR

© 2011 E. A. Zynovyev, A. I. Dovgyallo, G. V. Vorotnikov

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov
(National Research University)

The harmonic model of thermodynamic cycle in regenerator which is a key to analyze the thermodynamic processes of gas oscillating has been established in this paper. It is shown that each parcel of gas in the regenerator undergoes thermodynamic cycle which depends on phase shift between pressure and displacement oscillations of gas.

*Thermoacoustic engine, regenerator, acoustic wave, temperature gradient, thermodynamic cycle.*

## Информация об авторах

**Зиновьев Евгений Александрович,** аспирант кафедры теплотехники и тепловых двигателей, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Тел: (846) 228-50-98. E-mail: eazinovyev@gmail.com. Область научных интересов: рабочие процессы термоакустических двигателей и холодильных машин, энергоэффективные двигатели и движители транспортных средств.

**Довгялло Александр Иванович,** доктор технических наук, профессор кафедры теплотехники и тепловых двигателей, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Тел: (846) 335-18-12. E-mail: d.a.i@mail.ru. Область научных интересов: рабочие процессы тепловых и холодильных машин, бортовая энергетика, энергосбережение.

**Воротников Геннадий Викторович,** аспирант кафедры автоматизированных систем энергетических установок, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Тел: (846) 228-50-98. E-mail: vorotnikov.g.v@mail.ru. Область научных интересов: рабочие процессы термоакустических двигателей и холодильных машин.

**Zynovyev Evgeniy Aleksandrovich,** post-graduate student of department heat engineering and heat engines, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). Phone: (846) 228-50-98. E-mail: eazinovyev@gmail.com. Area of research: work processes of thermoacoustic heat engines and refrigerators, power efficient heat engines and prime movers.

**Dovgyallo Aleksandr Ivanovich,** doctor of technical science, professor of department heat engineering and heat engines, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). Phone: (846) 335-18-12. E-mail: d.a.i@mail.ru. Area of research: work processes of heat engines and refrigerators, airborne power engineering, energy saving.

**Vorotnikov Gennadiy Viktorovich,** post-graduate student of department automation technology of power devices, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). Phone: (846) 228-50-98. E-mail: vorotnikov.g.v@mail.ru. Area of research: work processes of thermoacoustic heat engines and refrigerators, power efficient heat engines and prime movers.