

УДК 532.527

## МОДИФИКАЦИЯ СХЕМЫ «ДОНОР-АКЦЕПТОР» ДЛЯ РАСЧЕТА ДИФФУЗИИ ЗАВИХРЕННОСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕТОДЕ «ВИХРЬ В ЯЧЕЙКЕ»

© 2003 В. В. Никонов, В. Г. Шахов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Предлагается модернизация схемы расщепления уравнений Навье-Стокса для численного метода «вихрь в ячейке». Модернизация заключается в введении в задачу малого параметра, пропорционального величине вязкости потока, что позволяет находить решение задачи в виде асимптотического ряда. Для тестирования предлагаемой схемы расщепления рассматривается двумерная задача о движении вихря Ламба-Озеена, имеющая аналитическое решение. Сравнение результатов, полученных методом «донор-акцептор» (Д-А) и модернизированным методом (МД-А), с аналитическим решением показало, что модернизированный метод является более предпочтительным при моделировании течений с малой вязкостью. Метод МД-А в отличие от Д-А сохраняет точность в широком диапазоне изменения шага интегрирования по времени.

### 1. Основные соотношения и алгоритм метода

В рамках метода «вихрь в ячейке» [1] уравнение Навье – Стокса для вязкого двумерного несжимаемого потока в переменных завихренность – скорость имеет вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu \nabla^2 \omega, \quad (1)$$

где  $\omega$  - завихренность,  $t$  – время,  $\nu$  - кинематическая вязкость,  $\nabla^2$  - оператор Лапласа. Здесь и далее все уравнения записаны в безразмерной форме. В численном методе «вихрь в ячейке» уравнение (1) расщепляется на подзадачи конвекции и диффузии завихренности. Ошибка такой схемы [1] имеет порядок шага по времени  $\Delta t$ . На этапе конвекции используется лагранжев подход к описанию движения жидкости:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{u}, \quad (3)$$

где  $\bar{x}$  - радиус-вектор центра «вихря в ячейке»,  $\bar{u}$  - вектор скорости рассматриваемого вихря. На диффузионном этапе решается уравнение в частных производных (ДУЧП), аналогичное уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega. \quad (4)$$

Вектор скорости  $\bar{u}$ , стоящий в правой части (3) обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), обычно представляется в виде суммы потенциальной  $\bar{u}_p$  и соленоидальной (вихревой)  $\bar{u}_s$  его составляющих. Потенциальная составляющая в данном случае равна скорости набегающего потока  $\bar{u}_p = \bar{u}_\infty$ . Соленоидальная составляющая поля скорости определяется с помощью векторного потенциала  $\psi \bar{e}_z$ , где  $\psi$  - функция тока,  $\bar{e}_z$  - единичный вектор вдоль оси  $z$ :

$$\bar{u}_s = \nabla \times (\psi \bar{e}_z). \quad (5)$$

Предварительно функция тока находится из решения уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (6)$$

с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ). Данный подход, как показано в [2, 3], позволяет существенно экономить машинное время по сравнению с непосредственным определением скорости по закону Био-Савара от всех вихревых частиц. Уравнение (6) решается с помощью подпрограммы библиотеки IMSL языка программирования Fortran 90.

Алгоритм численного метода «вихрь в ячейке» на примере одного расчетного шага имеет следующий вид:

- поле завихренности берется из начальных условий задачи или с предыдущего расчетного шага;
- расчет диффузии завихренности проводится методом «донор-акцептор» Д-А или модифицированным методом Д-А (МД-А);
- выполняется подготовка граничных условий для решения уравнения (6);
- определяется функция тока с помощью БПФ из уравнения Пуассона (6);
- рассчитывается поле скорости с помощью конечно-разностных формул;
- решается система ОДУ (3) методом Эйлера 1-го порядка для каждого «вихря в ячейке»;
- перераспределяются перемещаемые вихри в ячейки расчетной сетки;
- осуществляется переход к следующему расчетному шагу.

## 2. Подзадача конвекции

Граничные условия для уравнения (6) находятся с помощью модификации [3] метода мультипольного разложения [2]. Данный метод заключается в разбиении зоны течения на вихревые кластеры квадратной формы, что позволяет существенно экономить машинное время. При достаточном удалении рассматриваемого кластера от точки границы расчетной области вклад в функцию тока течения находится сразу от всего вихревого кластера. Достаточно удаленным расстоянием от расчетной точки до центра кластера является расстояние, в три раза большее длины ребра кластера [2].

В противном случае вклад в функцию тока вычисляется от каждого вихря рассматриваемого кластера

$$\psi_i(\bar{x}, \bar{\xi}_i) = -\frac{\Gamma_i}{2\pi} \ln|\bar{x} - \bar{\xi}_i|. \quad (7)$$

Здесь  $\bar{x}$  - координаты точки определения функции тока от вихря с интенсивностью  $\Gamma_i$ , находящегося в точке с радиус-вектором  $\bar{\xi}_i$ . Формулу (7) можно разложить в ряд Тейлора по расстоянию от рассматриваемого вихря до центра кластера [3]. Отбрасывая

члены, начиная с третьего порядка малости, и суммируя по всем вихрям данного кластера, можно получить выражение для функции тока для всего кластера. Данной точности аппроксимации вполне достаточно [3, 4].

Для удобства численного моделирования двумерной задачи используется «шахматная» расчетная сетка. Вихри располагаются в центре ячеек сетки, а значения функции тока определяются в узлах этой же сетки. Соленоидальная составляющая скорости «вихря в ячейке» находится из (5) с помощью конечно-разностных формул центральной схемы.

После расчета поля скоростей течения новые координаты «вихрей в ячейках» получаются численным интегрированием системы ОДУ (3) методом Эйлера. Новое местоположение вихрей не обязательно совпадет с координатами расчетной сетки, поэтому используется процедура перераспределения их интенсивности в ячейки сетки

$$\Gamma_{(i,j)} = \Gamma^*(x_k, y_l) \Lambda(x_i - x_k) \Lambda(y_j - y_l), \quad (8)$$

где  $\Lambda$  - интерполяционная функция;  $\Gamma^*$  - интенсивность перераспределяемого вихря, находящегося в произвольной точке с координатами  $(x_k, y_l)$ ;  $\Gamma_{(i,j)}$  - циркуляция, получаемая вихрем в ячейке  $(i, j)$  от перераспределяемого вихря. Регулярность поля завихренности необходима для подшага диффузии и расчета скорости с использованием быстрого преобразования Фурье. При этом количество вихревых частиц не растет с течением времени, как в бессеточном методе. В работах [5], [6], [7] дается обзор различных интерполяционных формул, применяемых в вихревых методах. В качестве интерполяционных функций  $\Lambda$  используются В-сплайны различных степеней. Ошибка такой интерполяции уменьшается с ростом степени используемого полинома. В данной работе используется так называемая формула  $M4'$  [6], которая является формулой третьего порядка:

$$\Lambda_3^{M4'}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{5}{2}x^{*2} + \frac{3}{2}x^{*3}, & 0 \leq x^* < 1 \\ (1-x^*)(2-x^*)^2/2, & 1 \leq x^* < 2, \\ 0, & x^* \geq 2 \end{cases} \quad (9)$$

где  $x^* = |x|/h$ . В работах [5], [6], [7] было показано, что схемы Эверетта и M4' имеют наименьшую «численную диффузию» и сохраняют моменты завихренности. Формула (9) вносит наименьшую «численную диффузию» в численный метод [6], [7], и по этой причине она используется.

Для проверки алгоритма подшага конвекции рассматривается задача о диффузии двумерного вихря Ламба-Озеена, которая для вихревого поля имеет аналитическое решение:

$$\omega_{ex}(\bar{x}, t) = \Gamma_0 \frac{\exp\left[-r^2/(4\nu\tau)\right]}{4\pi\nu\tau}, \quad \tau = t + \frac{\beta^2}{4\nu}. \quad (10)$$

Здесь  $r = |\bar{x} - \bar{x}_c|$ ,  $\Gamma_0$  – интенсивность вихря,  $\bar{x}_c$  – радиус-вектор центра и  $\beta$  – «радиус ядра» вихря Ламба-Озеена.

При моделировании процесса чистой конвекции вихрь Ламба-Озеена превращается в экспоненциальный вихрь с распределением завихренности, получаемым из (10) при  $t = 0$ . При этом его центр за время  $t = 2,0$  переместится в направлении вектора скорости набегающего потока  $u_\infty = 1,0$  на расстояние

$\bar{u}_\infty t = 2,0$ . Распределение завихренности внутри такого вихря при перемещении в системе координат, связанной с его центром, не меняется.

В качестве критерия точности численного решения задачи используется средняя относительная погрешность завихренности в ядре экспоненциального вихря

$$\delta_\beta = \frac{1}{m_\beta} \sum_p^{r_p \leq \beta} \left| \frac{\omega(\bar{x}_p, t) - \omega_{ex}(\bar{x}_p, t)}{\omega_{ex}(\bar{x}_p, t)} \right|, \quad (11)$$

где  $m_\beta$  – число «вихрей в ячейке», попавших в ядро вихря Ламба-Озеена.

Результаты численных экспериментов, представленные на рис. 1, позволяют отметить особенности работы применяемого метода. Ошибка этапа конвекции складывается из двух частей: ошибки метода численного интегрирования системы (3) и ошибки от перераспределения интенсивности вихрей в ячейки сетки (8). Рассмотрим случай поступательного (без вращения) перемещения вихря ( $\Gamma_0 = 1,0$ ,  $\beta = 0,1$ ) за один расчетный шаг  $\Delta t = 2,0$  сразу в конечную точку. В результате получается погрешность  $\delta_\beta = \delta_\beta^{M4'} = 4,6 \cdot 10^{-6}$  (сетка  $400 \times 200$ ) и  $\delta_\beta^{M4'} = 9,1 \cdot 10^{-7}$  (сетка

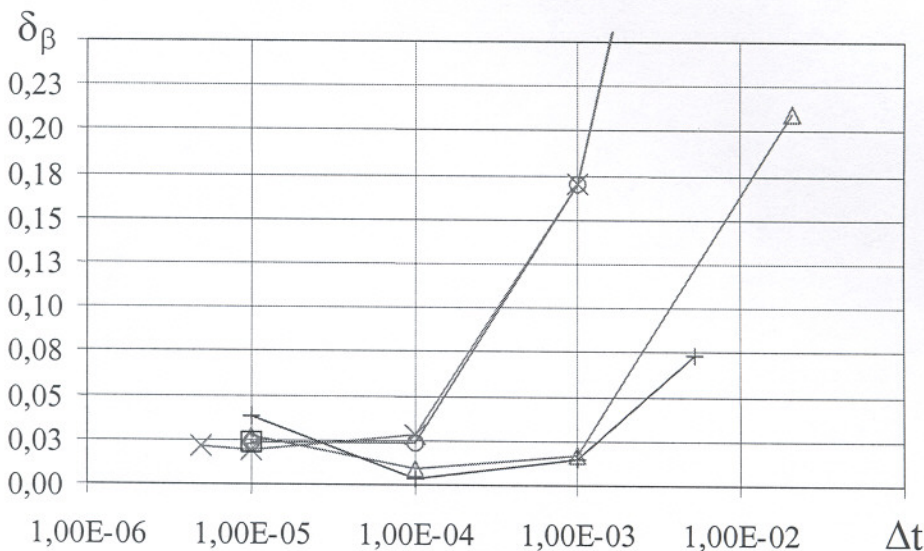


Рис. 1. Изменение погрешности решения на этапе конвекции от шага по времени

Расчетная область  $4 \times 2$ , конечное время  $t = 2,0$ ,  $u_\infty = 1,0$ :

□ – сетка  $400 \times 200$  при  $\Gamma_0 = 3,0$ ,  $\beta = 0,2$ ;

× – сетка  $400 \times 200$  и ○ – сетка  $800 \times 400$  при  $\Gamma_0 = 1,0$ ,  $\beta = 0,1$ ;

△ – сетка  $400 \times 200$  и + – сетка  $800 \times 400$  при  $\Gamma_0 = 1,0$ ,  $\beta = 0,2$

200×100). При измельчении шага по времени  $\Delta t$  погрешность растет пропорционально количеству сделанных шагов. В случае моделирования движения вортонa с учетом его вращения приходится сильно измельчать временной шаг, чтобы уменьшить численную диффузию. Из рис. 1 видно, что существует значение шага по времени  $\Delta t_1^{opt}$ , при котором погрешность этапа конвекции метода «вихрь в ячейке» на конечном интервале времени будет минимальна. Величина  $\Delta t_1^{opt}$  несколько уменьшается при увеличении разницы между максимальными и минимальными значениями завихренности вихревого поля (рис. 1). Так для вортонa  $\Gamma_0 = 1,0$ ,  $\beta = 0,2$  оптимальный шаг  $\Delta t_1^{opt} \approx 10^{-4}$ , а для  $\Gamma_0 = 1,0$ ,  $\beta = 0,1$  оптимальный шаг  $\Delta t_1^{opt} \approx 5 \cdot 10^{-5}$ . Для случая  $\Gamma_0 = 1,0$ ,  $\beta = 0,2$  при  $\Delta t = 10^{-3}$  и  $\Delta t = 10^{-5}$  получается одинаковый порядок ошибки (рис. 1), хотя время расчета увеличивается в 100 раз. По этой причине на этапе конвекции уменьшение шага по времени дальше величины  $\Delta t_1^{opt}$  является нецелесообразным.

### 3. Подзадача диффузии

#### 3.1. Схема метода «донор-акцептор» в двумерной постановке задачи

На диффузионном подшаге метода «вихрь в ячейке» для решения ДУЧП (4) применяется метод «донор-акцептор» [1, 5]. Для удобства вместо завихренности «вихря в ячейке»  $\omega_p$  в вихревых методах используют интенсивность вихря (циркуляцию)  $\Gamma_p(t, \bar{x}) = h^2 \omega_p(t, \bar{x})$ . Здесь применяется сквозная нумерация вихрей и индексу  $p$  вихря соответствует пара индексов  $(i, j)$  для хранения его интенсивности в двумерной матрице. Математическая формулировка метода «донор-акцептор» [5] имеет следующий вид:

$$\Gamma_p(t + \Delta t) = \Gamma_p(t) + \sum_q^{q \in M_p} \left( \Gamma_q(t) G_{pq}^*(x) \times \right. \\ \left. \times G_{pq}^*(y) - \Gamma_p(t) G_{qp}^*(x) G_{qp}^*(y) \right), \quad (12)$$

где

$$G_{pq}^*(z) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{z_p + h/2 - z_q}{\sqrt{4\nu\Delta t}} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{erf} \left( \frac{z_p - h/2 - z_q}{\sqrt{4\nu\Delta t}} \right) \right]. \quad (13)$$

Здесь  $z - x_p$  или  $y_p$  - координаты центра ячейки вихря  $p$ ,  $\operatorname{erf}(z)$  - интеграл вероятности. Вследствие характера функции распределения Гаусса суммирование в (12) ведется в некоторой окрестности  $M_p$  ячейки  $p$  [4], которая далее будет называться «диффузионной молекулой». «Диффузионная молекула»  $M_p$  представляет собой квадрат со стороной  $(2n + 1)h$ , где  $n$  - количество соседних ячеек в одном из направлений системы координат. Коэффициенты (13) не зависят от времени и для «диффузионной молекулы» заданного размера вычисляются один раз.

Наилучшие результаты численного моделирования диффузии вихря Ламба-Озеена методом Д-А получаются [5], если шаг по времени выбирается равным

$$\Delta t = k^{opt} h^2 / \nu. \quad (14)$$

Численное моделирование задачи при  $\nu \geq 10^{-4}$  показало [5], что величина  $k^{opt}$  для оптимального процесса диффузии зависит только от размера  $n$  «диффузионной молекулы». Далее для сокращения времени вычислений используется молекула минимального размера  $n = 1$ . Величина коэффициента оптимального шага по времени находится в пределах  $0,20 \leq k^{opt} \leq 0,21$  для погрешности  $|\delta| \leq 0,02$ , полученной в конечный момент времени счета  $t = 3,75$  [5]. Здесь  $\delta$  - относительное отклонение численного решения задачи от аналитического для поля завихренности в центре вихря Ламба-Озеена (10)

$$\delta = (\omega - \omega_{ex}) / \omega_{ex}. \quad (15)$$

Для дальнейшего повышения точности необходим подбор  $k^{opt}$ .

3.2. Модернизированная схема метода «донор-акцептор» (М-ДА)

Применим метод Пуанкаре [8] к уравнению (4), рассматривая его как возмущенное уравнение соответствующего однородного уравнения, которое соответствует невязкой задаче (условие сохранения завихренности). Решение можно записать в виде

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2), \quad (16)$$

если порождающее решение  $\omega_0$  существует [8]. При этом пренебрегаем членами порядка  $O(\varepsilon^2)$  и выше. Здесь  $\omega_1$  – возмущенное решение,  $\varepsilon$  – малый параметр. Полагая для удобства

$$\varepsilon = \nu / \varepsilon_2, \quad (17)$$

подставляя (16) и расщепляя уравнение (4) по степеням  $\varepsilon$ , получим

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial t} = \varepsilon_2 \Delta \omega_0, \quad (18)$$

где  $\varepsilon_2$  – некоторая постоянная.

В течение диффузионного подшага сначала находится величина  $\omega_0$  из первого уравнения (18), которое есть не что иное, как условие сохранения завихренности (2). Вследствие этого необходимо решить только второе уравнение (18). Далее с помощью (16) определяется итоговое изменение поля завихренности, происходящее из-за процесса диффузии. Оптимальный шаг по времени для решения второго уравнения (18) выбирается аналогично (14):

$$\Delta t = k^{opt} h^2 / \varepsilon_2. \quad (19)$$

Если шаг  $\Delta t$  задается, например, схемой этапа конвекции, то величины  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon$  находятся последовательно из (19) и (17). При этом проверяется, чтобы величина  $\varepsilon$  действительно была малой. В данной работе использовалось ограничение:  $\varepsilon \leq 0,1$ .

Уравнения численной схемы метода М-ДА с учетом выражений (17) - (19) записываются в следующем виде:

$$\Gamma_p(t + \Delta t) = \Gamma_p(t) + \varepsilon \sum_q^{q \in M_p} (\Gamma_q(t) G_{pq}^*(i) \times$$

$$\times G_{pq}^*(j) - \Gamma_p(t) G_{qp}^*(i) G_{qp}^*(j)), \quad (20)$$

где

$$G_{pq}^*(i) = \frac{1}{2} \left[ \text{Erfc} \left( \frac{i_p + 0.5 - i_q}{2\sqrt{k^{opt}}} \right) - \text{Erfc} \left( \frac{i_p - 0.5 - i_q}{2\sqrt{k^{opt}}} \right) \right]. \quad (21)$$

Коэффициенты (21) зависят только от взаимного положения вихрей друг от друга, если шаг по времени выбирается в виде (19) для схемы МД-А или (14) для схемы Д-А.

3.3. Верификация схемы метода М-ДА

В качестве тестовой используется задача о диффузии двумерного вихря Ламба-Озена (10). Результаты моделирования представлены в табл. 1 и на рис. 2, 3, погрешность решения определялась по формуле (15).

Наблюдаемый рост погрешности решения при уменьшении расчетного шага  $\Delta t$  с  $10^{-3}$  до  $10^{-4}$  для случая  $\nu = 10^{-5}$  (табл. 1) объясняется:

а) возрастанием в 10 раз количества расчетных шагов, при этом ошибка на конечном интервале времени складывается из ошибок каждого шага по времени;

б) уменьшением в 10 раз (с  $2,2 \cdot 10^{-4}$  до  $2,2 \cdot 10^{-5}$ ) величины вихревой интенсивности, передаваемой ближайшему вихрю в «диффузионной молекуле». При этом изменение вихревой интенсивности на величину меньше, чем  $10^{-8}$ , не будет фиксироваться из-за ограниченности количества значащих цифр в машинном представлении числа (использовалась одинарная точность, 8 значащих цифр). При очень малых  $\Delta t$  и  $\nu$  величина передаваемой соседнему вихрю вихревой интенсивности в «диффузионной молекуле» может содержать только одну значащую цифру и даже обнуляться. Для обеспечения достаточной точности необходимо иметь запас хотя бы в три ячейки матрицы представления числа в ЭВМ. Чтобы повысить точность метода МД-А при моделировании задач диффузии с  $\nu < 10^{-5}$  и  $\Delta t < 10^{-4}$ , необходимо использовать

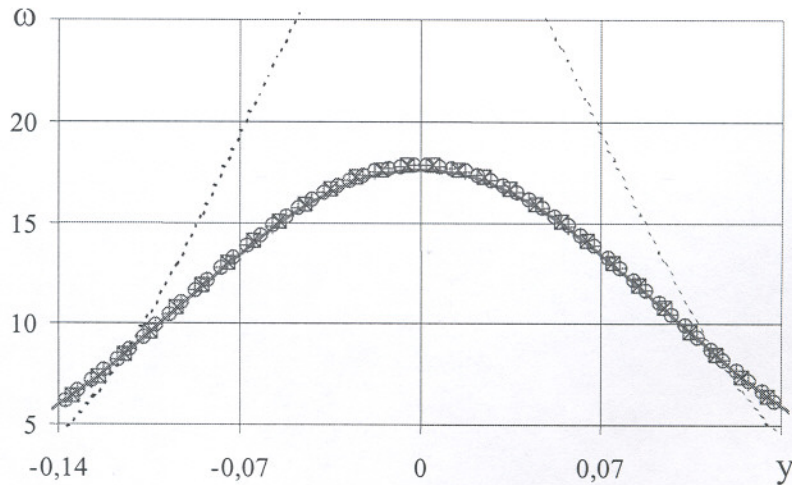


Рис. 2. Распределение завихренности при моделировании диффузии вихря Ламба-Озеена методом МД-А  
 $\Gamma_0 = 1,0, \beta = 0,1, \nu = 10^{-3}, t = 2,0, L \times H = 2 \times 2$ .

$\times$  -  $\Delta t = 10^{-3}$  и  $\square$  -  $\Delta t = 10^{-4}$  для сетки  $200 \times 200$  вихрей;  
 $+$  -  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$  и  $\circ$  -  $\Delta t = 10^{-4}$  для сетки  $400 \times 400$  вихрей;  
 штриховая линия - аналитическое решение в момент времени  $t = 0$ ,  
 сплошная линия - аналитическое решение в момент времени  $t = 2,0$

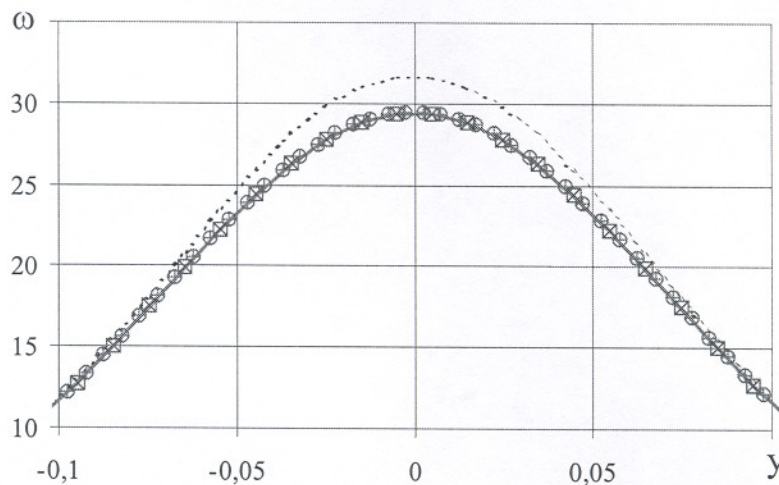


Рис. 3. Распределение завихренности при моделировании диффузии вихря Ламба-Озеена методом МД-А  
 $\Gamma_0 = 1,0, \beta = 0,1, \nu = 10^{-4}, t = 2,0, L \times H = 2 \times 2$ .

$\times$  -  $\Delta t = 10^{-3}$  и  $\square$  -  $\Delta t = 10^{-4}$  для сетки  $200 \times 200$  вихрей;  
 $+$  -  $\Delta t = 10^{-3}$  и  $\circ$  -  $\Delta t = 10^{-4}$  для сетки  $400 \times 400$  вихрей;  
 штриховая линия - аналитическое решение в момент времени  $t = 0$ ,  
 сплошная линия - аналитическое решение в момент времени  $t = 2,0$

переменные с двойной точностью (16 значащих цифр), а также более точно подобрать коэффициент  $k^{opt}$  (точности в два знака после запятой  $k^{opt} = 0,21$  может оказаться недостаточно).

Анализируя данные, представленные на рис. 1, 2, 3 и в табл. 1, можно сделать вывод,

что метод МД-А (20) позволяет получать хорошие результаты в широком диапазоне изменения размера ячейки сетки  $h$ , коэффициента кинематической вязкости  $\nu$  и шага по времени  $\Delta t$ . Метод Д-А дает аналогичные результаты только при двух значениях шага  $\Delta t$  (14), что не всегда удобно на практике [5].

Таблица 1. Влияние изменения параметров численной схемы метода МД-А на погрешность решения в задаче о диффузии вихря Ламба-Озеена

$\nu$	$h$	$\Delta t$	$\varepsilon$	$\delta$
$10^{-3}$	0,01	$10^{-3}$	$4,76 \cdot 10^{-2}$	0,0089
$10^{-3}$	0,01	$10^{-4}$	$4,76 \cdot 10^{-3}$	0,0087
$10^{-3}$	0,005	$5 \cdot 10^{-4}$	$9,52 \cdot 10^{-2}$	0,0080
$10^{-3}$	0,005	$10^{-4}$	$1,90 \cdot 10^{-2}$	0,0084
$10^{-4}$	0,01	$10^{-3}$	$4,76 \cdot 10^{-3}$	0,0013
$10^{-4}$	0,01	$10^{-4}$	$4,76 \cdot 10^{-4}$	0,0013
$10^{-4}$	0,005	$10^{-3}$	$1,90 \cdot 10^{-2}$	0,0012
$10^{-4}$	0,005	$10^{-4}$	$1,90 \cdot 10^{-3}$	0,0011
$10^{-5}$	0,01	$10^{-3}$	$4,76 \cdot 10^{-4}$	0,00014
$10^{-5}$	0,01	$10^{-4}$	$4,76 \cdot 10^{-5}$	0,00054
$10^{-5}$	0,005	$10^{-3}$	$1,90 \cdot 10^{-3}$	0,00011
$10^{-5}$	0,005	$10^{-4}$	$1,90 \cdot 10^{-4}$	0,00068

#### 4. Моделирование конвекции-диффузии вихря Ламба-Озеена

Рассмотрим применение метода «вихрь в ячейке» к задаче конвекции - диффузии вихря Ламба-Озеена (10), (11). В качестве критерия ошибки получаемого решения используется величина  $\delta_\beta$  (11).

Сравнивая численные результаты (рис. 4, 5 и табл. 2), полученные при использовании схем Д-А и МД-А в методе «вихрь в ячейке», с аналитическим решением задачи, можно сделать следующие выводы.

При уменьшении коэффициента кинематической вязкости  $\nu$  величина изменения

завихренности вследствие диффузии может становиться меньше «численной диффузии», возникающей на подшаге конвекции. Это приводит к необходимости измельчения сетки и уменьшения шага по времени численного моделирования. Как видно из представленных данных, если для численного моделирования движения вихря с  $\Gamma_0 = 1,0$ ,  $\beta = 0,1$  при  $\nu = 10^{-3}$  было достаточно сетки  $400 \times 200$  и шага  $\Delta t = 10^{-4}$ , то при  $\nu = 10^{-4}$  для достижения такого же порядка погрешности необходима сетка  $800 \times 400$  и  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ . Расчетное время задачи при этом возрастает больше, чем в 8 раз.

Таблица 2. Погрешность численного метода в зависимости от применяемых методов расчета диффузии и изменения параметров моделирования

$\nu$	$h$	Д-А		МД-А	
		$\Delta t$	$\delta_\beta$	$\Delta t$	$\delta_\beta$
$10^{-1}$	0,04	$3,36 \cdot 10^{-3}$	0,0062	$3,36 \cdot 10^{-4}$	0,0079
$10^{-2}$	0,02	$8,40 \cdot 10^{-3}$	0,036	$8,00 \cdot 10^{-4}$	0,015
$10^{-2}$	0,01	$2,10 \cdot 10^{-3}$	0,0044	$2,10 \cdot 10^{-4}$	0,017
$10^{-3}$	0,01	$2,10 \cdot 10^{-2}$	0,56	$5,00 \cdot 10^{-4}$	0,024
		$10^{-4}$	0,53	$10^{-4}$	0,0077
		-	-	$10^{-5}$	0,014
$10^{-4}$	0,01	$10^{-4}$	0,035	$10^{-4}$	0,024
$10^{-4}$	0,005	$10^{-4}$	0,034	$10^{-4}$	0,019
$10^{-4}$	0,005	$5,00 \cdot 10^{-5}$	0,045	$5,00 \cdot 10^{-5}$	0,0097
$10^{-4}$	0,0025	$10^{-4}$	0,032	$10^{-4}$	0,019
$10^{-5}$	0,005	$10^{-4}$	0,020	$10^{-4}$	0,023

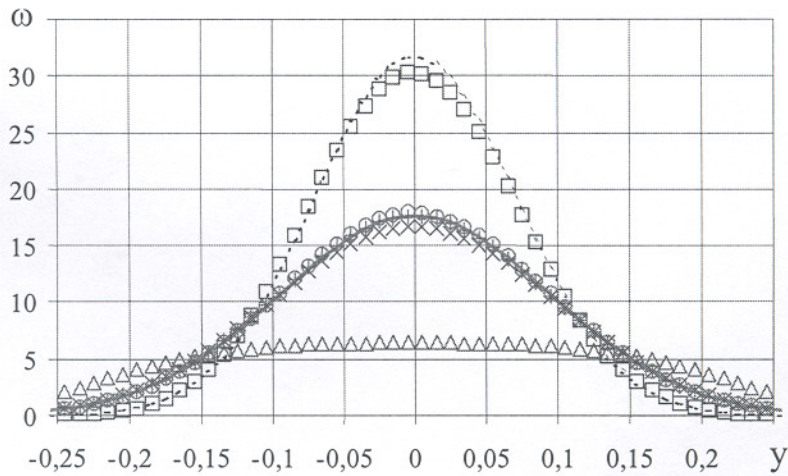


Рис. 4. Распределение завихренности при моделировании конвекции-диффузии вихря Ламба-Озеена  $\Gamma_0 = 1,0$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $\nu = 10^{-3}$ ,  $t = 2,0$ ,  $L \times H = 4 \times 2$ , сетка  $400 \times 200$  вихрей.

$\times$  - МД-А  $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-4}$ ,  $+$  - МД-А  $\Delta t = 10^{-4}$ ,  $\circ$  - МД-А  $\Delta t = 10^{-5}$ ,

$\square$  - Д-А  $\Delta t = 10^{-4}$ ,  $\triangle$  - Д-А  $\Delta t = 2,1 \cdot 10^{-2}$ ,

штриховая линия - аналитическое решение в момент времени  $t = 0$ , сплошная линия - аналитическое решение в момент времени  $t = 2,0$

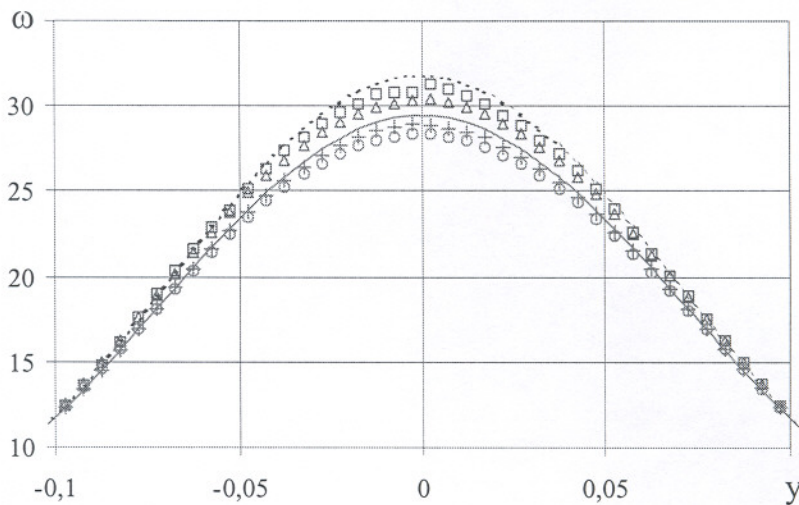


Рис. 5. Распределение завихренности при моделировании конвекции-диффузии вихря Ламба-Озеена  $\Gamma_0 = 1,0$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $\nu = 10^{-4}$ ,  $t = 2,0$ ,  $L \times H = 4 \times 2$ , сетка  $800 \times 400$  вихрей.

$\circ$  - МД-А  $\Delta t = 10^{-4}$ ,  $+$  - МД-А  $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-5}$ ,

$\triangle$  - Д-А  $\Delta t = 10^{-4}$ ,  $\square$  - Д-А  $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-5}$ ,

штриховая линия - аналитическое решение в момент времени  $t = 0$ , сплошная линия - аналитическое решение в момент времени  $t = 2,0$

При стремлении шага по времени к нулю численное решение задачи методом «вихрь в ячейке» со схемой Д-А стремится к начальным условиям задачи (10), при применении МД-А оно стремится к нестационарному решению вязкой задачи (рис. 4, 5). Численная схема метода Д-А накладывает гораз-

до более жесткое требование на расчетную сетку (14), которое сложно выполнить при малых  $\nu$ . По этой причине при значениях коэффициента кинематической вязкости  $\nu \leq 10^{-3}$  более целесообразно применение схемы МД-А на подшаге диффузии в методе «вихрь в ячейке».



Схема МД-А также сохраняет точность при величине коэффициента кинематической вязкости  $\nu = 10^{-5}$  на сетке  $800 \times 400$  с шагом  $\Delta t = 10^{-4}$  для задачи диффузии (табл. 1). При таких же данных схема Д-А теряет чувствительность, так как коэффициенты (13) пренебрежимо малы. Однако «численная диффузия» на этапе конвекции уже на порядок превышает физическую диффузию (табл. 2), что и объясняет одинаковый порядок ошибки при использовании схем Д-А и МД-А при  $\nu = 10^{-5}$ . Такая же ошибка  $\delta_\beta \approx 0,02$  получается и при отсутствии этапа диффузии для рассматриваемого случая (рис. 1). Для повышения точности метода «вихрь в ячейке» при  $\nu \leq 10^{-5}$  необходимо дальнейшее измельчение сетки или использование на этапе конвекции других численных схем, имеющих большую точность.

#### Список литературы

1. Basin M., Kornev N. Beruecksichtigung der Reibung in der Wirbelmethode, *ZAMM*, 1998, vol. 78, N 5. Pp. 335-344.
2. Greengard L., Rokhlin V. A Fast Algorithm for Particle Simulations, *J. Comput. Physics*, 1987, vol. 73. Pp. 325-348.
3. Kornev N., Leder A., Mazaev K. Comparison of Two Fast Algorithms for the Calculation of Flow Velocities Induced by a Three-Dimensional Vortex Field, *Schiffbau Forschung*, 2001, vol. 40, N 1. Pp. 47-55.
4. Taranov A., Kornev N., Leder A. Development of the Computational Vortex Method for Calculation of Two-Dimensional Ship Sections with Flow Separation, *Schiffbau Forschung*, 2000, vol. 39, N 2. Pp. 95-105.
5. Nikonov V., Kornev N., Leder A. The Ratio between Spatial and Time Resolutions for the Diffusion Substep in 2D Computational Vortex Methods, *Schiffbau Forschung*, 2002, vol. 41, N 3/4. Pp. 5-12.
6. Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. Vortex Method: Theory and Practice, Cambridge University Press, 2000. - 320 p.
7. Monaghan J.J. Extrapolating B-Splines for Interpolation, *J. Comput. Phys.*, 1985, vol. 60. Pp. 253-262.
8. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. - 400 с.

### COMPUTING VORTICITY DIFFUSION WITH A MODIFIED "DONOR-ACCEPTOR" SCHEME AND THE INTEGRATION OF THE SCHEME INTO THE "VORTEX-IN-CELL" METHOD

© 2003 V. V. Nikonov, V. G. Shakhov

Samara State Aerospace University

A modernised scheme of splitting Navier-Stokes equations for the numerical method of "vortex-in-cell" is proposed. The method consists in introducing a minor parameter proportional to kinematic viscosity into the scheme. It allows finding the solution of the problem in the form of asymptotic series. An advection-diffusion problem of the Lamb-Oseen vortex is considered for the verification of the proposed method. Computation results obtained by "donor-acceptor" (D-A) and MD-A methods are compared with an analytical solution of the advection-diffusion problem. The MD-A method is shown to be more suitable for low viscosity flow simulation. Unlike the D-A method, the MD-A method remains accurate in a wide range of space and time resolution.