

ПОВЫШЕНИЕ ЖЕСТКОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ СРЕДСТВАМИ

© 2003 В. А. Комаров

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматривается улучшение жесткостных характеристик конструкций путем добавления новых элементов. Дается теоретический анализ эвристических действий дизайнеров в таких задачах. Предлагается формализованный алгоритм поиска эффективных дополнительных элементов.

1. Введение. Проблема проектирования по жесткости

Проблема проектирования силовых конструкций для многих транспортных средств в общем виде формулируется довольно просто: конструкция должна иметь необходимую прочность и жесткость при минимуме массы. К этим требованиям часто добавляются ограничения по технологической простоте технических решений.

Однако в решении эти задачи обычно оказываются трудными. Большой сложностью в проектировании и доводках отличаются авиационные и автомобильные конструкции. При всей их кажущейся внешней разнице, с точки зрения проектирования, эти конструкции имеют много общего:

- они имеют сложные внешние формы и внутренние объемы, которые не могут быть использованы для размещения силовых элементов;

- в конструкциях практически всегда есть большие вырезы под люки, двери и остекление;

- они воспринимают широкий спектр нагрузок, которые вызывают изгибы и кручения как всей конструкции в целом, так и отдельных элементов, в самых различных сочетаниях;

- требование минимума массы является очень важным, так как оно определяет, в конечном счете, экономичность транспортного средства.

Некоторое различие в подходах к проектированию планера самолета (силовой конструкции) и кузова автомобиля состоит в том, что для автомобиля по экономическим сооб-

ражениям приемлемы достаточно простые технологические решения (использование листа постоянной толщины как для основной конструкции, так и для усиления), а в авиационных конструкциях требования минимума массы настолько высоки, что широко используются детали переменного сечения, близкие к равнопрочным.

В проектировании силовых конструкций можно выделить два характерных типа задач, решаемых последовательно.

Первый тип – выбор силовой схемы или, другими словами, решение задачи структурной (топологической) оптимизации. На этом этапе в основном выбираются типы основных силовых элементов, их расположение в пространстве и способ соединения между собой. Сформулировать эти задачи в терминах нелинейного математического программирования (НМП) трудно, так как практически невозможно предложить такое пространство проектных переменных, разным численным значениям которых соответствовали бы различные структурные решения. На практике такие задачи решаются в основном интуитивно, с использованием удачных прототипов, накопленного опыта и ряда выработанных конструкторских принципов – передача сил по кратчайшим путям, активное включение в работу одних и тех же силовых элементов в различных случаях нагружения, использование максимальных строительных высот при изгибе, использование замкнутых контуров при кручении и т. п.

В решении задач структурной оптимизации научно-обоснованными методами опделенный прогресс наметился только в

последнее время. Для этих целей разрабатываются специальные методы, которые существенно используют некоторые фундаментальные свойства упругих систем [1-4]. Определенное практическое применение эти методы нашли пока только в авиационной промышленности.

Второй тип задач – отыскание оптимального распределения материала в конструкции с уже выбранной силовой схемой – задачи параметрической оптимизации. Они легко формулируются в терминах НМП, в качестве проектных переменных могут быть выбраны толщины или площади поперечных сечений отдельных элементов. Проблемой остается только большая размерность таких задач, особенно, когда проектные переменные порождаются разбиением конструкции на конечные элементы. Эти проблемы преодолимы более удачным выбором проектных переменных в виде относительно простого закона изменения сечений группы элементов (агрегата). Весьма эффективны простые алгоритмы отыскания полнонапряженных конструкций [5-7]. Задачи параметрической оптимизации тонкостенных конструкций с ограничениями по жесткости рассмотрены в [8].

Проблема проектирования конструкций по требованиям жесткости может быть оценена как более сложная, чем проектирование по требованиям прочности. Прочность и разрушения в большинстве случаев имеют локальный характер и определяются общим уровнем напряжений в какой-то зоне и концентраторами напряжений в ней. Соответственно и меры повышения прочности обычно сводятся к местным усилениям и смягчениям концентраторов напряжений. Причем при хорошем обеспечении расчетов напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции разработка таких мероприятий, во всяком случае – направление поисков, становится относительно простым делом.

Деформации конструкции – смещение одних деталей относительно других, изменение формы контура остекления и т. п. – определяются ее жесткостью в целом и, следовательно, всеми элементами конструкции (в различной мере, конечно). И поэтому проектирование по жесткости требует понима-

ния силовой работы всей конструкции и разработки иногда очень сложных пространственных технических решений для парирования недостаточной жесткости.

В качестве примера может быть приведена классическая задача из самолетостроения [9, 10] об усилении большого выреза в цилиндрической оболочке. В зоне длинного выреза оболочка имеет открытый контур, и ее крутильная жесткость на этом участке крайне мала. Для компенсации выреза практика выработала довольно эффективное решение в виде бимсов – замкнутых контуров по продольным краям выреза и, так называемых, “ограничительных” усиленных шпангоутов по переднему и заднему краям выреза. При кручении оболочки эти дополнительные силовые элементы – бимсы и ограничительные шпангоуты – заставляют работать на сдвиг боковины оболочки и тем самым существенно повышают крутильную жесткость оболочки в зоне выреза. При этом сами дополнительные элементы работают довольно сложно. Бимсы воспринимают продольные усилия переменной величины с переменной знака по середине. Ограничительные шпангоуты нагружаются сдвигом.

Данное техническое решение найдено в авиастроении в результате длительной эволюции – предложений, проб и ошибок, доводок. Для успеха структурного решения важным оказался также и выбор вида конструкции и параметров элементов усиления: площади поперечного сечения контура бимса, его протяженности и конструкции за границами выреза, конструкции ограничительных шпангоутов, так как от этого сильно зависит концентрация напряжений в углах выреза.

Подобную по характеру, но еще более сложную по сути задачу представляет проблема уменьшения нежелательных деформаций кузова автомобиля при наезде одного колеса на неровность, которая вызывает большие перемещения или нагрузки в замках дверей и в неподвижном остеклении.

2. Чувствительность жесткости конструкции к добавлению элементов

Для того, чтобы продвинуться в понимании роли структурных и параметрических факторов в проектировании конструкций по

жесткости и наметить пути решения этой задачи, рассмотрим серию специально подготовленных примеров.

В качестве исходной конструкции возьмем раму с размерами в плане 1000x2000 мм, составленную из открытых профилей типа швеллер с размерами в поперечном сечении 100x50x2 мм. Такая конструкция имеет весьма малую жесткость при действии антисимметричной нагрузки из плоскости рамы (рис. 1). Будем определять крутильную жесткость этой конструкции как отношение узловой силы к соответствующему перемещению и рассмотрим несколько эвристических вариантов ее увеличения.

Для удобства сопоставления результатов жесткость исходной конструкции принята за единицу, во всех вариантах усиления увеличение массы конструкции составляет 10 % от исходной: $\Delta m = 0,1m_0$.

Рассматривались следующие варианты:

1. Увеличение толщины всей конструкции на 10 %, $\delta = 2,2$ мм.

2. Кницы в углах рамы – 8 шт., как показано на рис. 2. Размеры книц в плане выбраны из условия $\Delta m = 0,1m_0$ и выбора такой же толщины листа, как и основной конструкции.

3. Зашивка в средней части длинных сторон рамы (рис. 3). Выбор протяженности зашивки, как в п. 2.

4. Зашивка в средней части коротких сторон рамы (рис. 4). Выбор протяженности зашивки, как в п. 2.

5. Установка внутри рамы замкнутого коробчатого элемента – “трубы” – 100x100 мм с толщиной стенки $\delta = 0,63$ мм из условия $\Delta m = 0,1m_0$ (рис. 5).

6. Зашивка открытого профиля по всему контуру рамы листом с толщиной $\delta = 0,38$ мм из условия $\Delta m = 0,1m_0$ (рис. 6).

7. Установка диагональных стержневых элементов (4 шт.) с площадью поперечного сечения $F=27,11$ мм² из условия $\Delta m = 0,1m_0$.

8. Зашивка верхней и нижней плоскостей рамы. Толщина зашивки – из условия $\Delta m = 0,1m_0$.

Все расчеты выполнялись по МКЭ, для моделирования использовались элементы “изгибные пластинки” и стержни (в варианте 7).

Результаты расчетов жесткости рассмотренных конструкций и максимальных напряжений в них представлены в виде гистограмм на рис. 7. Здесь для наглядности введены “коэффициенты жесткости” и “коэффициенты прочности”, которые показывают соответственно, во сколько раз увеличилась жесткость модифицированной конструкции и во сколько раз уменьшились в ней максимальные напряжения по сравнению с исходной.

Как следует из этих результатов, простое увеличение толщины конструкции малоэффективно по сравнению с введением в конструкцию дополнительных элементов. В свою очередь, рассмотренные структурные варианты усиления дают большое разнообразие в результатах как по жесткости, так и по максимальным напряжениям.

Все это указывает на необходимость и возможность разработки методики эффективного улучшения жесткостных и прочностных свойств конструкций за счет изменения ее схемы (структуры).

3. Эффективные модификации конструкций

Рассмотренные примеры предложены в основном из интуитивных, эвристических соображений. За исключением первого варианта повышения жесткости конструкции путем простого увеличения толщины листа, во всех остальных вариантах делается попытка либо постановки дополнительных элементов в таких местах, где дополнительный материал будет активно включаться в общие деформации рамы (варианты 2 и 7), либо использования дополнительного материала для создания замкнутых контуров, которые, как известно из проектной практики, имеют высокую крутильную жесткость (варианты 3, 4, 5, 6), либо и то и другое одновременно (вариант 8).

В вариантах 1-6 в определенной мере сделана попытка ограничить поиск технологичными вариантами – усиления выполнены из элементов с толщиной, которая сопоста-

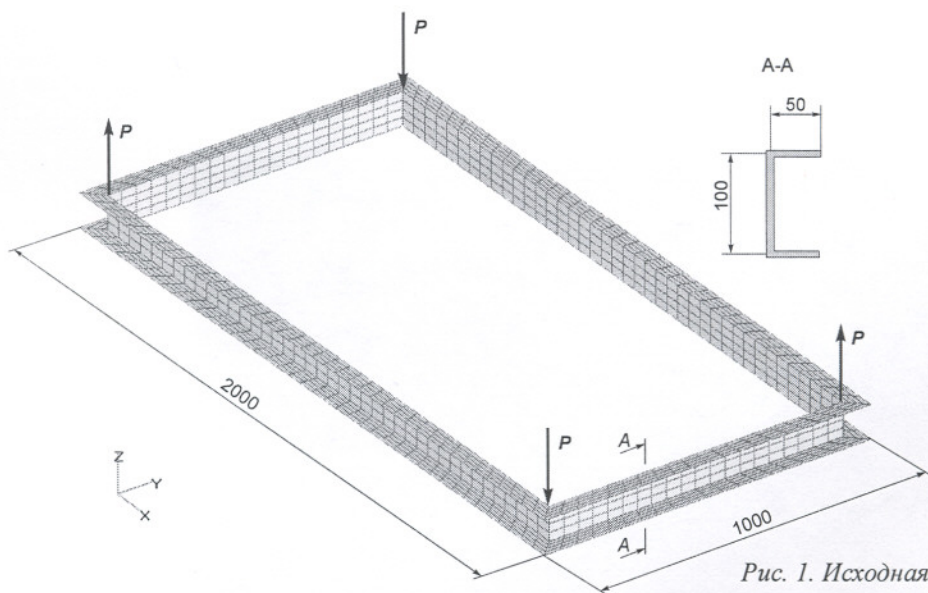


Рис. 1. Исходная конструкция рамы

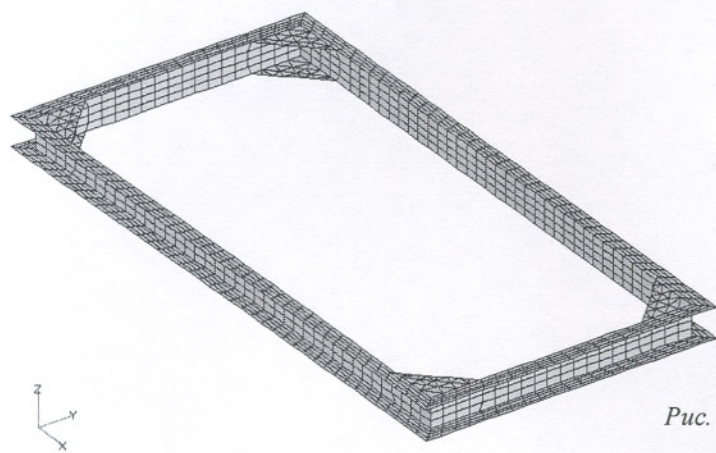


Рис. 2. Усиление кницами

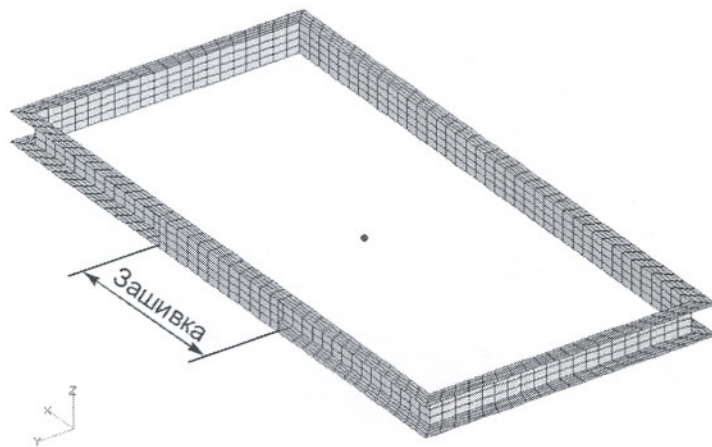


Рис. 3. Частичная зашивка длинных сторон

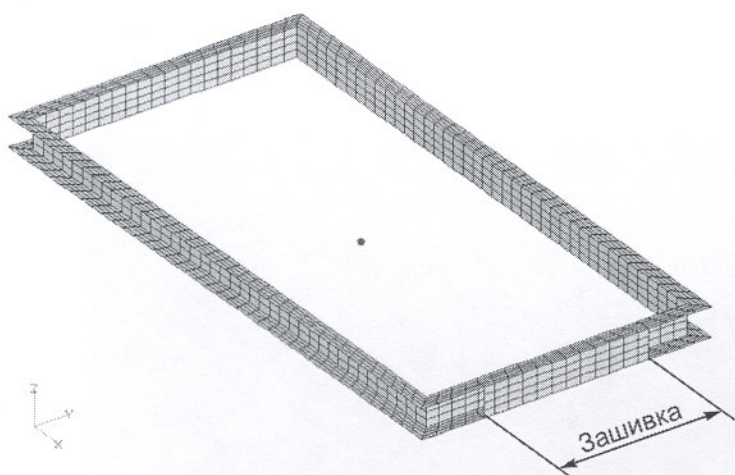


Рис. 4. Частичная зашивка коротких сторон

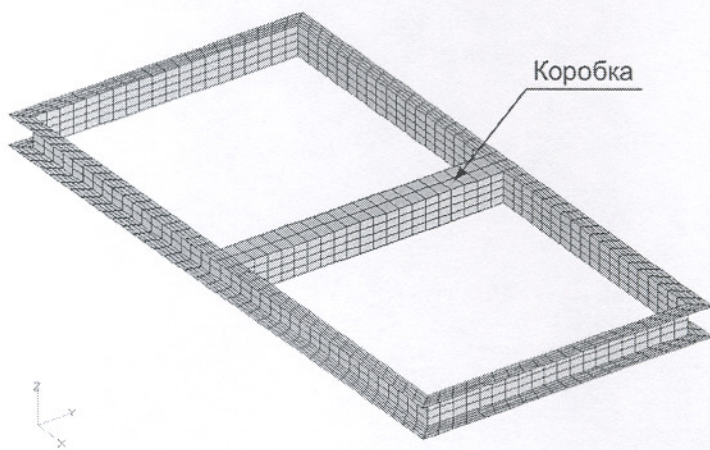


Рис. 5. Установка коробчатого элемента

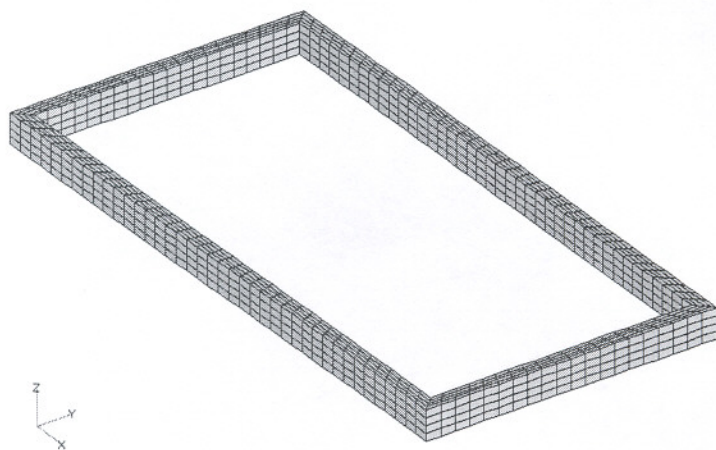


Рис. 6. Зашивка по всему контуру

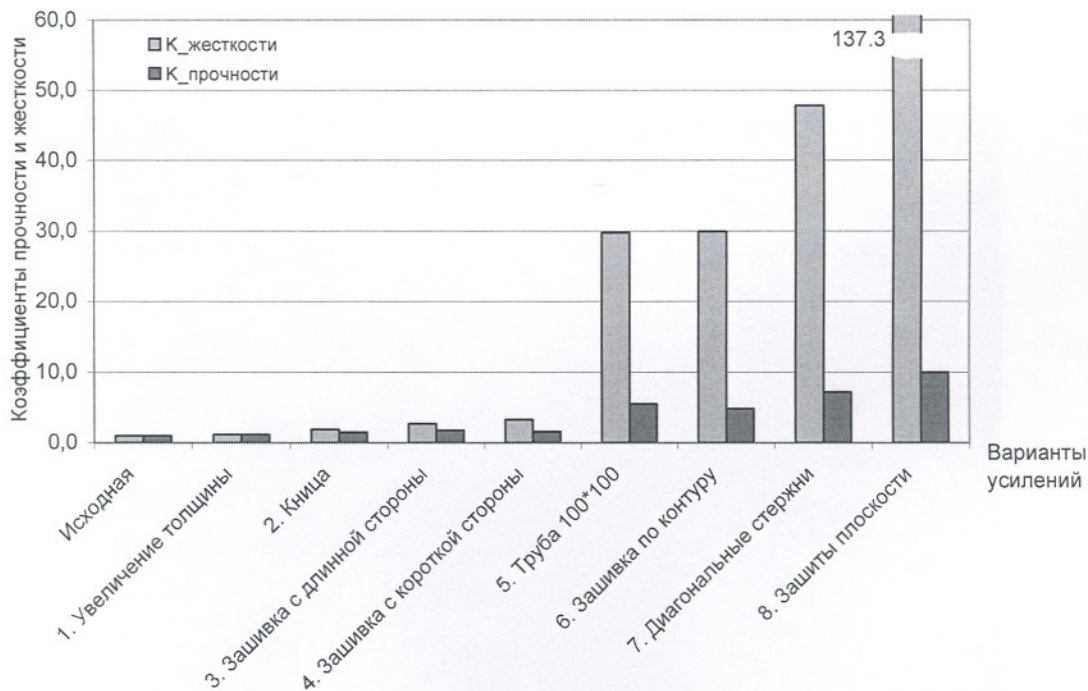


Рис. 7. Результаты расчетов коэффициентов увеличения жесткости и коэффициентов уменьшения максимальных напряжений

вима с толщиной основной конструкции, и поэтому удобны для соединения, например, сваркой.

Варианты 7 и 8 используют очень тонкие элементы, которые могут терять устойчивость, и поэтому, несмотря на свою привлекательность, представляют, в основном, академический интерес.

Понятно, что вариантами 1-8 далеко не исчерпывается множество возможных усиления, в том числе и эффективных. Представляет интерес построить методику, которая бы сузила и облегчила поиск наиболее эффективных способов повышения жесткости конструкций путем добавления в нее новых элементов.

С этой целью определим, от чего и как зависит изменение жесткости конструкции при добавлении в нее небольшого количества дополнительного материала.

В качестве меры жесткости конструкции удобно взять ее потенциальную энергию деформаций U . При действии некоторой обобщенной силы Q в конструкции возникают обобщенные перемещения q . В примере на рис. 1 в качестве обобщенной силы выступает P . Ей соответствует вертикальное пе-

ремещение угла рамы, которое определяет ее закручивание.

Работа внешних сил на соответствующем перемещении равна

$$A = \frac{1}{2} Qq = U. \quad (1)$$

Жесткость конструкции равна

$$k = \frac{Q}{q}. \quad (2)$$

Чем больше жесткость конструкции k , тем меньше перемещения q и энергия упругих деформаций U .

Запишем потенциальную энергию деформаций конструкции через внутренние усилия в ее элементах. Вначале для простоты рассмотрим ферму. Энергия i -го стержня равна

$$U_i = \frac{N_i^2 l_i}{2EF_i}, \quad (3)$$

где N_i , l_i , F_i – усилия в стержне, его длина и площадь поперечного сечения; E – модуль упругости.

Заметим, что $F_i l_i = V_i$ есть объем i -го элемента, и перепишем (3) следующим образом:

$$U_i = \frac{N_i^2 l_i^2}{2EF_i l_i} = \frac{N_i^2 l_i^2}{2EV_i} \quad (4)$$

Потенциальная энергия равна

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i^2}{2EV_i} \quad (5)$$

где n – число стержней.

Рассмотрим, что будет с энергией конструкции, если в один из стержней добавить некоторое малое количество дополнительного материала ΔV_i . Для этого вычислим част-

ную производную $\frac{\partial U}{\partial V_i}$:

$$\frac{\partial U}{\partial V_i} = -\frac{N_i^2 l_i^2}{2EV_i^2} \quad (6)$$

Представим (6) следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial V_i} = -\frac{N_i^2 l_i^2}{2EF_i^2 l_i^2} = -\frac{\sigma_i^2}{2E} \quad (7)$$

Заметим, что $\frac{\sigma_i^2}{2E}$ есть удельная потенциальная энергия, то есть энергия, накапливаемая в единице объема i -го стержня, которую далее обозначим через u_i .

Из (7) следует, что добавление малого объема ΔV материала в i -й стержень приведет к уменьшению потенциальной энергии конструкции в целом на величину

$$\Delta U \approx -u_i \Delta V_i \quad (8)$$

Причем изменение энергии системы в целом будет тем больше, чем большей удельной потенциальной энергией обладает усиливаемый стержень.

Рассмотрим тонкостенную безмоментную конструкцию, которую можно представить набором мембранных элементов. Пусть

в каждом i -ом элементе с толщиной δ_i действуют потоки усилий X_i, Y_i, T_i , которым соответствуют напряжения $\sigma_{xi}, \sigma_{yi}, \tau_i$. Удельная потенциальная энергия в плоском напряженном состоянии может быть записана через напряжения [11]:

$$u_i = \frac{1}{2E} (\sigma_{xi}^2 + \sigma_{yi}^2 - 2\mu\sigma_{xi}\sigma_{yi} + 2(1+\mu)\tau_i^2), \quad (9)$$

где μ – коэффициент Пуассона, или через потоки усилий с учетом связей типа

$$X_i = \sigma_{xi}\delta_i$$

$$u_i = \frac{1}{2E\delta_i^2} (X_i^2 + Y_i^2 - 2\mu X_i Y_i + 2(1+\mu)T_i^2). \quad (10)$$

Введем для удобства записей обозначение

$$R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 - 2\mu X_i Y_i + 2(1+\mu)T_i^2 \quad (11)$$

и назовем R_i эквивалентным потоком усилий.

Тогда потенциальную энергию деформаций элемента с площадью S_i можно записать в виде

$$U_i = u_i V_i = \frac{R_i^2}{2E\delta_i^2} \delta_i S_i = \frac{R_i^2 S_i}{2E\delta_i} = \frac{R_i^2 S_i^2}{2E\delta_i S_i} = \frac{R_i^2 S_i^2}{2EV_i} \quad (12)$$

Потенциальная энергия всей конструкции равна

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{R_i^2 S_i^2}{2EV_i} \quad (13)$$

$$\text{и } \frac{\partial U}{\partial V_i} = -\frac{R_i^2 S_i^2}{2EV_i^2}, \quad (14)$$

или с учетом (9)-(11)

$$\frac{\partial U}{\partial V_i} = -\frac{R_i^2 S_i^2}{2E\delta_i^2 S_i^2} = -\frac{R_i^2}{2E\delta_i^2} = -u_i \quad (15)$$

Таким образом, доказана следующая **теорема I:**

Частная производная потенциальной энергии упругих деформаций конструкции по

объему материала одного из ее силовых элементов равна величине удельной потенциальной энергии этого элемента со знаком минус.

Заметим, что этот вывод, сделанный в дискретной форме, полностью совпадает по смыслу с первой теоремой З. Васютинского [12].

Для некоторых дальнейших рассуждений может быть также полезна следующая запись (15) по аналогии с (7):

$$\frac{\partial U}{\partial V_i} = -\frac{\sigma_{eqi}^2}{2E}, \quad (16)$$

где σ_{eqi} - эквивалентное в энергетическом смысле напряжение в i -ом элементе.

Выводы (7) и в более общем виде (15) и (16) объясняют и оправдывают эвристическую деятельность проектантов в поисках таких мест в конструкции для усиления или установки дополнительных элементов, в которых можно ожидать работы дополнительного материала с высокими напряжениями.

“Технологию” такой умственной деятельности можно представить следующим образом. Проектант воображает деформации под нагрузкой всей конструкции в целом. (Сейчас этому воображению хорошо помогает МКЭ-моделирование). Мысленно представляет деформации и, следовательно, напряжения в отдельных элементах конструкции, в том числе и в воображаемых – дополнительных. И после этого предлагает те или иные технические решения с учетом возможности их реализации.

Ни о какой возможности полноты перебора рациональных вариантов и выборе лучшего при таком проектировании говорить, конечно, не приходится.

Попытаемся формализовать этот процесс следующим образом. Введем в рассмотрение гипотетическую трехмерную изотропную упругую среду переменной плотности ρ с определенной величиной удельного модуля упругости

$$\bar{E} = \frac{E}{\rho}. \quad (17)$$

Следовательно, модуль упругости такого материала пропорционален его плотности

$$E = \rho \bar{E} \quad (18)$$

и поэтому является переменным. Такой гипотетический материал был введен в рассмотрение, по-видимому, впервые в [13].

Теперь представим, что имеется конструкция, которая нуждается в улучшении. Будем называть ее *основной*. Присоединим к ней в технологически перспективных местах трехмерную среду переменной плотности с учетом геометрических ограничений на ее форму и расположение, то есть только в допустимой по компоновочным соображениям области автомобиля, самолета и т. п. Эту среду будем далее называть *заполнитель*. Будем считать, что в целом заполнитель имеет значительно меньшую жесткость, чем основная конструкция. Это можно обеспечить заданием величин ρ и \bar{E} . Будем также предполагать, что для моделирования заполнителя используются трехмерные конечные элементы.

Удельная потенциальная энергия изотропной упругой среды в трехмерном случае НДС записывается в виде [11]

$$u = \frac{1}{2E_i} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)), \quad (19)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные напряжения.

Введем в рассмотрение эквивалентное в энергетическом смысле напряжение

$$\sigma_{eq} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1))^{1/2} \quad (20)$$

и запишем энергию деформации i -го элемента с геометрическим объемом V_i

$$U_i = u_i V_i = \frac{\sigma_{eqi}^2}{2E_i} V_i, \quad (21)$$

и энергию всего заполнителя

$$U_z = \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_{eqi}^2}{2E_i} V_i, \quad (22)$$

где m – число элементов заполнителя.

При совместном деформировании основной конструкции и заполнителя энергия всей упругой системы будет равна

$$U = U_{осн} + U_z, \quad (23)$$

где $U_{осн}$ – энергия основной конструкции.

Здесь и далее индекс z указывает на принадлежность параметра к заполнителю.

Теперь представим, что для повышения жесткости всей системы определенное количество материала массой Δm добавляется в i -й элемент заполнителя. Для оценки продуктивности такой операции вычислим соответствующую производную. Для этого выразим плотность элемента ρ_i через его массу m_i и объем V_i

$$\rho_i = \frac{m_i}{V_i} \quad (24)$$

и перепишем (21) с учетом (18) и (24) следующим образом:

$$U_i = \frac{\sigma_{eqi}^2}{2\rho_i E} V_i = \frac{\sigma_{eqi}^2}{2m_i E} V_i^2. \quad (25)$$

Отсюда получим

$$\frac{\partial U}{\partial m_i} = -\frac{\sigma_{eqi}^2}{2E m_i^2} V_i^2 = -\frac{\sigma_{eqi}^2}{2E \rho_i^2} = -\frac{\sigma_{eqi}^2}{2E \rho_i} \cdot \frac{1}{\rho_i} = -\frac{u_i}{\rho_i}. \quad (26)$$

Этот результат можно сформулировать в виде следующей **теоремы II**: *частная производная потенциальной энергии конструкции с трехмерным заполнителем переменной плотности по массе одного из его элементов равна отношению удельной потенциальной энергии этого элемента к его плотности со знаком минус.*

Опираясь на этот результат, процедуру поиска перспективных мест для размещения дополнительных силовых элементов в трехмерных конструкциях можно представить в общих чертах с использованием МКЭ-моделирования следующим образом:

1. К основной конструкции добавляется трехмерный заполнитель в геометрически допустимой области.

2. Заполнитель соединяется с основной конструкцией в технологически удобных местах.

3. Назначается одинаковая во всех элементах заполнителя начальная величина модуля упругости E_z , достаточно малая по сравнению с модулем упругости основной конструкции. (В качестве “достаточной” на первых шагах разработки методики, наверное, следует понимать такую величину E_z , которая не вызовет больших изменений в НДС основной конструкции. Обсуждение этого тонкого и важного вопроса будет продолжено в последующих разделах).

4. Выполняется расчет НДС основной конструкции и заполнителя. Вычисляется и визуализируется распределение удельной потенциальной энергии в заполнителе.

4. Тестирование методики

Для испытания работоспособности и перспективности намеченного подхода к модификации недостаточно жестких конструкций рассмотрим решение нескольких тривиальных задач о кручении тонкостенных стержней.

Известно, что тонкостенные стержни с открытым профилем имеют крайне малую крутильную жесткость [14], и замыкание контура приводит к значительно более жесткой конструкции.

Рассмотрим открытый профиль (рис. 8). Крутящая нагрузка прикладывалась в виде пары сил по торцам основной конструкции. Заполнитель соединялся с основной конструкцией только по ее продольным свободным краям. Стержни моделировались пластинчатыми элементами, заполнитель – трехмерными.

Размещение заполнителя и результаты расчетов – величины удельной потенциальной энергии формоизменения в поперечном сечении заполнителя – приведены на рис. 9 (для удобства анализа заполнитель внутри профиля не показан). Критерий Мизеса использован вместо удельной потенциальной энергии из-за возможностей вычислений в

использованной МКЭ-системе. В случаях, когда в напряжениях доминируют сдвиги, указанные критерии дают близкие результаты.

Видно, что зоны высоких значений удельной потенциальной энергии в заполнителе довольно уверенно указывают на целесообразность замыкания рассмотренного профиля. Подобные результаты были получены также и для круговых открытых профилей с сектором выреза 90 и 180°.

Таким образом, возможность алгоритмического решения данной инженерной задачи получила определенное подтверждение.

5. Оптимизация распределения материала в заполнителе

Для повышения четкости и контрастности картин, подобных представленной на рис. 9, и для повышения эффективности разрабатываемой методики рассмотрим решение следующей оптимизационной задачи.

Будем считать, что для модификации конструкции выделено определенное количество дополнительного материала, которым может быть определенная часть массы основной конструкции. Объявим эту массу “массой заполнителя” – m_z . Создадим конечно-

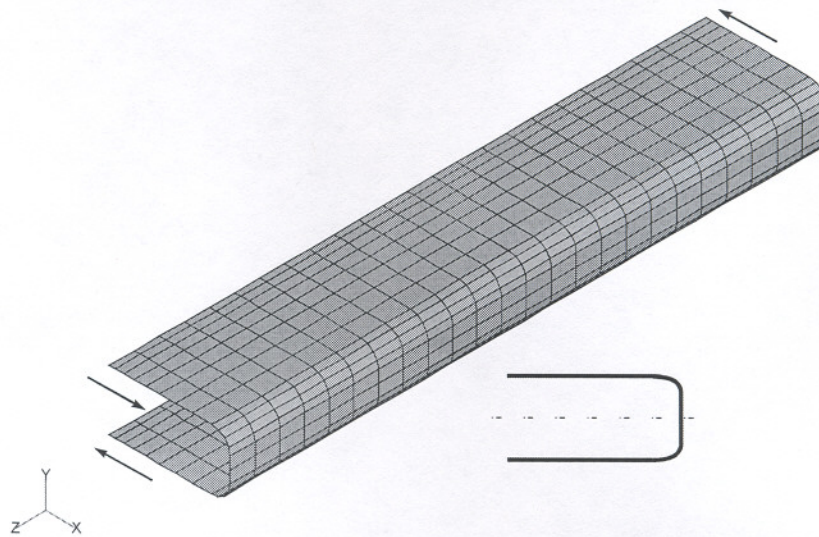


Рис. 8. Тонкостенный стержень

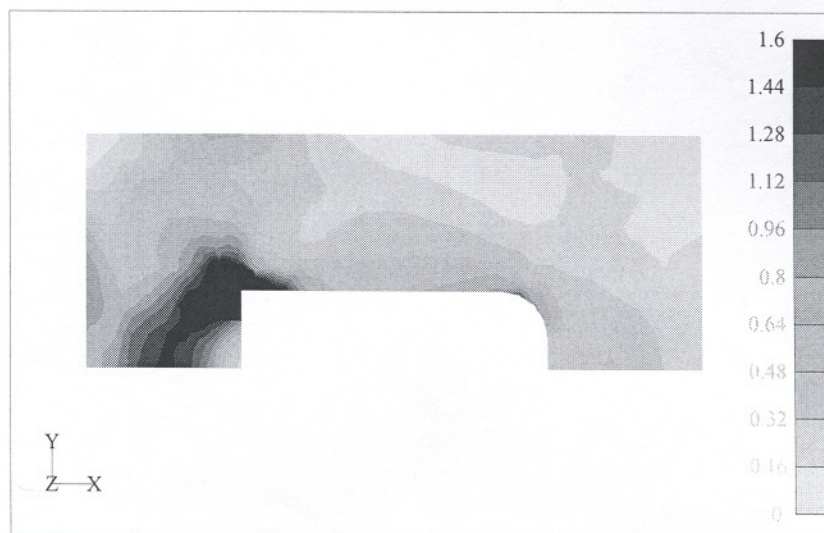


Рис. 9. Напряжения по Мизесу в заполнителе в торцовом сечении

элементную модель заполнителя и назначим его плотность и модуль упругости одинаковыми по всем элементам:

$$\rho_{z0i} = \frac{m_z}{V_z}, \quad (27)$$

$$E_{z0i} = \rho_{z0i} \frac{E_{осн}}{\rho_{осн}} = \rho_{z0i} \bar{E}_{осн}, \quad (28)$$

где индексы обозначают: z – заполнитель, 0 – начальное распределение, i – номер элемента.

Оптимизационную задачу сформулируем следующим образом:

$$\text{минимизировать } U = U_{осн} + U_z \quad (29)$$

при условии заданной величины массы заполнителя

$$m_z = const \quad (30)$$

в предположении, что плотность элементов заполнителя может меняться, то есть использоваться в качестве проектных переменных

$$x_i = \rho_{zi}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (31)$$

Для решения этой задачи воспользуемся основной идеей работы [13].

Наложим на переменные ρ_{zi} условие постоянства массы (30)

$$\sum_{i=1}^m \rho_{zi} V_i = m_z. \quad (32)$$

Вычислим начальное равномерное распределение плотности заполнителя

$$\rho_{z0i} = m_z \left(\sum_{i=1}^m V_i \right)^{-1}. \quad (33)$$

Определим главные напряжения в заполнителе σ_{10i} , σ_{20i} , σ_{30i} и запишем выражение для энергии системы, используя (22) и (18):

$$U = U_{осн} + \sum_{i=1}^m \frac{\sigma_{eq0i}^2}{2\rho_{zi} \bar{E}} V_i. \quad (34)$$

Запись (34) предполагает, что напряжения в элементах заполнителя считаются неизменными, а плотности ρ_{zi} могут меняться.

Для отыскания оптимальных значений плотностей при сделанных предположениях воспользуемся методом множителей Лагранжа [15] и построим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \rho_{zi}} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_{zi}} = 0, (i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \right. \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(\rho_{zi}) = \sum_{i=1}^m \rho_{zi} V_i - m_z = 0, \end{aligned} \right. \quad (36)$$

где λ - множитель Лагранжа, φ - вспомогательная функция, выражающая постоянство массы заполнителя (32).

Выполним дифференцирование с учетом (34) и получим

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\sigma_{eq0i}^2 V_i}{2\bar{E}\rho_{zi}^2} + \lambda V_i = 0, (i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \right. \quad (37)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^m \rho_{zi} V_i - m_z = 0, \end{aligned} \right. \quad (38)$$

откуда

$$\rho_{zi} = \frac{\sigma_{eq0i}}{\sqrt{2\bar{E}\lambda}}, \quad (39)$$

и с учетом (38)

$$\rho_{z1i} = \frac{m_z}{\sum_{i=1}^m \sigma_{eq0i} V_i} \sigma_{eq0i}, \quad (40)$$

где ρ_{z1i} – найденное распределение плотностей заполнителя взамен некоторого начального ρ_{z0i} , назначенного, например, по (27).

При напряжениях σ_{eq0i} , соответствующих распределению плотностей заполнителя ρ_{z0i} , и распределении плотностей ρ_{z1i} , полученном из решения (35)-(36) экстремальной задачи (29)-(31), потенциальная энергия деформаций системы “основная конструкция плюс заполнитель” уменьшится и станет

$U_{1-0} < U_0$, где U_0 – потенциальная энергия исходной системы с напряжениями $\sigma_{(1,2,3)0i}$ и плотностями элементов заполнителя ρ_{0i} ; U_{1-0} – энергия системы с напряжениями σ_{eq0i} и распределением плотностей ρ_{1i} . Энергия U_{1-0} может быть вычислена подстановкой ρ_{zi} в (34).

Но в системе с новым распределением плотностей ρ_{zi} будет другое распределение напряжений $\sigma_{(1,2,3)1i}$ как в заполнителе, так и в основной конструкции, которое будет удовлетворять условиям равновесия и условиям совместности деформаций. Распределение напряжений $\sigma_{(1,2,3)0i}$ в новой системе будет удовлетворять только условиям равновесия, но не будет удовлетворять условиям совместности деформаций. Действительная потенциальная энергия упругих деформаций всей системы будет U_1 и по принципу минимума потенциальной энергии упругих деформаций

$$U_1 < U_{1-0}. \quad (41)$$

Принимая новое распределение ρ_{1i} в качестве нового исходного и повторяя расчет НДС конструкции и вычисления по (40), получим последовательность конструкций с энергиями

$$U_0 > U_1 > U_2 > \dots \quad (42)$$

Данная монотонная убывающая последовательность ограничена снизу, так как энергия деформаций положительна и поэтому является сходящейся. Убывание энергии до минимально возможного значения означает отыскание такого распределения плотностей заполнителя, которое дает максимальную жесткость конструкции.

В построенном итерационном процессе плотность высоко нагруженных элементов будет возрастать, а недогруженных – уменьшаться. Причем изменения плотностей будут продолжаться до тех пор, пока во всех эле-

ментах с плотностью, отличной от нуля, не будет достигнута одинаковая величина отношения удельной потенциальной энергии элемента и его плотности. Плотность части элементов может оказаться близкой к нулю, что будет свидетельствовать о нецелесообразности размещения дополнительных силовых элементов в этих зонах.

Для разработки технических решений по рациональному усилению основной конструкции может быть использована визуализация оптимального распределения материала в заполнителе.

Конструкция с оптимальным заполнителем может быть использована для оценки эффективности тех или иных приемлемых в технологическом отношении технических решений по повышению жесткости основной конструкции при одинаковых затратах дополнительной массы.

6. Алгоритм топологического проектирования

На основе выполненного исследования может быть предложена следующая базовая методика проектирования дополнительных силовых элементов для улучшения жесткостных характеристик конструкций различного назначения.

1. К улучшаемой конструкции добавляется трехмерный изотропный заполнитель в геометрически допустимых областях.

2. Заполнитель соединяется с основной конструкцией в технологически удобных местах (для присоединения возможных дополнительных элементов сваркой, болтами и т.п.).

3. Основная конструкция и заполнитель разбиваются на конечные элементы.

4. Назначается определенная величина массы дополнительных элементов m_z , которая как бы “вспенивается” равномерно по объему заполнителя V_z , и определяется его модуль упругости

$$E_z = \frac{E_{очн} m_z}{\rho_{очн} V_z} = \bar{E} \rho_z. \quad (43)$$

5. Выполняется расчет НДС конструкции с заполнителем.

6. Назначаются новые плотности элементов заполнителя согласно (40) и их модули упругости

$$E_{zi} = \bar{E} \frac{m_z}{\sum_{i=1}^m \sigma_{eqi} V_i} \sigma_{eqi}. \quad (44)$$

7. Расчеты в п. п. 5-6 выполняются до стабилизации распределения плотностей заполнителя.

8. Результаты оптимизации визуализируются, и разрабатываются рациональные варианты усиления.

9. Варианты усиления сравниваются по эффективности между собой и с теоретически оптимальным решением в виде заполнителя переменной плотности при одинаковых дополнительных массах.

10. По требованиям жесткости определяется минимально необходимая масса дополнительных элементов.

7. Заключение

Построенный алгоритм ориентирован прежде всего на автомобиле- и авиастроение, в которых проектирование ведется, как правило, с использованием удачных прототипов. В этих отраслях на отдельных этапах разработки, и особенно доводки, возникают подобные задачи улучшения жесткостных характеристик конструкций путем модификаций.

Алгоритм должен быть детально отработан на модельных и реальных задачах. Развитие алгоритма и методики проектирования предполагается в следующих направлениях.

1. Создание удобного интерфейса для визуализации результатов оптимизации.

2. Разработка рекомендаций для конструкторов по интерпретации результатов расчетов.

3. Разработка методики решения задач с одновременным учетом требований прочности и жесткости.

Автор благодарит В. А. Сойфера за дискуссию, которая подтолкнула к поискам формального алгоритма топологического проектирования, А. В. Гуменюка и С. П. Рычкова за помощь в выполнении расчетов и подготовке иллюстраций.

Работа поддержана Межотраслевой программой сотрудничества Минобразования России и АО "АВТОВАЗ", шифр проекта: 02.02.016.

Список литературы

1. Комаров В. А. Проектирование силовых схем авиационных конструкций. В кн.: Актуальные проблемы авиационной науки и техники. М.: Машиностроение, 1984. С. 114-129.

2. Вейссхаар Т. А., Комаров В. А. Человеческий фактор в проектировании авиационных конструкций. М.: "Полет", 1998, № 1. С. 17-23.

3. Benschop M. P. Optimisation of Structural Topology Shape and Material / - Springer - Verlag Berlin, Heidelberg, 1995, - 271 pp.

4. Козлов Д. М., Майнсков В. Н. патент № 2154003 "Конструкция стыка крыла с фюзеляжем".

5. Малков В. П., Угодчиков А. Г. Оптимизация упругих систем. М.: Наука. 1981. - 288 с.

6. Lahey R. S., Miller M. R. and Raymond M. A. (eds.), MSC/NASTRAN Reference Manual, Version 68, The MacNeal-Schwendler Corporation, Los Angeles, California, 1994.

7. Автоматизация проектирования авиационных конструкций на базе МКЭ. САПР РИПАК / Комаров В. А, Пересыпкин и др. Куйбышев, 1984. - 174 с. Куйбышев. авиац. институт. Деп. в ВИНТИ 6 июня 1984 г., № 3709-84.

8. Данилин А. И., Комаров В. А. Проектирование тонкостенных конструкций с ограничениями по жесткости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика. Горький, 1985. С. 86-96.

9. Житомирский Г. И. Конструкция самолетов. М.: Машиностроение, 1995. - 416 с.

10. Niu M. C. Y. Airframe Structural Design. CONMILIT PRESS LTD, 1993. - 612 с.

11. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1976. - 576 с.

12. Wasiutynski Z. On the Congruency of the Forming According to the Minimum Potential Energy with that According to the Equal Strength. - "Bul. Acad. Pol. Sci." 1960, Vol. VIII. No.6.

13. Комаров А. А. Основы проектирования силовых конструкций. Куйбышев, 1965. – 82 с.
14. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. – 744 с.
15. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1965. – 616 с.

STRUCTURE STIFFENING BY TOPOLOGICAL CHANGES

© 2003 V. A. Komarov

Samara State Aerospace University

Enhancement of structure stiffness characteristics due to the addition of new elements is considered. Theoretical analysis of heuristic actions of a designer faced with this kind of problem is given. Formalized algorithm for the search of additional elements is proposed.