

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БЕЗОТРЫВНОГО ДВИЖЕНИЯ РОТОРА ПО АНИЗОТРОПНО УПРУГОЙ ОПОРЕ С ЗАЗОРОМ

© 2019

А. Н. Никифоров кандидат технических наук, старший научный сотрудник;
Институт машиноведения им. А.А. Благодного Российской академии наук, г. Москва;
n.andre@mail.ru

Г. Я. Пановко доктор технических наук, главный научный сотрудник;
Институт машиноведения им. А.А. Благодного Российской академии наук, г. Москва;
gpanovko@yandex.ru

А. Е. Шохин кандидат технических наук, старший научный сотрудник;
Институт машиноведения им. А.А. Благодного Российской академии наук, г. Москва;
shohinsn@mail.ru

С помощью теоретической модели и натурных испытаний показаны кинематические и динамические особенности обкатки гибким ротором несмазанной опоры с зазором и двоякой жёсткостью. Используется сочетание оригинальных подходов и известных аналитических и экспериментальных методов. В частности, уравнения движения составляются по Лагранжу в комплексных и комплексно-сопряжённых координатах, а их решения разыскиваются в экспоненциальной форме и посредством исключения контактных сил из рассмотрения и введения малого параметра. Измерения вибрации производятся не на станине установки с использованием акселерометров, а в её источнике – непосредственным слежением за осью ротора парой токовых бесконтактных датчиков перемещений, установленных в конфигурации ХУ. Отсюда чёткость опытных данных не зависит от механической проводимости деталей между ротором-источником и датчиками-приёмниками. В результате достоверно определяются частота, амплитуда и границы существования обратной прецессии, а также делается вывод о принципиальной невозможности обкатки при определённой комбинации параметров.

Анизотропная роторная система; математическая и экспериментальная модель; качение; проскальзывание; скорость прецессии.

Цитирование: Никифоров А.Н., Пановко Г.Я., Шохин А.Е. Экспериментально-теоретическое исследование безотрывного движения ротора по анизотропно упругой опоре с зазором // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. Т. 18, № 2. С. 156-168. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-2-156-168

Введение

На практике подшипниковые узлы (стойки, крепления, а иногда и сами подшипники) обладают упругой податливостью, причём часто она сравнима с податливостью (гибкостью) удерживаемого ими вала и не изотропна, т.е. существуют наименьшее k_{\min} и наибольшее k_{\max} значения жёсткости во взаимно перпендикулярных направлениях. Бывает и податливость вала такая, что он вместе с насаженными на него деталями может быть представлен как абсолютно твёрдое тело на опорах с «двойкой» жёсткостью. Несмотря на то, что контактное взаимодействие ротора и подшипника с зазором изучается с середины прошлого века, в качестве примера нелегко привести большое число научных работ, в которых учитываются контактное трение и неравножесткость роторной системы.

В [1] теоретически и экспериментально демонстрируется уменьшение диапазона обкатки путём неравножесткого подкрепления резервного (страхующего) подшипника с зазором. Работа показывает, что вращающийся вал с такой опорой выходит к бескон-

тактному движению из состояния обкатки при значительно большей скорости вращения, чем в симметричном случае поддержки.

В [2] проведено экспериментальное исследование поведения гибкого неуравновешенного ротора, установленного на анизотропные подшипники и задевающего в окрестности его критической скорости статор. В результате обнаружены первая и вторая гармоники ω и 2ω , а также компоненты, частота которых не кратна частоте вращения ω , но не обнаружена характерная для анизотропных роторных систем обратная прецессия. Согласно разъяснению данный признак влияния анизотропии опор исчез при контакте ротора со статором из-за повышения жёсткости и понижения анизотропии системы.

Объект исследования

Пусть гибкий вал с диском общей массой m вращается с постоянной угловой скоростью ω в трёх одинаково неравножестких подшипниках, но один из них имеет зазор δ на конце получающегося консольного вылета (рис. 1). Более того, пусть вал совершает с некоторой циклической частотой $|\Omega|$ чисто поступательное (без узлов колебаний) движение в сторону, противоположную собственному вращению, т.е. близкое к основной форме нерегулярной или эллиптической прецессии. При этом в неподвижных координатах x_0 и y_0 обозначают проекции радиального смещения центров опор; x , y и \tilde{x} , \tilde{y} – проекции поперечного отклонения точки приведения или центра диска в случаях бесконечно большого зазора ($\delta = \infty$) и отсутствия зазора ($\delta = 0$) в третьем подшипнике.

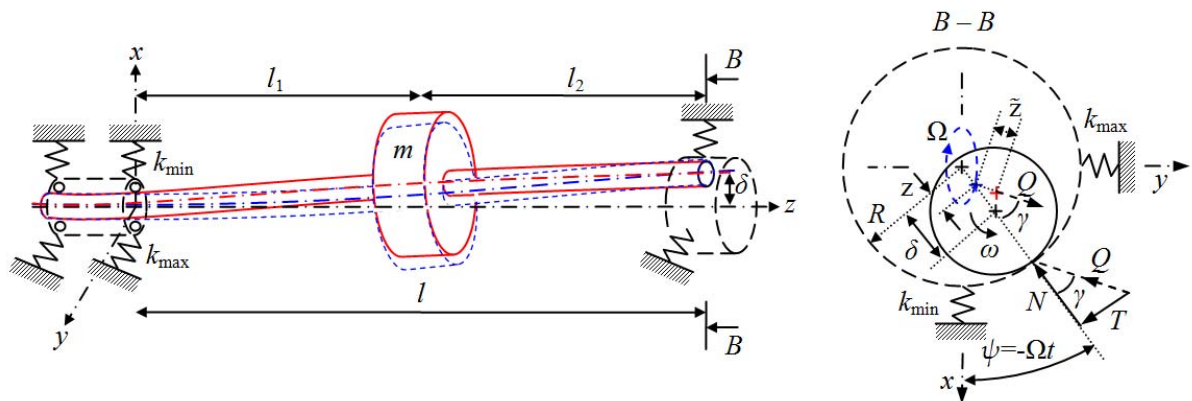


Рис. 1. Движение гибкого ротора на неравножестких подшипниках, один из которых с зазором, до (синий пунктирный контур) и после (красный сплошной контур) выборки зазора

Предполагается, что угловые и крутильные колебания в системе не происходят, поскольку соответствующие собственные частоты системы намного выше ω и $|\Omega|$ даже при значительном увеличении последних. Конечно, значительность ω и $|\Omega|$ относительно угловых и крутильных частот нужно понимать условно – это может быть возрастание до таких значений, при которых движение вала всё ещё не становится поступательно-угловым (с узлами колебаний) или/и поступательно-крутильным. Наконец, пусть осевая вибрация вала конструктивно исключена.

Математическая модель

Запишем выражения кинетической и потенциальной энергии двухопорной с $\delta = \infty$ (трёхопорной с $\delta = 0$) системы при основных (чисто поступательных) колебаниях:

$$W = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{y}^2, \quad U = \frac{k_{11}}{2} (x - x_0)^2 + \frac{k_{11}}{2} (y - y_0)^2 + \frac{2k_{\min}}{2} x_0^2 + \frac{2k_{\max}}{2} y_0^2,$$

$$\left(\tilde{W} = \frac{m}{2} \dot{\tilde{x}}^2 + \frac{m}{2} \dot{\tilde{y}}^2, \quad \tilde{U} = \frac{\tilde{k}_{11}}{2} (\tilde{x} - x_0)^2 + \frac{\tilde{k}_{11}}{2} (\tilde{y} - y_0)^2 + \frac{3k_{\min}}{2} x_0^2 + \frac{3k_{\max}}{2} y_0^2 \right),$$

где $k_{11} = \frac{3EJ}{l_1^3}$ и $\tilde{k}_{11} = \frac{12EJl^3}{l_1^3 l_2^2 (3l + l_2)}$ – соответственно приведённая к центру диска жёсткость на изгиб консольного вала и вала с опёртыми концами в абсолютно жёстких опорах.

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа, можно составить дифференциальные уравнения движения недемпфированной двухопорной и трёхопорной системы:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_{11}(x - x_0) &= 0, & m\ddot{\tilde{x}} + \tilde{k}_{11}(\tilde{x} - x_0) &= 0, \\ m\ddot{y} + k_{11}(y - y_0) &= 0, & m\ddot{\tilde{y}} + \tilde{k}_{11}(\tilde{y} - y_0) &= 0, \\ k_{11}(x_0 - x) + 2k_{\min}x_0 &= 0, & \tilde{k}_{11}(x_0 - \tilde{x}) + 3k_{\min}x_0 &= 0, \\ k_{11}(y_0 - y) + 2k_{\max}y_0 &= 0, & \tilde{k}_{11}(y_0 - \tilde{y}) + 3k_{\max}y_0 &= 0. \end{aligned}$$

В двух последних уравнениях нет производных, поэтому x_0, y_0 могут быть исключены и получены уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_x x &= 0, & m\ddot{\tilde{x}} + \tilde{k}_x \tilde{x} &= 0, \\ m\ddot{y} + k_y y &= 0, & m\ddot{\tilde{y}} + \tilde{k}_y \tilde{y} &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } k_x = \frac{2k_{\min}k_{11}}{2k_{\min} + k_{11}}, \quad k_y = \frac{2k_{\max}k_{11}}{2k_{\max} + k_{11}}, \quad \tilde{k}_x = \frac{3k_{\min}\tilde{k}_{11}}{3k_{\min} + \tilde{k}_{11}}, \quad \tilde{k}_y = \frac{3k_{\max}\tilde{k}_{11}}{3k_{\max} + \tilde{k}_{11}}.$$

Эти уравнения принципиально не отличаются от уравнений для упругого вала с диском на жёстких опорах, в т.ч. при контакте [3]. В случае нагружения двухопорного вала составляющими (проекциями) силы N (нормального давления) и разгрузки трёхопорного вала на эти же усилия ($N_x \cos \psi$ и $N_y \sin \psi$) можно прийти к двум эквивалентным друг другу контактными системам без трения:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_x x &= -N_x \cos \psi, & m\ddot{\tilde{x}} + \tilde{k}_x \tilde{x} &= N_x \cos \psi, \\ m\ddot{y} + k_y y &= -N_y \sin \psi, & m\ddot{\tilde{y}} + \tilde{k}_y \tilde{y} &= N_y \sin \psi. \end{aligned}$$

Для контактно-динамических расчётов с учётом второй некруговой формы (поступательно-угловой эллиптической прецессии) также могут быть составлены соответствующие дифференциальные уравнения движения, подобные приведённым в [1], как уравнения равновесия сил и моментов в проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_{11}^x x + k_{12}^x \varphi_y &= -N_x \cos \psi, & m\ddot{\tilde{x}} + \tilde{k}_{11}^x \tilde{x} + \tilde{k}_{12}^x \tilde{\varphi}_y &= N_x \cos \psi, \\ m\ddot{y} + k_{11}^y y + k_{12}^y \varphi_x &= -N_y \sin \psi, & m\ddot{\tilde{y}} + \tilde{k}_{11}^y \tilde{y} + \tilde{k}_{12}^y \tilde{\varphi}_x &= N_y \sin \psi, \\ I\ddot{\varphi}_x - I_0 \omega \dot{\varphi}_y + k_{21}^y y + k_{22}^y \varphi_x &= -N_y l_2 \sin \psi, & I\ddot{\tilde{\varphi}}_x - I_0 \omega \dot{\tilde{\varphi}}_y + \tilde{k}_{21}^y \tilde{y} + \tilde{k}_{22}^y \tilde{\varphi}_x &= N_y l_2 \sin \psi, \\ I\ddot{\varphi}_y + I_0 \omega \dot{\varphi}_x + k_{21}^x x + k_{22}^x \varphi_y &= -N_x l_2 \cos \psi, & I\ddot{\tilde{\varphi}}_y + I_0 \omega \dot{\tilde{\varphi}}_x + \tilde{k}_{21}^x \tilde{x} + \tilde{k}_{22}^x \tilde{\varphi}_y &= N_x l_2 \cos \psi, \end{aligned}$$

где $k_{11}^x, k_{12}^x = k_{21}^x, k_{22}^x$ и $k_{11}^y, k_{12}^y = k_{21}^y, k_{22}^y$ ($\tilde{k}_{11}^x, \tilde{k}_{12}^x = \tilde{k}_{21}^x, \tilde{k}_{22}^x$ и $\tilde{k}_{11}^y, \tilde{k}_{12}^y = \tilde{k}_{21}^y, \tilde{k}_{22}^y$) – жёсткости двухопорного (трёхопорного) вала, приведённые к центру его диска, действующие в плоскости xz и yz .

Отсюда нетрудно построить матричное уравнение, блочная структура которого может быть использована при обобщении на вал с несколькими дисками [4], в частности в двухопорном случае:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & [0] \\ [0] & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}_x\} \\ \{\dot{q}_y\} \end{Bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} [0] & -\mathbf{G} \\ \mathbf{G} & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_x\} \\ \{q_y\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x & [0] \\ [0] & \mathbf{K}_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_x\} \\ \{q_y\} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \{f_N^x\} \\ \{f_N^y\} \end{Bmatrix},$$

где $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} k_{11}^x & k_{12}^x \\ k_{21}^x & k_{22}^x \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} k_{11}^y & k_{12}^y \\ k_{21}^y & k_{22}^y \end{bmatrix}$,

$$\{q_x\} = \begin{Bmatrix} x \\ \varphi_x \end{Bmatrix}, \{q_y\} = \begin{Bmatrix} y \\ \varphi_y \end{Bmatrix}, \{f_N^x\} = \cos \psi \begin{Bmatrix} N_x \\ N_x l_2 \end{Bmatrix}, \{f_N^y\} = \sin \psi \begin{Bmatrix} N_y \\ N_y l_2 \end{Bmatrix}.$$

При учёте трения и анализе прецессии следует вспомнить, что, применяя комплексное представление, попросту используют удобный математический аппарат, позволяющий эффективно моделировать гистерезисное демпфирование и эллиптическое движение в роторной системе. А именно, целесообразно ввести комплексные $z = x + iy$, $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ и комплексно-сопряжённые $\bar{z} = x - iy$, $\tilde{\bar{z}} = \tilde{x} - i\tilde{y}$ координаты, т.е. в простейшей постановке задачи исходить из уравнений вида:

$$m\ddot{z} + k_{\frac{1}{2}\Sigma}z - k_{\frac{1}{2}\Delta}\bar{z} = -N_x \cos \psi - iN_y \sin \psi, \quad m\ddot{\tilde{z}} + \tilde{k}_{\frac{1}{2}\Sigma}\tilde{z} - \tilde{k}_{\frac{1}{2}\Delta}\tilde{\bar{z}} = N_x \cos \psi + iN_y \sin \psi, \quad (1)$$

где $k_{\frac{1}{2}\Sigma} = \frac{k_x + k_y}{2}$ и $k_{\frac{1}{2}\Delta} = \frac{k_y - k_x}{2}$ – полусумма и полуразность жёсткостей для двухопорной системы; $\tilde{k}_{\frac{1}{2}\Sigma} = \frac{\tilde{k}_x + \tilde{k}_y}{2}$ и $\tilde{k}_{\frac{1}{2}\Delta} = \frac{\tilde{k}_y - \tilde{k}_x}{2}$ – для трёхопорной системы.

В случае гистерезисного демпфирования и связанной с ним концепции комплексной жёсткости, а также с учётом проекций силы T контактного трения ($T_x \sin \psi$ и $T_y \cos \psi$) справедливо следующее:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + k_{\frac{1}{2}\Sigma}(1 + i\eta)z - k_{\frac{1}{2}\Delta}(1 + i\eta)\bar{z} &= -N_x \cos \psi + T_x \sin \psi - iN_y \sin \psi - iT_y \cos \psi, \\ m\ddot{\tilde{z}} + \tilde{k}_{\frac{1}{2}\Sigma}(1 + i\eta)\tilde{z} - \tilde{k}_{\frac{1}{2}\Delta}(1 + i\eta)\tilde{\bar{z}} &= N_x \cos \psi - T_x \sin \psi + iN_y \sin \psi + iT_y \cos \psi, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\eta = \pm\eta$ – коэффициент потерь (энергии колебаний) в материалах роторной системы, знак перед которым зависит от направления прецессии вала: «+» для прямой, «-» для обратной.

Анизотропно упругие опоры влияют так, что ротор будет совершать колебания в виде эллиптической прецессии. Это движение может быть получено сложением прямой и обратной круговых прецессий с амплитудами A_+ и A_- и угловыми скоростями Ω и $-\Omega$ соответственно, а именно:

$$z = A_+ e^{i\Omega t} + A_- e^{-i\Omega t}, \quad \bar{z} = A_+ e^{-i\Omega t} + A_- e^{i\Omega t}. \quad (3)$$

По аналогии:

$$\tilde{z} = \tilde{A}_+ e^{i\Omega t} + \tilde{A}_- e^{-i\Omega t}, \quad \tilde{z} = \tilde{A}_+ e^{-i\Omega t} + \tilde{A}_- e^{i\Omega t}. \quad (4)$$

Здесь важно обратить внимание на три особенности пользования этими решениями. Во-первых, интересующая (сопряжённая с обкаткой) обратная эллиптическая прецессия будет иметь место, если только $A_- > A_+$, $\tilde{A}_- > \tilde{A}_+$. Во-вторых, подстановка решений (3) и (4) не нарушит эквивалентность недемпфированных двухопорной и трёхопорной систем (1) и нарушит её в демпфированном случае. Для сохранения тождественности этих систем с трением (2) при подстановке в них указанных решений необходимо учитывать отставание вектора \tilde{z} от вектора z на угол трения γ , т.е. вместо (3) и (4) пользоваться при демпфировании решениями (3) и (5):

$$\tilde{z} = \tilde{A}_+ e^{i(\gamma+\Omega t)} + \tilde{A}_- e^{i(\gamma-\Omega t)}, \quad \tilde{z} = \tilde{A}_+ e^{-i(\gamma+\Omega t)} + \tilde{A}_- e^{-i(\gamma-\Omega t)}. \quad (5)$$

В-третьих, сумма векторов z и \tilde{z} будет представлять собой полное перемещение \tilde{z}_Σ исходного ротора (на двух неравножѐстких опорах) при контакте с третьей неравножѐсткой опорой:

$$\tilde{z}_\Sigma = \sqrt{z^2 + \tilde{z}^2 + 2z\tilde{z} \cos \gamma},$$

где вектор z – роторное перемещение (в точке приведения или по центру диска) до контакта (при касании), \tilde{z} – после контакта (при опирании).

Колебания, описываемые указанными решениями, характеризуются как вынужденные, поскольку действующие в направлениях x и y периодические контактные силы можно представить как сумму двух векторов, вращающихся в противоположные стороны, т.е. в аналогичном виде:

$$\begin{aligned} (N_x + iT_y) \cos(-\Omega t) &= \frac{N_x + iT_y}{2} e^{i\Omega t} + \frac{N_x + iT_y}{2} e^{-i\Omega t}, \\ (N_y + iT_x) \sin(-\Omega t) &= i \frac{N_y + iT_x}{2} e^{i\Omega t} - i \frac{N_y + iT_x}{2} e^{-i\Omega t}. \end{aligned}$$

При этих заменах уравнения (2) неустановившегося прямого или обратного безотрывного движения вала с диском на неравножѐстких опорах преобразуются в уравнения его стационарной обратной эллиптической прецессии:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + k_{\frac{1}{2}\Sigma}(1-i\eta)z - k_{\frac{1}{2}\Delta}(1-i\eta)\tilde{z} &= -\left(\frac{N_x+iT_y}{2} - \frac{N_y+iT_x}{2}\right)e^{i\Omega t} - \left(\frac{N_x+iT_y}{2} + \frac{N_y+iT_x}{2}\right)e^{-i\Omega t}, \\ m\ddot{\tilde{z}} + \tilde{k}_{\frac{1}{2}\Sigma}(1-i\eta)\tilde{z} - \tilde{k}_{\frac{1}{2}\Delta}(1-i\eta)\tilde{\tilde{z}} &= \left(\frac{N_x+iT_y}{2} - \frac{N_y+iT_x}{2}\right)e^{i\Omega t} + \left(\frac{N_x+iT_y}{2} + \frac{N_y+iT_x}{2}\right)e^{-i\Omega t}, \end{aligned} \quad (6)$$

где z, \tilde{z} изменяются согласно (3), а $\tilde{z}, \tilde{\tilde{z}}$ изменяются согласно (5).

В достоверности выполненных замен можно убедиться, полагая $N_x = N_y = N$ и $T_x = T_y = T$, т.е. переходя к симметричным системам, правой частью которых при обкатке является выражение $(N + iT)e^{-i\Omega t}$.

Подстановка (3) и (5) в (6) приводит к четырём уравнениям:

$$\begin{aligned} & \left(k_{\frac{1}{2}\Sigma}(1-i\eta) - m\Omega^2\right)A_+ - k_{\frac{1}{2}\Delta}(1-i\eta)A_- = -\left(\frac{N_x+iT_y}{2} - \frac{N_y+iT_x}{2}\right), \\ & -k_{\frac{1}{2}\Delta}(1-i\eta)A_+ + \left(k_{\frac{1}{2}\Sigma}(1-i\eta) - m\Omega^2\right)A_- = -\left(\frac{N_x+iT_y}{2} + \frac{N_y+iT_x}{2}\right), \\ & \left(\tilde{k}_{\frac{1}{2}\Sigma}(1-i\eta) - m\Omega^2\right)\tilde{A}_+ e^{i\gamma} - \tilde{k}_{\frac{1}{2}\Delta}(1-i\eta)\tilde{A}_- e^{-i\gamma} = \frac{N_x+iT_y}{2} - \frac{N_y+iT_x}{2}, \\ & -\tilde{k}_{\frac{1}{2}\Delta}(1-i\eta)\tilde{A}_+ e^{-i\gamma} + \left(\tilde{k}_{\frac{1}{2}\Sigma}(1-i\eta) - m\Omega^2\right)\tilde{A}_- e^{i\gamma} = \frac{N_x+iT_y}{2} + \frac{N_y+iT_x}{2}. \end{aligned}$$

Складывая уравнения – первое со вторым и третье с четвертым, а затем разделяя вещественные и мнимые части, можно получить:

$$\begin{aligned} & (m\Omega^2 - k_x)A_{\max} = N_x, \\ & \eta k_x A_{\max} = T_y, \\ & (\tilde{k}_x - m\Omega^2)\tilde{A}_{\max} \cos \gamma + \eta \tilde{k}_y \tilde{A}_{\max} \sin \gamma = N_x, \\ & -\eta \tilde{k}_x \tilde{A}_{\max} \cos \gamma + (\tilde{k}_y - m\Omega^2)\tilde{A}_{\max} \sin \gamma = T_y, \end{aligned} \tag{7a}$$

где $A_{\max} = A_+ + A_-$, $\tilde{A}_{\max} = \tilde{A}_+ + \tilde{A}_-$.

Вычитая из первого уравнения второе, а из третьего – четвертое, отделяя потом действительные и мнимые части, в результате получим:

$$\begin{aligned} & (m\Omega^2 - k_y)A_{\min} = N_y, \\ & \eta k_y A_{\min} = T_x, \\ & (\tilde{k}_y - m\Omega^2)\tilde{A}_{\min} \cos \gamma + \eta \tilde{k}_x \tilde{A}_{\min} \sin \gamma = N_y, \\ & -\eta \tilde{k}_y \tilde{A}_{\min} \cos \gamma + (\tilde{k}_x - m\Omega^2)\tilde{A}_{\min} \sin \gamma = T_x, \end{aligned} \tag{7b}$$

где $A_{\min} = A_- - A_+$, $\tilde{A}_{\min} = \tilde{A}_- - \tilde{A}_+$.

Рассматривая уравнения, исключаяющие неизвестные контактные силы:

$$\begin{aligned} & (\tilde{\lambda}_x^2 - \Omega^2)\tilde{A}_{\max} \cos \gamma + \eta \tilde{\lambda}_y^2 \tilde{A}_{\max} \sin \gamma = (\Omega^2 - \lambda_x^2)A_{\max}, \\ & -\eta \tilde{\lambda}_x^2 \tilde{A}_{\max} \cos \gamma + (\tilde{\lambda}_y^2 - \Omega^2)\tilde{A}_{\max} \sin \gamma = \eta \lambda_x^2 A_{\max} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & (\tilde{\lambda}_y^2 - \Omega^2)\tilde{A}_{\min} \cos \gamma + \eta \tilde{\lambda}_x^2 \tilde{A}_{\min} \sin \gamma = (\Omega^2 - \lambda_y^2)A_{\min}, \\ & -\eta \tilde{\lambda}_y^2 \tilde{A}_{\min} \cos \gamma + (\tilde{\lambda}_x^2 - \Omega^2)\tilde{A}_{\min} \sin \gamma = \eta \lambda_y^2 A_{\min}, \end{aligned}$$

можно отыскать в зависимости от известных (соответствующих касанию) амплитуд A_{\max} , A_{\min} искомые (контактные) амплитуды \tilde{A}_{\max} , \tilde{A}_{\min} и скорость Ω прецессии ротора при обкатке из отношений вида:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\max} \cos \gamma &= \frac{\begin{vmatrix} \Omega^2 - \lambda_x^2 & \eta \tilde{\lambda}_y^2 \\ \eta \lambda_x^2 & \tilde{\lambda}_y^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_x^2 - \Omega^2 & \eta \tilde{\lambda}_y^2 \\ -\eta \tilde{\lambda}_x^2 & \tilde{\lambda}_y^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}} A_{\max}, & \tilde{A}_{\min} \cos \gamma &= \frac{\begin{vmatrix} \Omega^2 - \lambda_y^2 & \eta \tilde{\lambda}_x^2 \\ \eta \lambda_y^2 & \tilde{\lambda}_x^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_y^2 - \Omega^2 & \eta \tilde{\lambda}_x^2 \\ -\eta \tilde{\lambda}_y^2 & \tilde{\lambda}_x^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}} A_{\min}, \\ \tilde{A}_{\max} \sin \gamma &= \frac{\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_x^2 - \Omega^2 & \Omega^2 - \lambda_x^2 \\ -\eta \tilde{\lambda}_x^2 & \eta \lambda_x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_x^2 - \Omega^2 & \eta \tilde{\lambda}_y^2 \\ -\eta \tilde{\lambda}_x^2 & \tilde{\lambda}_y^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}} A_{\max}, & \tilde{A}_{\min} \sin \gamma &= \frac{\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_y^2 - \Omega^2 & \Omega^2 - \lambda_y^2 \\ -\eta \tilde{\lambda}_y^2 & \eta \lambda_y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_y^2 - \Omega^2 & \eta \tilde{\lambda}_x^2 \\ -\eta \tilde{\lambda}_y^2 & \tilde{\lambda}_x^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}} A_{\min}, \\ \mu = \tan \gamma &= \eta \frac{\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_x^2 - \Omega^2 & \Omega^2 - \lambda_x^2 \\ -\tilde{\lambda}_x^2 & \lambda_x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Omega^2 - \lambda_x^2 & \eta \tilde{\lambda}_y^2 \\ \eta \lambda_x^2 & \tilde{\lambda}_y^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}}, & \mu = \tan \gamma &= \eta \frac{\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_y^2 - \Omega^2 & \Omega^2 - \lambda_y^2 \\ -\tilde{\lambda}_y^2 & \lambda_y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Omega^2 - \lambda_y^2 & \eta \tilde{\lambda}_x^2 \\ \eta \lambda_y^2 & \tilde{\lambda}_x^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

При этом допустимо пренебречь членами с множителем η^2 ввиду их малости по сравнению с остальными.

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\max} &\approx \frac{\Omega^2 - \lambda_x^2}{\tilde{\lambda}_x^2 - \Omega^2} A_{\max}, & \tilde{A}_{\min} &\approx \frac{\Omega^2 - \lambda_y^2}{\tilde{\lambda}_y^2 - \Omega^2} A_{\min}, \\ \Omega^4 - \left(\lambda_x^2 + \tilde{\lambda}_y^2 - \frac{\eta}{\mu} (\tilde{\lambda}_x^2 - \lambda_x^2) \right) \Omega^2 + \lambda_x^2 \tilde{\lambda}_y^2 &= 0, & \Omega^4 - \left(\lambda_y^2 + \tilde{\lambda}_x^2 - \frac{\eta}{\mu} (\tilde{\lambda}_y^2 - \lambda_y^2) \right) \Omega^2 + \lambda_y^2 \tilde{\lambda}_x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Выбирая справедливое биквадратное уравнение для $|\Omega|$, нужно понимать, что $\lambda_x < \lambda_y$ и $\tilde{\lambda}_x < \tilde{\lambda}_y$, а \tilde{A}_{\max} и \tilde{A}_{\min} будут одновременно положительными, если $\lambda_y < |\Omega| < \tilde{\lambda}_x$. Это же неравенство вытекает из условия положительности сил N_x и N_y и уравнений (7) в случае недемпфированных систем:

$$\left. \begin{aligned} (m\Omega^2 - k_x) A_{\max} &> 0 \\ (m\Omega^2 - k_y) A_{\min} &> 0 \\ (\tilde{k}_x - m\Omega^2) \tilde{A}_{\max} &> 0 \\ (\tilde{k}_y - m\Omega^2) \tilde{A}_{\min} &> 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \lambda_x &< |\Omega| \\ \lambda_y &< |\Omega| \\ |\Omega| &< \tilde{\lambda}_x \\ |\Omega| &< \tilde{\lambda}_y \end{aligned} \right\}, \quad \lambda_x < \lambda_y < |\Omega| < \tilde{\lambda}_x < \tilde{\lambda}_y.$$

Очевидно, справедливым уравнением для $|\Omega|$ будет четвёртое из (8), которое при устремлении конструкционного демпфирования к нулю ($\eta = 0$) принимает вид:

$$\Omega^4 - (\lambda_y^2 + \tilde{\lambda}_x^2) \Omega^2 + \lambda_y^2 \tilde{\lambda}_x^2 = 0.$$

Отсюда $|\Omega| = \lambda_y$, или $|\Omega| = \tilde{\lambda}_x$.

Полагая для общего случая ($\eta \neq 0$): $|\Omega| = \lambda + \Delta = \lambda(1 + \varepsilon)$, где Δ и $\varepsilon = \Delta/\lambda$ – некоторая и малая поправки от трения, и вставляя соответствующие приближения второй и четвёртой степени $\Omega^2 \approx \lambda^2(1 + 2\varepsilon)$ и $\Omega^4 \approx \lambda^4(1 + 4\varepsilon)$ в биквадратное уравнение, можно выразить малый параметр ε :

$$\varepsilon = -\frac{\eta}{2\mu} \frac{\tilde{\lambda}_y^2 - \lambda_y^2}{2\lambda^2 - \lambda_y^2 - \tilde{\lambda}_x^2 + \frac{\eta}{\mu}(\tilde{\lambda}_y^2 - \lambda_y^2)}. \quad (9)$$

На практике увеличение трения не может приводить к росту скорости, поэтому ε -поправка должна быть отрицательной величиной. Этому из пары теоретически возможных вариантов $\lambda = \lambda_y$ и $\lambda = \tilde{\lambda}_x$ удовлетворяет последний, в чём можно убедиться непосредственной их подстановкой в (9), предположив малость конструкционного демпфирования.

В результате:

$$|\Omega| = \tilde{\lambda}_x(1 + \varepsilon) \approx \tilde{\lambda}_x \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\eta/\mu}{\Xi + \eta/\mu} \right), \quad \text{где } \Xi = \frac{\tilde{\lambda}_x^2 - \lambda_y^2}{\tilde{\lambda}_y^2 - \lambda_y^2}.$$

Экспериментальное обоснование математической модели

Математическое описание и реальная динамика неизотропной роторной системы всегда сложнее, чем в изотропном случае. Успех в решении многих задач, в т.ч. по обкатке круглым ротором неравножѣстких опор, зависит от правильного выбора упрощѣнной расчѣтной модели, а обоснованные упрощения можно сделать лишь на основании опытов.

Для того чтобы вычислить параметры обкатки (частоту, радиус и диапазон(ы) сопряжѣнной с ней прецессии), прежде всего нужно определить силы контактного взаимодействия ротора с опорой. Поскольку последние задаются некоторыми уравнениями, обычно на основе законов Герца и Кулона, а в развиваемой теории – уравнениями стационарного эллиптического движения эквивалентной роторной системы с дополнительной неравножѣсткой опорой на месте контакта, для оценки точности расчѣтов необходимо иметь экспериментальные параметры обкатки при различных угловых скоростях ротора и поперечных жѣсткостях опор(ы). Таким образом, основная цель испытаний – измерение частоты и амплитуды прецессии осесимметричного ротора в условиях обкатки им опоры с двойкой жѣсткостью и выявление границ устойчивости обкатки в такой системе.

Соответствующие эксперименты проводились на качественно обновлѣнной установке с тонким длинным консольным валом на шарикоподшипниках (рис. 2), на свободном конце которого располагается опора в виде имеющей зазор и подвижной в одном из поперечных направлений втулки. В другом перпендикулярном оси вала направлении втулка не может перемещаться. С одной стороны жѣсткая, а с другой – вариативно-податливая конструкция опоры обеспечивается за счѣт поступательного перемещения её внутренней части, включающей втулку, по шариковым направляющим. Для разработанной опоры-втулки предусмотрены три степени её собственной однонаправленной податливости: жѣсткая при блокировке болтами (т.е. изотропный случай, с которым целесообразно вести сравнение), упругая при поджатии пружинами (для получения умеренной анизотропии) и свободно перемещающаяся (абсолютный анизотропный случай).

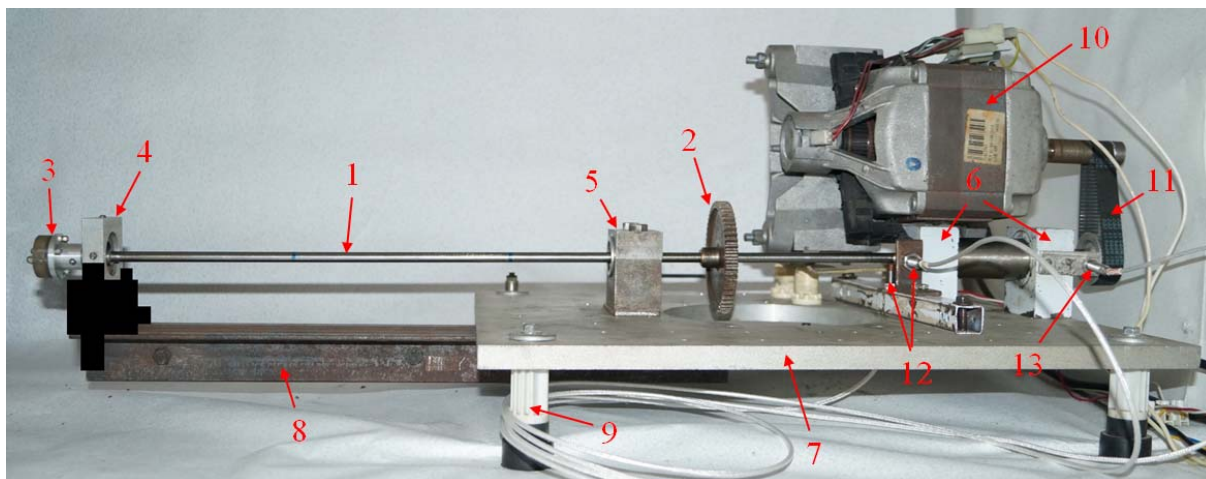


Рис. 2. Экспериментальная установка:

1 – вал (масса 255 г, диаметр 8 мм и длина 645 мм); 2 – диск (масса 270 г); 3 – светодиодный индикатор (масса 75 г); 4 – анизотропно упругая опора с малым радиальным зазором; 5 – страховочная опора с большим зазором; 6 – шарикоподшипниковые опоры; 7 – плита станины; 8 – кронштейн станины; 9 – стойка станины; 10 – электродвигатель; 11 – зубчато-ременная передача; 12 – датчики поперечных перемещений вала; 13 – датчик частоты вращения вала

Регулируемый привод, состоящий из электродвигателя и понижающей зубчато-ременной передачи, позволяет доводить частоту вращения вала до 120 Гц. Насаженные на вал диск и наконечник со светодиодами понижают частоты собственных колебаний. Первые три собственные частоты собранного ротора как консольного: $\lambda_1 = 2\pi \times 13$ Гц, $\lambda_2 = 2\pi \times 62$ Гц и $\lambda_3 = 2\pi \times 160$ Гц, а как заземлённого на одном конце и свободно опёртого на жёсткую втулку на противоположном конце: $\tilde{\lambda}_1 = 2\pi \times 48$ Гц, $\tilde{\lambda}_2 = 2\pi \times 124$ Гц и $\tilde{\lambda}_3 = 2\pi \times 315$ Гц.

Поперечные колебания вала, в т.ч. в неравножесткой опоре с номинальным зазором, характеризующимся безразмерным значением $r/\delta = 3,5$, где r – радиус вала, измерялись базовым комплектом аппаратуры, включающим бесконтактные токовихревые датчики перемещений и частоты вращения, преобразователи типа «зазор – напряжение», аналого-цифровой преобразователь и ноутбук с предустановленными программами LGraph2 и Matlab. Параллельно с записью текущих значений частоты вращения и осциллограмм виброперемещений вала во взаимно перпендикулярных направлениях можно было вести видеосъёмку со скоростью 240 кадр/с либо форм колебаний вала, либо траекторий его оси и эксцентрической точки по следам соответствующих светодиодов.

Возбуждение обкатки валом анизотропно закреплённой втулки осуществлялось короткими импульсными воздействиями после достижения вращения примерно с частотой 100 Гц, т.е. уже после полного разгона на начальной фазе останова ротора. В изотропной экспериментальной системе, как правило, происходило самовозбуждение обкатки, в т.ч. гораздо раньше выхода на 100 Гц.

На рис. 3 показана типичная динамика, наблюдавшаяся при испытаниях ротора с умеренно анизотропной опорой, где частота прецессии $\Omega = \frac{1}{2\pi} |\dot{\Omega}|$ автоматизировано определена по основному пику на Фурье-спектре, который алгоритмически вычислен для каждого секундного отрезка времени при постобработке экспериментальных данных.

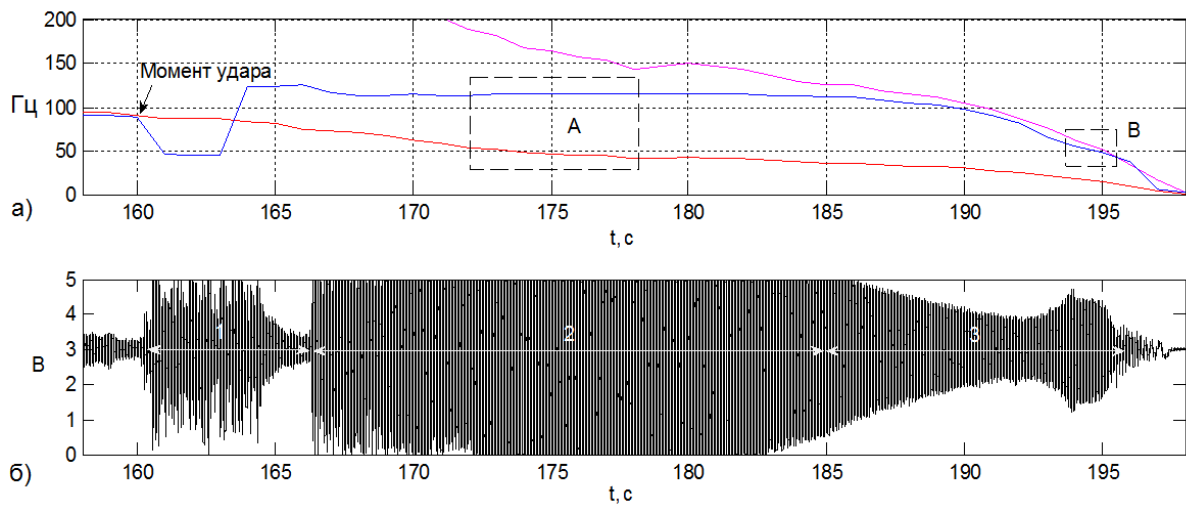


Рис. 3. Результаты испытаний ротора с умеренно анизотропной опорой:
 а – диаграмма «время (с) – частоты (Гц)»: красная кривая – частота вращения f ; розовая – $f r / \delta$; синяя – частота прецессии Ω ; А – область обкатки с резонансом, возбуждённым дисбалансом; В – область резонанса, возбуждённого обкаткой;
 б – осциллограмма «время (с) – электрическое напряжение (В)» перемещений ротора в плоскости большей податливости умеренно анизотропной опоры, где 1 – переходный процесс; 2 – обкатка с проскальзыванием; 3 – обкатка без проскальзывания

В начале (после единичного ударного воздействия) видно неустановившееся движение ротора (на временном интервале 1) и, по-видимому, автоколебательного характера со значительной амплитудой и частотой, меньшей $f = \frac{1}{2\pi} \omega$ и близкой к первой собственной жёстко опёртого ротора (48 Гц). Затем эта динамическая неустойчивость сменяется обкаткой с проскальзыванием (средняя вторая часть осциллограммы), на что вкуче указывают высокая частота прецессии ($\Omega > f$), близость Ω к 124 Гц, несовпадение Ω с $f r / \delta$ и стоп-кадр на 173 секунде (рис. 4).

Обкатывание со скольжением сохраняется примерно в течение 20 секунд и плавно переходит в чистое качение (правая третья часть осциллограммы), что характеризуется устремлением Ω к $f r / \delta$ и подтверждается стоп-кадром на 186 секунде (рис. 4). Также заметно наступление двух резонансных состояний системы, причём в А-случае это обусловлено совпадением основной частоты собственных колебаний с частотой f синхронного возмущения, а в В-случае – с частотой $f r / \delta$ асинхронного возмущения.

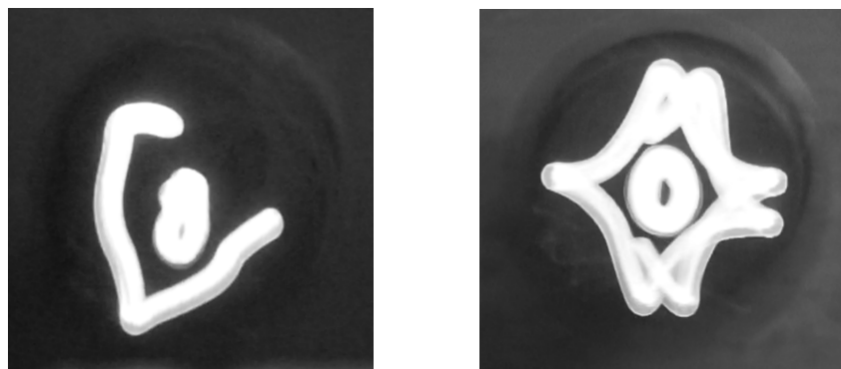


Рис. 4. Реальные движения на 173 секунде и 186 секунде центра ротора (по эллипсу) и его эксцентричной точки (по эпитрохоиде) внутри умеренно анизотропной опоры с зазором

Из стоп-кадров (рис. 4) становится очевидным, что ротор обкатывает анизотропную опору как с проскальзыванием, так и без него. При этом ось ротора всегда движется по эллиптической траектории, а его эксцентричная точка – по эпитрохоиде с числом петель, меньшим или равным четырём, что связано с геометрическим отношением $r/\delta = 3,5$. Здесь, с одной стороны, чем больше проскальзывание, тем меньше число петель, а с другой – чем больше проскальзывание, тем больше расточка втулки и, следовательно, больше отношение r/δ .

На рис. 5 показана типичная динамика, наблюдавшаяся при испытаниях ротора с абсолютно анизотропной опорой. Как видно, даже при нескольких последовательных ударах, система не откликает на них установлением обкатки.

Таким образом, эксперименты подтвердили важнейшее следствие из теории о том, что если $\lambda_y = \tilde{\lambda}_x$, то потенциальные значения для скорости $|\Omega|$ обкатки пропадают, т.е. анизотропно упругую подвеску для статорных элементов можно рассматривать как средство предотвращения обкатки.

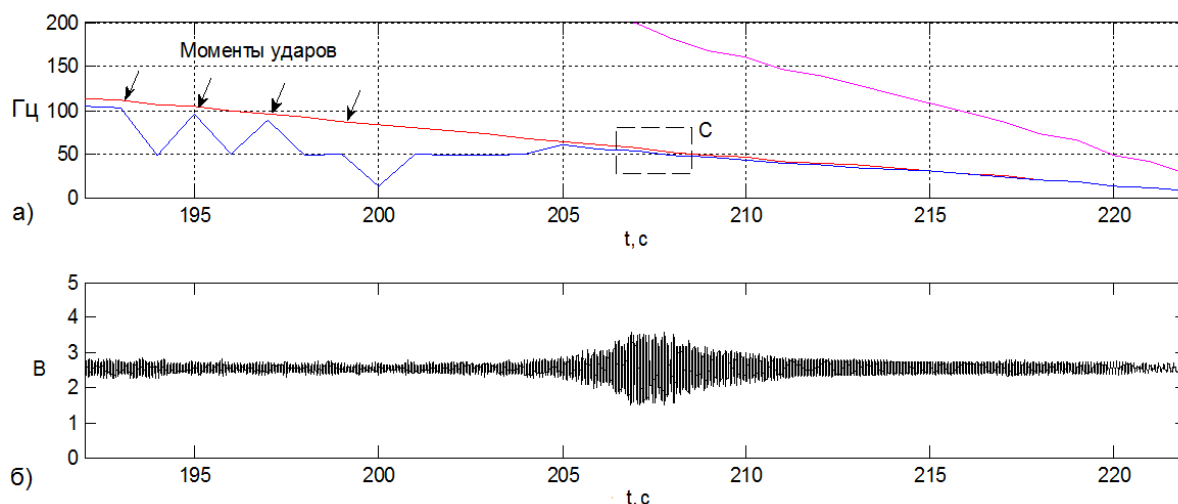


Рис. 5. Результаты испытаний ротора с абсолютно анизотропной опорой:
 а – диаграмма «время (с) – частоты (Гц)»: частоты вращения и прецессии (цвета кривых соответствуют рис. 3, а; С – область резонанса, возбуждённого дисбалансом;
 б – осциллограмма «время (с) – электронное напряжение (В)»: виброперемещения ротора в плоскости большей податливости абсолютно анизотропной опоры

Заключение

В условиях гибкого ротора на неравножестких опорах и небольшого конструктивного демпфирования угловая скорость прецессии при обкатке $|\Omega|$ близка к собственной частоте ротора $\tilde{\lambda}_{\min}$, которая соответствует направлению меньшей жесткости опор и установлению безотрывного взаимодействия между ротором и опорой с зазором.

Нижним пределом для скорости обкатки $|\Omega|$ является собственная частота ротора λ_{\max} , соответствующая направлению большей жесткости опор без взаимодействия с опорой, имеющей зазор.

При жесткостях опор, обеспечивающих для собственных частот ротора соотношение $\lambda_{\max} \geq \tilde{\lambda}_{\min}$, обкатка в системе невозможна.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-08-00171.

Библиографический список

1. Inoue T., Ishida Y., Fei G., Md Zahid H. Suppression of the forward rub in rotating machinery by an asymmetrically supported guide // *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*. 2011. V. 133, Iss. 2. DOI: 10.1115/1.4002120
2. Куракин А.Д., Нихамкин М.Ш., Семенов С.В. Динамика неуравновешенного гибкого ротора в анизотропных опорах при контакте со статором // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 4. С. 364-381. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.21
3. Никифоров А.Н. Об обкатке с проскальзыванием ротора по статору и влияние на её частоту трения и гироскопических моментов // *Справочник. Инженерный журнал с приложением*. 2018. № 9 (258). С. 21-31. DOI: 10.14489/hb.2018.09.pp.021-031
4. Никифоров А.Н. Об обкатке статора ротором со многими степенями свободы вследствие трения // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2018. № 10 (703). С. 4-17. DOI: 10.18698/0536-1044-2018-10-4-17

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL RESEARCH OF CONTINUOUS MOTION OF ROTOR ON ANISOTROPIC GAPPED ELASTIC SUPPORT

© 2019

- A. N. Nikiforov** Candidate of Science (Engineering), Senior Researcher;
Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy
of Sciences, Moscow, Russian Federation;
n.andre@mail.ru
- G. Ya. Panovko** Doctor of Science (Engineering), Chief Researcher;
Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy
of Sciences, Moscow, Russian Federation;
gpanovko@yandex.ru
- A. Ye. Shokhin** Candidate of Science (Engineering), Senior Researcher;
Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy
of Sciences, Moscow, Russian Federation;
shohinsn@mail.ru

Kinematic and dynamic features of flexible rotor rolling of an unlubricated uneven-stiffness gapped support are shown with the help of a theoretical model and full-scale tests. A combination of original approaches and well-known analytical and experimental methods is used. In particular, the motion equations are Lagrangian, derived in complex and complex-conjugate coordinates, and their solutions are sought in the exponential form, by excluding contact forces from consideration and by introducing a small parameter. Vibration measurements are not made on the rig frame using accelerometers, but at the source of vibration, i.e. by direct tracking of the rotor axle by a pair of eddy-current contactless displacement sensors installed in a XY configuration. Hence, the preciseness of the experimental data does not depend on the mechanical conductivity of the parts between the source rotor and the receiver sensors. As a result, the frequency, amplitude and existence domain of retrograde precession are reliably determined, and a conclusion is drawn that rolling under a certain combination of parameters is impossible in principle.

Anisotropic rotor system; mathematical and experimental model; rolling; slipping; precession rate.

Citation: Nikiforov A.N., Panovko G.Ya., Shokhin A.Ye. Experimental and theoretical research of continuous motion of rotor on anisotropic gapped elastic support. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2019. V. 18, no. 2. P. 156-168. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-2-156-168

References

1. Inoue T., Ishida Y., Fei G., Md Zahid H. Suppression of the forward rub in rotating machinery by an asymmetrically supported guide. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*. 2011. V. 133, Iss. 2. DOI: 10.1115/1.4002120

2. Kurakin A.D., Nikhamkin M.Sh., Semenov S.V. Dynamics of unbalanced flexible rotor with anisotropic supports during contact with the stator. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 4. P. 364-381. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.21. (In Russ.)

3. Nikiforov A.N. Whirl or whip of gyroscopic rotor rubbing stator and frequency of such processes. *Handbook. An Engineering Journal*. 2018. No. 9 (258). P. 21-31. DOI: 10.14489/hb.2018.09.pp.021-031. (In Russ.)

4. Nikiforov A.N. On the full annular rub in the flexible rotor - compliant stator system due to friction. Proceedings of Higher Educational Institutions. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*. 2018. No. 10 (703). P. 4-17. DOI: 10.18698/0536-1044-2018-10-4-17. (In Russ.)