УДК 533.6

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

© 2002 В. Г. Шахов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Для оперативного определения характеристик ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости на подвижной поверхности, помещенной в набегающий поток, предлагается использовать метод без применения интегральных соотношений, который является обобщением методов Швеца [1], Тарга [2] и др. Все соотношения разработанного метода получены для проницаемой поверхности, когда через нее возможен вдув или отсос той же самой жидкости. Первоначальная полиномиальная аппроксимация профиля продольной скорости в пограничном слое содержит коэффициенты, зависящие от продольной координаты. Установлены случаи, при которых основное дифференциальное уравнение метода решается в квадратурах. Для пограничного слоя на подвижной плоской пластине изучено влияние первоначального профиля скорости на коэффициент сопротивление трения.

1. При решении задачи об учете влияния вязкости при обтекании аэродинамического профиля вблизи экрана возникает необходимость расчета пограничного слоя на экране. Так как такую задачу удобнее решать при обращении движения, то пограничный слой необходимо рассчитывать при условии, что экран движется со скоростью набегающего потока, а на внешней границе пограничного слоя скорость невязкого течения, вызванная присутствием профиля, изменяется вдоль экрана. Так как разность скоростей экрана и внешнего невязкого течения мала, то можно ожидать, что во многих случаях режим течения в пограничном слое будет ламинарным. По этой же причине такое течение в пограничном слое можно рассматривать несжимаемым.

Обычно задача об аэродинамическом профиле вблизи экрана решается итерационными методами, что требует использования «быстрых» методов, в том числе и для расчета характеристик пограничного слоя. Такими методами в теории пограничного слоя являются интегральные методы и методы, предложенные Швецом [1], Таргом [2] и др., которые не используют интегральные соотношения. В данной статье проводится обобщение методов, не использующих интегральные соотношения, на случай ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости на подвижной проницаемой поверхности. Первоначальный профиль продольной скорости задается в более общей форме по сравнению с методами Швеца и Тарга, в которой коэффициенты полиномов по поперечной координате в пограничном слое зависят от продольной координаты.

Основное дифференциальное уравнение оказывается обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка с переменными коэффициентами, которое имеет один и тот же вид как при обобщении метода Швеца, так и при обобщении метода Тарга, тогда как профили продольной скорости для этих двух методов отличаются друг от друга. Если подвижная поверхность непроницаемая, а коэффициенты первоначальной полиномиальной аппроксимации профиля продольной скорости в пограничном слое являются постоянными, как в работах Швеца и Тарга, то основное дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах. Для случая подвижной плоской пластины изучено влияние порядка полинома первоначальной аппроксимации профиля продольной скорости внутри пограничного слоя и приведено сравнение коэффициентов сопротивления трения с полученными методом интегральных соотношений [3] и точным методом [4].

2. Дифференциальные уравнения неразрывности и движения в ламинарном пограничном слое несжимаемой жидкости имеют вид [5], [6]

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}=0\,, \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial y}=UU'+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,, \tag{2}$$

где x, y – продольная (вдоль направления течения и движения поверхности) и поперечная (по нормали к обтекаемой поверхности) координаты внутри пограничного слоя; u, w – составляющие скорости жидкости внутри пограничного слоя вдоль координатных линий x, y; $U(x)$ – скорость невязкого течения на внешней границе пограничного слоя (известная функция продольной координаты x); ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости; здесь и далее верхний индекс штрих обозначает дифференцирование по продольной координате x, т. е. $U'=\dfrac{dU}{dx}$ и т. д.

Система уравнений (1), (2) решается в предположении конечной толщины пограничного слоя $\delta(x)$ при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} &y=0: \quad u=u_w, \quad w=w_w;\\ &y=\delta: \quad u=U, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь скорость движения поверхности u_w и скорость вдува или отсоса на ее поверхности w_w в общем случае являются известными функциями продольной координаты x, т. е. $u_w=u_w(x)$ и $w_w=w_w(x)$.

Вводя новые переменные

$$\eta=y/\delta(x), \quad W=(w-\delta'\eta u)/\delta$$

и исключая при помощи уравнения неразрывности (1) и граничного условия (3) преобразованную поперечную скорость W в уравнении движения (2), последнее представим в форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\delta^2}{\nu}\Big(u\frac{\partial u}{\partial x}+W_w\frac{\partial u}{\partial \eta}- -\frac{\partial u}{\partial \eta}\int_0^\eta\frac{\partial u}{\partial x}d\eta-UU'\Big)-\frac{\delta\delta'}{\nu}\frac{\partial u}{\partial \eta}\int_o^\eta u d\eta, \tag{4}$$

в которой введено обозначение для преобразованной поперечной скорости вдува или отсоса на стенке: $W_w=W_w(x)=w_w(x)/\delta(x)$. Уравнение (4) необходимо проинтегрировать при граничных условиях:

$$\begin{aligned} &\eta=0: \quad u=u_w(x),\\ &\eta=1: \quad u=U(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}=0. \end{aligned} \tag{5}$$

3. Для приближенного интегрирования уравнения (4) его правая часть, следуя работам Швеца и Тарга, заменяется приближенным значением, получаемым в результате подстановки вместо скорости и ее полиномиального представления $\tilde{u}$, которое для задачи с подвижной поверхностью можно взять в виде

$$\tilde{u}=u_w+(U-u_w)\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\eta^i, \tag{6}$$

где коэффициенты $a_i(x)$ – известные функции.

Следуя Швецу, интегрирование уравнения (4) с учетом (6) и двух граничных условий (5) для u приводит к следующему выражению для профиля продольной скорости внутри пограничного слоя:

$$u=u_w+(U-u_w)\eta+\frac{\delta^2}{\nu}F_{11}(x,\eta)- -\frac{\delta\delta'}{\nu}F_{12}(x,\eta), \tag{7}$$

в котором введены обозначения

$$F_{11}=u_wU'S_{111}+u_w(U-u_w)S_{112}+ +(U-u_w)U'S_{113}+(U-u_w)^2S_{114}+ +W_w(U-u_w)S_{115}-\frac{1}{2}UU'(\eta^2-\eta),$$

$$F_{12}=u_w(U-u_w)S_{121}+(U-u_w)^2S_{122},$$

$$S_{111}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(\eta^{i+2}-\eta)}{(i+1)(i+2)},$$

$$S_{112}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i'(\eta^{i+2}-\eta)}{(i+1)(i+2)},$$

$$S_{113}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-i+1)a_ia_j(\eta^{i+j+2}-\eta)}{(j+1)(i+j+1)(i+j+2)},$$

$$S_{114}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-i+1)a_ia_j'(\eta^{i+j+2}-\eta)}{(j+1)(i+j+1)(i+j+2)},$$

$$S_{115}-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(\eta^{i+2}-\eta)}{i+1},$$

$$S_{121}=\sum_{i=1}^{n}\frac{ia_i(\eta^{i+2}-\eta)}{(i+1)(i+2)},$$

$$S_{122}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{ia_ia_j(\eta^{i+j+2}-\eta)}{(i+1)(i+j+1)(i+j+2)}.$$

Тарг для нахождения профиля продольной скорости в пограничном слое предложил использовать граничные условия: $u=0$ при $\eta=0$ и $\partial u/\partial\eta=0$ при $\eta=1$ в (5). Тогда вместо соотношения (7) имеет место выражение

$$u=u_w+\frac{\delta^2}{\nu}F_{21}(x,\eta)-\frac{\delta\delta'}{\nu}F_{22}(x,\eta), \qquad (8)$$

где обозначено

$$F_{21}=u_wU'S_{211}+u_w(U-u_w)S_{212}+$$
$$+(U-u_w)U'S_{213}+(U-u_w)^2S_{214}+$$
$$+W_w(U-u_w)S_{215}-UU'\left(\frac{\eta^2}{2}-\eta\right),$$

$$F_{22}=u_w(U-u_w)S_{221}+(U-u_w)^2S_{222},$$

$$S_{211}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i+1}\left(\frac{\eta^{i+2}}{i+2}-\eta\right),$$

$$S_{212}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i'}{i+1}\left(\frac{\eta^{i+2}}{i+2}-\eta\right),$$

$$S_{213}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-i+1)a_ia_j}{(j+1)(i+j+1)}\left(\frac{\eta^{i+j+2}}{i+j+2}-\eta\right),$$

$$S_{214}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-i+1)a_ia_j'}{(i+1)(i+j+1)}\left(\frac{\eta^{i+j+2}}{i+j+2}-\eta\right),$$

$$S_{215}=\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\frac{\eta^{i+1}}{i+1}-\eta\right),$$

$$S_{221}=\sum_{i=1}^{n}\frac{ia_i}{i+1}\left(\frac{\eta^{i+2}}{i+2}-\eta\right),$$

$$S_{222}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{ia_ia_j}{(j+1)(i+j+1)}\left(\frac{\eta^{i+j+2}}{i+j+2}-\eta\right).$$

Дифференциальное уравнение для толщины пограничного слоя δ, которая пока остается неизвестной, следует из удовлетворения профиля скорости (7) граничному условию $(\partial u/\partial\eta)=0$ при $\eta=1$, или профиля скорости (8) граничному условию $u=U$ при $\eta=1$. Выполняя эти операции, приходим для (7) и (8) к одному и тому же обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\delta\delta'}{\nu}Q_1(x)-\frac{\delta^2}{\nu}Q_2(\delta,x)=U-u_w \qquad (9)$$

с обозначениями

$$Q_1=u_w(U-u_w)s_{11}+(U-u_w)^2s_{12},$$
$$Q_2=u_wU's_{21}+u_w(U-u_w)s_{22}+(U-u_w)U's_{23}+$$
$$+(U-u_w)^2s_{24}+\frac{w_w}{\delta}s_{25}-\frac{1}{2}UU',$$

$$s_{11}=\sum_{i-1}^{n}\frac{ia_i}{i+2},$$

$$s_{12}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{ia_ia_j}{(j+1)(i+j+2)},$$

$$s_{21}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i+2},$$

$$s_{22}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i'}{i+2},$$

$$s_{23}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-i+1)a_ia_j}{(j+1)(i+j+2)},$$

$$s_{24}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(j=i+1)a_ia_j'}{(j+1)(i+j+1)},$$

$$s_{25} = \sum_{i=1}^{n} \frac{ia_i}{i+1}.$$

4. Численное решение уравнения (9) при условии, что $\delta = \delta_0$ при $x = 0$ может быть выполнено любым методом, даже в случае, когда $\delta_0 = 0$. Если на подвижной поверхности отсутствует вдув или отсос, то Q_2 становится зависящей только от продольной координаты x. В этом случае дифференциальное уравнение (9) будет линейным относительно δ^2, решение которого имеет вид

$$\frac{\delta^2}{\nu} = exp\left(2\int_0^x \frac{Q_2(\xi)}{Q_1(\xi)} d\xi\right) \times$$
$$\times \left[2\int_0^x \frac{U - u_w}{Q_1(\xi)} exp\left(-2\int_0^\xi \frac{Q_2(\zeta)}{Q_1(\zeta)}\right) d\xi + \frac{\delta_0^2}{\nu}\right]. \qquad (10)$$

Наиболее часто при задании приближенного полиномиального представления скорости в пограничном слое (6) коэффициенты a_i принимаются постоянными. В этом случае величины s_{22} и s_{24} обращаются в нуль, а $s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{23}$ и s_{25} будут константами, что существенно упрощает интегралы, входящие в решение (10).

5. Наиболее просто записывается решение для случая ламинарного пограничного слоя на подвижной плоской пластине, когда $U = const,\ u_w = const$. Если $w_w = 0$ и $\delta_0 = 0$, то толщина пограничного слоя, как для случая неподвижной пластины, изменяется по следующему закону от продольной координаты x:

$$\frac{\delta^2}{\nu} = \frac{2x}{s_{12}U + (s_{11} - s_{12})u_w}. \qquad (11)$$

Коэффициент сопротивления трения c_f определяется формулой

$$c_f = \frac{2\tau_0}{\rho U^2},$$

в которой ρ – плотность жидкости; τ_0 – касательное напряжение на подвижной пластине, которое находится из профиля продольной скорости в пограничном слое при известной динамической вязкости $\mu = \nu\rho$ как

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Подстановка закона изменения толщины пограничного слоя (11) в выражения для профиля продольной скорости в пограничном слое (7) или (8) приводит к одной и той же формуле для коэффициента сопротивления трения подвижной пластины:

$$\frac{c_f}{c_{f0}} = \frac{1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left(1 - \frac{u_w}{U}\right)}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha}\frac{u_w}{U}}}\left(1 - \frac{u_w}{U}\right), \qquad (12)$$

в которой введены обозначения

$$\alpha = s_{12}, \quad \beta = s_{11} - s_{12},$$
$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{ia_i a_j}{(j+1)(i+j+1)}, \quad \beta_1 = \sum_{i-1}^{n} \frac{ia_i}{i+1} - \alpha_1,$$

а c_{f0} – коэффициент сопротивления трения неподвижной плоской пластины при $u_w = 0$.

В табл. 1 приводятся значения коэффициентов $\alpha,\ \alpha_1,\ \beta,\ \beta_1$ для различных полиномиальных представлений профиля продольной скорости (6). Цифра I соответствует линейному профилю, использованному Швецом [1]:

$$u = u_w + (U - u_w)\eta,$$

цифра II – параболическому профилю, использованному Слезкиным [7] для варианта метода Тарга,

$$u = u_w + (U - u_w)(2\eta - \eta^2),$$

цифра III – полиному третьей степени, как в работе Тарга [2] для случая неподвижной поверхности:

$$u = u_w + (U - u_w)(3\eta - \eta^3)/2,$$

Таблица 1

Значения коэффициентов, входящих в формулу (12)

Профиль скорости	α	β	α_1	β_1
I	1/8	5/24	1/6	1/3
II	7/90	4/45	2/15	1/5
III	11/128	73/640	39/280	33/140
IV	773/12600	907/12600	37/315	23/126

цифра IV – полиному четвертой степени, как в работе [3] при использовании интегрального метода в задаче о пограничном слое на подвижной поверхности:

$$u = u_w + (U - u_w)(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4).$$

Влияние формы профиля продольной скорости (6) на сопротивление трения подвижной плоской пластины показано в табл. 2, в которой цифры I, II, III и IV соответствуют тем же начальным профилям продольной скорости, что и в табл. 1, результаты расчетов интегральным методом по формуле [3]

$$\frac{c_f}{c_{f0}} = \left(1 - \frac{u_w}{U}\right)\sqrt{1 + \frac{115}{74}\frac{u_w}{U}}$$

соответствуют цифре V, а точные значения из работы [4] – цифре VI.

Из результатов, представленных в последней строке табл. 2, следует, что наименьшую точность имеет предлагаемый метод в случае, когда используется линейное представление профиля продольной скорости (6). Во всех остальных рассмотренных случаях точность предлагаемого метода лучше интегрального метода [3] (см. столбец, помеченный цифрой VI в табл. 2). Наибольшую точность показал метод при использовании квадратичного представления профиля продольной скорости.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-ННИО-а (DFG) № 01-01-04004.

Таблица 2

Значения c_f / c_{f0}

u_w / U	c_f / c_{f0}					
	I	II	III	IV	V	VI
0,0	1	1	1	1	1	1
0,2	0,970	0,938	0,952	0,944	0,916	0,944
0,4	0,837	0,795	0,813	0,803	0,765	0,799
0,6	0,622	0,585	0,601	0,592	0,556	0,586
0,8	0,340	0,318	0,328	0,322	0,300	0,317
1,0	0	0	0	0	0	0
1,2	-0,393	-0,364	-0,376	-0,369	-0,339	-0,361
1,4	-0,833	-0,769	-0,797	-0,781	-0,713	-0,761
1,6	-1,316	-1,213	-1,259	-1,233	-1,120	-1,198
1,8	-1,840	-1,693	-1,758	-1,722	-1,559	-1,668
2,0	-2,402	-2,207	-2,294	-2,246	-2,027	-2,170
Наибольшая ошибка, %	10,69	1,71	5,71	3,50	6,59	–

Список литературы

1. Швец М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. ПММ, 1949, т. 13, № 3. С. 257 – 266.

2. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 420 с.

3. Шахов В. Г. Интегральный метод расчета характеристик ламинарного пограничного слоя на подвижной поверхности // Управление движением и навигация летательных аппаратов. Сб. науч. тр. X Всеросс. н.-т. семинара. Самара: СГАУ, 2002. С. 326 – 331.

4. Цыганов М. В., Шахов В. Г. Ламинарный пограничный слой на пластине с движущейся поверхностью / Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1987. 14 с. Деп. в ВИНИТИ, №1379-В87.

5. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. – 480 с.

6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Физматгиз, 1974. – 712 с.

7. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955. – 520 с.

APPROXIMATE SOLUTION OF A LAMINAR BOUNDARY LAYER ON MOVING SURFACES WITHOUT USE OF INTEGRAL RELATIONS

© 2002 V. G. Shakhov

Samara State Aerospace University

A method for quick estimations of laminar boundary layer characteristics in incompressible fluid on a moving wall is presented. The method is a generalization of methods proposed by Shvets [1], Targ [2] and other and it does not use integral relations. All results of the method are obtained for permeable surfaces with possible blow or suction of the same fluid. Primary polynomial approximations of longitudinal velocity profile within boundary layer contain coefficients, which depend on longitudinal coordinate. Cases when basic differential equation is solvable in quadratures are established. Influence of primary polynomial approximations on friction drag coefficient for moving flat plate is studied.