

## ПОЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО НАНОСПУТНИКА ФОРМАТА CUBESAT ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО И АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТОВ

© 2019

**Е. В. Барина** кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [L5545@yandex.ru](mailto:L5545@yandex.ru)

**И. А. Тимбай** доктор технических наук, профессор, профессор межвузовской кафедры космических исследований; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [timbai@mail.ru](mailto:timbai@mail.ru)

Рассматривается движение вокруг центра масс динамически симметричного неуправляемого наноспутника формата CubeSat на круговой орбите под действием аэродинамического и гравитационного моментов. Определены положения равновесия наноспутника в траекторной системе координат с учётом того, что коэффициент аэродинамической силы лобового сопротивления зависит от пространственного угла атаки и угла собственного вращения. Получены формулы, позволяющие вычислить значения углов атаки, прецессии и собственного вращения, соответствующие положениям равновесия, в зависимости от инерционно-массовых и геометрических параметров наноспутника и высоты орбиты. Показано, что в случае преобладания гравитационного момента над аэродинамическим существует 16 положений равновесия, в случае преобладания аэродинамического момента над гравитационным существует 8 положений равновесия, в случае соизмеримых величин аэродинамического и гравитационного моментов возможно 8, 12 или 16 положений равновесия. По полученным формулам вычислены положения равновесия наноспутника SamSat-QB50. Указаны диапазоны высот, на которых наноспутник SamSat-QB50 имеет 8, 12 или 16 положений равновесия относительно центра масс.

*Наноспутник формата CubeSat; положения углового равновесия; аэродинамический момент; гравитационный момент; угол атаки; угол прецессии; угол собственного вращения.*

---

**Цитирование:** Барина Е.В., Тимбай И.А. Положения относительного равновесия динамически симметричного наноспутника формата CubeSat под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. Т. 18, № 2. С. 21-32. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-2-21-32

### Введение

Обеспечение заданной ориентации наноспутников в пространстве является важным вопросом, так как от этого зависит выполнение многих целевых задач полёта. Необходимая ориентация наноспутника может обеспечиваться с помощью пассивных или комбинированных систем стабилизации. При создании этих систем необходимо учитывать характер неуправляемого движения наноспутника относительно центра масс под действием моментов внешних сил. При изучении неуправляемого движения важной задачей является определение положений равновесий наноспутника относительно центра масс. Знание положений равновесия и характера движения наноспутника в их окрестности позволяет использовать моменты внешних сил для обеспечения необходимой ориентации.

В работах Сарычева В.А. рассматривается динамика спутника со смещённым центром давления относительно центра масс по трём координатам и тремя не равными главными моментами инерции при действии аэродинамического и гравитационного

моментов. Предложен символично-численный метод определения всех положений равновесия спутника в орбитальной системе координат [1-3]. В этих работах «действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника относительно воздуха» и коэффициент данной силы не зависит от ориентации аппарата относительно набегающего потока, то есть является постоянным, что достаточно точно выполняется для формы спутника, близкой к сферической.

Работа посвящена определению положений равновесия углового движения наноспутника формата CubeSat на круговой орбите под действием аэродинамического и гравитационного моментов. Отличительной особенностью наноспутников формата CubeSat является то, что они имеют форму прямоугольного параллелепипеда и, как следствие, коэффициент аэродинамической силы лобового сопротивления зависит от ориентации спутника относительно набегающего потока (углов атаки и собственного вращения). Кроме того, максимальное и минимальное значения данного коэффициента значительно отличаются (например, для наноспутника CubeSat 3U отношение максимального значения коэффициента силы лобового сопротивления к минимальному равно 4,24).

В работе определены положения равновесия динамически симметричного наноспутника формата CubeSat при смещении центра масс от геометрического центра по трём осям, при движении по круговой орбите под действием аэродинамического и гравитационного моментов.

### Математическая модель

Для описания движения наноспутника относительно центра масс введены две системы координат (СК): траекторная (совпадающая с орбитальной в случае круговой орбиты) и связанная. Связь между системами координат определяется с помощью углов Эйлера.

Матрица перехода от траекторной системы координат к связанной определяется следующим образом:

$$B_{пер} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \sin \psi & -\sin \alpha \cos \psi \\ \sin \alpha \sin \varphi & \cos \varphi \cos \psi - \cos \alpha \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \sin \psi + \cos \alpha \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \alpha \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \alpha \cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \alpha \cos \varphi \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\alpha$  – пространственный угол атаки (угол между продольной осью наноспутника и вектором скорости центра масс),  $\psi$  – угол прецессии (угол между плоскостью полёта и плоскостью угла атаки),  $\varphi$  – угол собственного вращения (угол между плоскостью угла атаки и поперечной осью наноспутника).

Гравитационный момент в связанной с наноспутником системе координат имеет следующие проекции [4]:

$$\begin{aligned} M_{xg} &= 3 \frac{\mu}{R^3} (C - B) b_{23} b_{33}, \\ M_{yg} &= 3 \frac{\mu}{R^3} (A - C) b_{13} b_{33}, \\ M_{zg} &= 3 \frac{\mu}{R^3} (B - A) b_{13} b_{23}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $A, B, C$  – главные центральные моменты инерции наноспутника;  $b_{ij}$  – элементы матрицы перехода  $B_{nep}$ ;  $\mu$  – гравитационная постоянная Земли;  $R$  – расстояние центра масс спутника от центра притяжения.

Для круговой орбиты справедливо соотношение  $\frac{\mu}{R^3} = \omega_{orb}^2$ , где  $\omega_{orb}$  – орбитальная угловая скорость.

Аэродинамический момент для наноспутников, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, в связанной с наноспутником системе координат можно представить в следующем виде [5]:

$$\begin{aligned} M_{ax} &= -C_{xa} \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (\Delta y b_{31} - \Delta z b_{21}), \\ M_{ay} &= -C_{xa} \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (\Delta z b_{11} - \Delta x b_{31}), \\ M_{az} &= -C_{xa} \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (\Delta x b_{21} - \Delta y b_{11}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $C_{xa} = c_0 (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|))$  – коэффициент аэродинамической силы лобового сопротивления;  $q = \rho V^2 / 2$  – скоростной напор;  $\rho$  – плотность атмосферы на данной высоте;  $V$  – скорость полёта наноспутника;  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  – положение центра давления (геометрического центра) относительно центра масс;  $S_{xap}$  – характерная площадь наноспутника;  $c_0$  – коэффициент, который может принимать значения от 2 до 3 в зависимости от физических свойств газа и поверхности наноспутника, для проектных проработок принимается равным 2,2;  $k$  – отношение боковой площади поверхности наноспутника к характерной площади.

Так как оси связанной СК  $Oxuz$  являются главными центральными осями инерции наноспутника, то уравнения пространственного движения наноспутника относительно центра масс под действием аэродинамического и гравитационного моментов можно записать в следующем виде [4]:

$$\begin{aligned} A \dot{\omega}_x + (C - B) \omega_y \omega_z &= M_{gx} + M_{ax}, \\ B \dot{\omega}_y + (A - C) \omega_z \omega_x &= M_{gy} + M_{ay}, \\ C \dot{\omega}_z + (B - A) \omega_x \omega_y &= M_{gz} + M_{az}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции угловой скорости  $\vec{\omega}$  на оси связанной СК.

Вектор угловой скорости можно представить в виде:

$$\vec{\omega} = \vec{\psi} + \vec{\phi} + \vec{\alpha} + \vec{\omega}_{orb}.$$

Тогда кинематические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \cos \alpha + \dot{\phi} + \omega_{orb} b_{12}, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \alpha + \dot{\alpha} \cos \varphi + \omega_{orb} b_{22}, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \alpha - \dot{\alpha} \sin \varphi + \omega_{orb} b_{32}. \end{aligned} \quad (4)$$

Динамические уравнения Эйлера (3) и кинематические соотношения (4) составляют полную систему уравнений движения наноспутника относительно центра масс.

Положением равновесия называется такое положение наноспутника, в котором наноспутник будет находиться всё время, если в начальный момент времени он находился в этом положении и скорости всех его точек были равны нулю [6]. Из определения следует, что скорости изменения углов равны нулю ( $\dot{\alpha} = 0, \dot{\psi} = 0, \dot{\phi} = 0$ ) и тогда уравнения (4) примут вид:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_{op\bar{o}} b_{12}, \\ \omega_y &= \omega_{op\bar{o}} b_{22}, \\ \omega_z &= \omega_{op\bar{o}} b_{32}.\end{aligned}\tag{5}$$

Подставляя проекции аэродинамического (1) и гравитационного (2) моментов и систему уравнений (5) в динамические уравнения Эйлера (3), получаем систему для определения положений равновесия:

$$\begin{aligned}(C - B)\omega_{op\bar{o}}^2 (b_{22}b_{32} - 3b_{23}b_{33}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|))(\Delta y b_{31} - \Delta z b_{21}) &= 0, \\ (A - C)\omega_{op\bar{o}}^2 (b_{32}b_{12} - 3b_{33}b_{13}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|))(\Delta z b_{11} - \Delta x b_{31}) &= 0, \\ (B - A)\omega_{op\bar{o}}^2 (b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|))(\Delta x b_{21} - \Delta y b_{11}) &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

В дальнейшем удобнее использовать эквивалентную систему:

$$\begin{aligned}(A - B)\omega_{op\bar{o}}^2 b_{12}b_{13} + (C - B)\omega_{op\bar{o}}^2 b_{32}b_{33} &= 0, \\ 3(A - B)\omega_{op\bar{o}}^2 b_{13}b_{11} + 3(C - B)\omega_{op\bar{o}}^2 b_{31}b_{33} - \\ - c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|))(\Delta x b_{13} + \Delta y b_{23} + \Delta z b_{33}) &= 0, \\ (A - B)\omega_{op\bar{o}}^2 b_{12}b_{11} + (C - B)\omega_{op\bar{o}}^2 b_{32}b_{31} + \\ + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|))(\Delta x b_{12} + \Delta y b_{22} + \Delta z b_{32}) &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Определим положения равновесия для динамически симметричного наноспутника формата CubeSat со смещением центра масс от геометрического центра по трём координатам ( $A \neq B = C$  и  $\Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0, \Delta z \neq 0$ ).

В этом случае система (6) примет вид:

$$\begin{aligned}c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|))(\Delta y b_{31} - \Delta z b_{21}) &= 0, \\ (A - B)\omega_{op\bar{o}}^2 (b_{32}b_{12} - 3b_{33}b_{13}) + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|))(\Delta z b_{11} - \Delta x b_{31}) &= 0, \\ (A - B)\omega_{op\bar{o}}^2 (b_{12}b_{22} - 3b_{13}b_{23}) - c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|))(\Delta x b_{21} - \Delta y b_{11}) &= 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Система (7) примет вид:

$$\begin{aligned} (A-B)\omega_{op6}^2 b_{12}b_{13} &= 0, \\ 3(A-B)\omega_{op6}^2 b_{13}b_{11} - c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|))(\Delta x b_{13} + \Delta y b_{23} + \Delta z b_{33}) &= 0, \\ (A-B)\omega_{op6}^2 b_{12}b_{11} + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|))(\Delta x b_{12} + \Delta y b_{22} + \Delta z b_{32}) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из первого уравнения (9) получаем:

$$b_{12} = 0 \text{ или } b_{13} = 0, \text{ то есть } \sin \alpha \sin \psi = 0 \text{ или } \sin \alpha \cos \psi = 0.$$

Тогда

- 1)  $\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \alpha = \pi$ ;
- 2)  $\sin \psi = 0 \Rightarrow \psi = 0, \psi = \pi$ ;
- 3)  $\cos \psi = 0 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2}, \psi = \frac{3\pi}{2}$ .

Положения равновесия, когда  $\alpha=0$  или  $\alpha = \pi$ , возможны только в случае, если  $\Delta y = \Delta z = 0$ . Этот случай рассмотрим позднее.

При  $\Delta y \neq 0, \Delta z \neq 0$  следует рассмотреть  $\psi_1 = 0, \psi_2 = \pi, \psi_3 = \frac{\pi}{2}, \psi_4 = \frac{3\pi}{2}$ .

Из первого уравнения (8) получаем выражение для угла собственного вращения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta z} \Rightarrow \varphi_1 = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta z} + \pi, & \Delta z < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta z}, & \Delta z > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Второе значение угла собственного вращения  $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ .

Для всех возможных сочетаний углов прецессии и собственного вращения (8 возможных случаев) определены значения угла атаки. После решения соответствующих квадратных уравнений относительно  $\operatorname{ctg} \alpha$  были выбраны значения, которые удовлетворяют всем ограничениям, а именно – действительные значения со знаком, соответствующим выбранной четверти.

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} w &= k(|\Delta y| + |\Delta z|) > 0, \\ u &= \left( \sqrt{w} + \sqrt{|\Delta x|} \right)^2 = \left( \sqrt{k(|\Delta y| + |\Delta z|)} + \sqrt{|\Delta x|} \right)^2, \\ v &= \frac{2\omega_{op6}^2 (B-A)}{c_0 \rho V^2 S_{xap}} = \frac{2(B-A)}{c_0 \rho (H + R_3)^2 S_{xap}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $R_3$  – радиус Земли;  $H$  – высота орбиты над поверхностью Земли.

Окончательный результат представлен в виде табл. 1, 2.

Таблица 1. Положения равновесия для случая  $v > 0, (B > A)$

		$\Delta x < 0$			$\Delta x > 0$		
		$v < \frac{u}{3}$	$\frac{u}{3} < v < u$	$u < v$	$v < \frac{u}{3}$	$\frac{u}{3} < v < u$	$u < v$
$\psi_1 = 0$ ( $\psi_3 = \pi$ )	$\varphi_1$	$\alpha_3$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	$\alpha_1$	$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$	$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$
	$\varphi_2$	$\alpha_6$	$\alpha_6$	$\alpha_6$	$\alpha_8$	$\alpha_8$	$\alpha_8$
$\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ ( $\psi_4 = \frac{3\pi}{2}$ )	$\varphi_1$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{11}$	$\alpha_9$	$\alpha_9$	$\alpha_9$
	$\varphi_2$	$\alpha_{14}$	$\alpha_{14}$	$\alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}$	$\alpha_{16}$	$\alpha_{16}$	$\alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{16}$
Число положений равновесия		8	12	16	8	12	16

Таблица 2. Положения равновесия для случая  $v < 0, (A > B)$

		$\Delta x < 0$			$\Delta x > 0$		
		$ v  < \frac{u}{3}$	$\frac{u}{3} < v < u$	$u <  v $	$ v  < \frac{u}{3}$	$\frac{u}{3} <  v  < u$	$u <  v $
$\psi_1 = 0$ ( $\psi_3 = \pi$ )	$\varphi_1$	$\alpha_3$	$\alpha_3$	$\alpha_3$	$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\alpha_1$
	$\varphi_2$	$\alpha_6$	$\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$	$\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$	$\alpha_8$	$\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8$	$\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8$
$\psi_2 = \frac{\pi}{2}$ ( $\psi_4 = \frac{3\pi}{2}$ )	$\varphi_1$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{11}$	$\alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}$	$\alpha_9$	$\alpha_9$	$\alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{12}$
	$\varphi_2$	$\alpha_{14}$	$\alpha_{14}$	$\alpha_{14}$	$\alpha_{16}$	$\alpha_{16}$	$\alpha_{16}$
Число положений равновесия		8	12	16	8	12	16

Здесь

$$\varphi_1 = \begin{cases} \arctg \frac{\Delta y}{\Delta z} + \pi, & \Delta z < 0, \\ \arctg \frac{\Delta y}{\Delta z}, & \Delta z > 0, \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi,$$

$$\alpha_{1,2} = \arctg \left( \frac{-(w - 3v - \Delta x) \pm \sqrt{(w - 3v - \Delta x)^2 + 4\Delta x w}}{2\sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}} \right),$$

$$\alpha_{3,4} = \arctg \left( \frac{-(w - 3v + \Delta x) \pm \sqrt{(w - 3v + \Delta x)^2 - 4\Delta x w}}{-2\sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}} \right),$$

$$\alpha_{3,6} = \operatorname{arccctg} \left( \frac{-(-w-3v-\Delta x) \pm \sqrt{(-w-3v-\Delta x)^2 - 4\Delta x w}}{-2\sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}} \right),$$

$$\alpha_{7,8} = \operatorname{arccctg} \left( \frac{-(-w-3v+\Delta x) \pm \sqrt{(-w-3v+\Delta x)^2 + 4\Delta x w}}{2\sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}} \right),$$

$$\alpha_{9,10} = \operatorname{arccctg} \left( \frac{-(w+v-\Delta x) \pm \sqrt{(w+v-\Delta x)^2 + 4\Delta x w}}{2\sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}} \right),$$

$$\alpha_{11,12} = \operatorname{arccctg} \left( \frac{-(w+v+\Delta x) \pm \sqrt{(w+v+\Delta x)^2 - 4\Delta x w}}{-2\sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}} \right),$$

$$\alpha_{13,14} = \operatorname{arccctg} \left( \frac{-(-w+v-\Delta x) \pm \sqrt{(-w+v-\Delta x)^2 - 4\Delta x w}}{-2\sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}} \right),$$

$$\alpha_{15,16} = \operatorname{arccctg} \left( \frac{-(-w+v+\Delta x) \pm \sqrt{(-w+v+\Delta x)^2 + 4\Delta x w}}{2\sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2}} \right),$$

где верхний знак соответствует первому индексу, нижний знак – второму индексу.

Из табл. 1, 2 можно определить условия, при которых изменяется число положений относительного равновесия:

при  $|v| < \frac{u}{3} - 8$  положений относительного равновесия, что объясняется преобладанием аэродинамического момента над гравитационным;

при  $\frac{u}{3} < |v| < u - 12$  положений относительного равновесия, когда гравитационный и аэродинамический моменты соизмеримы;

при  $u < |v| - 16$  положений относительного равновесия, что объясняется преобладанием гравитационного момента над аэродинамическим.

Приведём результаты для случая, когда  $A \neq B = C$ ,  $\Delta x \neq 0$  и  $\Delta y = \Delta z = 0$ . В этом случае система (9) примет вид:

$$(A-B)\omega_{op\sigma}^2 b_{12} b_{13} = 0,$$

$$3(A-B)\omega_{op\sigma}^2 b_{13} b_{11} - c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} \Delta x b_{13} (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|)) = 0, \quad (12)$$

$$(A-B)\omega_{op\sigma}^2 b_{12} b_{11} + c_0 \frac{\rho V^2}{2} S_{xap} \Delta x b_{12} (|b_{11}| + k(|b_{21}| + |b_{31}|)) = 0.$$

Получаем, что при любом соотношении аэродинамического и гравитационного моментов имеют место два положения равновесия по углу атаки:  $\alpha=0$  и  $\alpha=\pi$  (при любых значениях углов прецессии и собственного вращения). Кроме того, при уменьшении влияния аэродинамического момента (то есть при выполнении условий

$v > |\Delta x|/3$  или  $v > |\Delta x|$ ) появляются положения равновесия по углу атаки, зависящие от угла собственного вращения  $\varphi$  при фиксированных значениях угла прецессии  $\psi$ . Окончательный результат приведён в табл. 3.

Таблица 3. Положения равновесия для случая  $\Delta x \neq 0, \Delta y = \Delta z = 0$

	$\Delta x > 0$ и $v > 0$ или $\Delta x < 0$ и $v < 0$			$\Delta x < 0$ и $v > 0$ или $\Delta x > 0$ и $v < 0$		
	$ v  < \frac{ \Delta x }{3}$	$\frac{ \Delta x }{3} <  v  <  \Delta x $	$ \Delta x  <  v $	$ v  < \frac{ \Delta x }{3}$	$\frac{ \Delta x }{3} <  v  <  \Delta x $	$ \Delta x  <  v $
$\psi_1 = 0 (\psi_3 = \pi)$	-	$\alpha_2$	$\alpha_2$	-	$\alpha_1$	$\alpha_1$
$\psi_2 = \frac{\pi}{2} (\psi_4 = \frac{3\pi}{2})$	-	-	$\alpha_3$	-	-	$\alpha_4$

Здесь  $\alpha_{1,2} = \text{arccctg} \left( \frac{-\Delta x k (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)}{3v \pm \Delta x} \right)$ ,  $\alpha_{3,4} = \text{arccctg} \left( \frac{\Delta x k (|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)}{v \mp \Delta x} \right)$ .

### Определение положений равновесия для наноспутника SamSatQB50

С использованием полученных формул определены положения равновесия для наноспутника SamSat-QB50, который был создан в Самарском национальном исследовательском университете имени академика С.П. Королёва в рамках международного университетского проекта QB50 и предназначался для исследования термосферы Земли в составе группировки наноспутников формата CubeSat [7]. Рассмотрены различные значения высоты круговой орбиты. В работе использована стандартная плотность атмосферы согласно ГОСТ 4401-81 [8].

Характеристики наноспутника:

$$m = 2,1 \text{ кг}, \quad l = 0,32 \text{ м}, \quad a = 0,1 \text{ м}, \quad S_{\text{хар}} = a^2 = 0,01 \text{ м}^2, \quad k = \frac{l}{a} = 3,2,$$

$$A = 0,0051 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad B = C = 0,016 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$\Delta x = -0,061 \text{ м}, \quad \Delta y = -0,0013 \text{ м}, \quad \Delta z = -0,00053 \text{ м}.$$

Другие параметры:

$$c_0 = 2,2, \quad R_3 = 6371000 \text{ м}.$$

При подстановке в (11) получаем:

$$w = k (|\Delta y| + |\Delta z|) = 0,0045 \text{ м},$$

$$u = \left( \sqrt{w} + \sqrt{|\Delta x|} \right)^2 = 0,049 \text{ м}, \quad \frac{u}{3} = 0,016 \text{ м}.$$

При высоте  $H = 400000 \text{ м}$ ,  $\rho(H) = 2,79 \cdot 10^{-12} \text{ кг/м}^3$  получим



$$v = \frac{2\omega_{орб}^2 (B - A)}{c_0 \rho V^2 S_{хар}} = \frac{2(B - A)}{c_0 \rho (H + R_3)^2 S_{хар}} = 0,0077 \text{ м} > 0,$$

Так как на этой высоте  $0 < v < \frac{u}{3}$ , воспользуемся первым столбцом табл. 1. На данной высоте наноспутник имеет 8 положений относительного равновесия, что объясняется преобладанием аэродинамического момента над гравитационным. Результаты вычислений приведены в табл. 4.

Таблица 4. Положения относительного равновесия SamSat-QB50 на высоте  $H = 400\,000$  м

	$\psi$ , град	$\varphi$ , град	$\alpha$ , град		$\psi$ , град	$\varphi$ , град	$\alpha$ , град
1	0	247,5	179	5	180	247,5	179
2	0	67,5	2	6	180	67,5	2
3	90	247,5	178,5	7	270	247,5	178,5
4	90	67,5	1	8	270	67,5	1

При высоте  $H = 500\,000$  м,  $\rho(H) = 0,521 \cdot 10^{-12} \text{ кг/м}^3$ ,  $v = 0,04 \text{ м}$ .

Так как на данной высоте  $\frac{u}{3} < v < u$ , то воспользуемся вторым столбцом табл. 1.

На данной высоте 12 положений относительного равновесия, что объясняется уменьшением влияния аэродинамического момента. Результаты вычислений приведены в табл. 5.

Таблица 5. Положения относительного равновесия SamSat-QB50 на высоте  $H = 500\,000$  м

	$\psi$ , град	$\varphi$ , град	$\alpha$ , град		$\psi$ , град	$\varphi$ , град	$\alpha$ , град
1	0	247,5	1,6	7	180	247,5	1,6
2	0	247,5	14,4	8	180	247,5	14,4
3	0	247,5	179,5	9	180	247,5	179,5
4	0	67,5	19,3	10	180	67,5	19,3
5	90	247,5	177	11	270	247,5	177
6	90	67,5	0,8	12	270	67,5	0,8

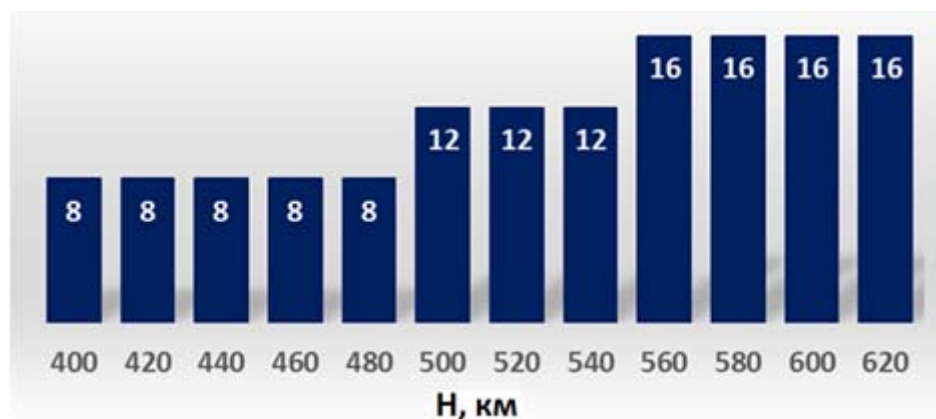
При высоте  $H = 560\,000$  м,  $\rho(H) = 0,205 \cdot 10^{-12} \text{ кг/м}^3$ ,  $v = 0,1 \text{ м}$ .

Так как на данной высоте  $u < v$ , то воспользуемся третьим столбцом табл. 1. На данной высоте 16 положений относительного равновесия, что объясняется увеличением влияния гравитационного момента по сравнению с аэродинамическим. Результаты вычислений приведены в табл. 6.

Таблица 6. Положения относительного равновесия SamSat-QB50 на высоте  $H = 560\,000$  м

	$\psi$ , град	$\varphi$ , град	$\alpha$ , град		$\psi$ , град	$\varphi$ , град	$\alpha$ , град
1	0	247,5	0,3	9	180	247,5	0,3
2	0	247,5	50,2	10	180	247,5	50,2
3	0	247,5	179,8	11	180	247,5	179,8
4	0	67,5	51,5	12	180	67,5	51,5
5	90	247,5	165,7	13	270	247,5	165,7
6	90	67,5	0,5	14	270	67,5	0,5
7	90	67,5	173	15	270	67,5	173
8	90	67,5	176,7	16	270	67,5	176,7

На рис. 1 приведена гистограмма зависимости числа положений относительного равновесия для наноспутника SamSat-QB50 в зависимости от высоты орбиты.



*Рис. 1. Гистограмма числа положений относительного равновесия для SamSat-QB50 в зависимости от высоты орбиты*

### **Заключение**

Получены формулы для определения положений относительного равновесия динамически симметричного наноспутника формата CubeSat под действием аэродинамического и гравитационного моментов при движении по круговой орбите, когда центр масс смещён относительно геометрического по трём координатам. Показано, что будет не менее 8 положений равновесия, а в случае уменьшения влияния аэродинамического момента и, соответственно, увеличения влияния гравитационного, возможно 12 или 16. Определены условия, при которых изменяется число положений относительного равновесия в зависимости от соотношений таких параметров, как смещение центра масс от геометрического центра, моменты инерции, высота орбиты. Определены положения относительного равновесия наноспутника SamSat-QB50 для различных значений высоты орбиты.

### **Библиографический список**

1. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // *Космические исследования*. 2012. Т. 50, № 5. С. 394-402.
2. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A., Duarte E.K. Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2007. V. 97, Iss. 4. P. 267-287. DOI: 10.1007/s10569-006-9064-3
3. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия // *Космические исследования*. 2015. Т. 53, № 6. С. 488-496. DOI: 10.7868/S0023420615060072
4. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
5. Belokonov I.V., Kramlikh A.V., Timbai I.A. Low-orbital transformable nanosatellite: Research of the dynamics and possibilities of navigational and communication problems solving for passive aerodynamic stabilization // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2015. V. 153. P. 383-397.
6. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.

7. Shakhmatov E., Belokonov I., Timbai I., Ustiugov E., Nikitin A., Shafran S. SSAU project of the nanosatellite SamSat-QB50 for monitoring the Earth's thermosphere parameters // *Procedia Engineering*. 2015. V. 104. P. 139-146. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.04.105

8. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. М.: Издательство стандартов, 1981. 181 с.

## RELATIVE EQUILIBRIA OF DYNAMICALLY SYMMETRIC CUBESAT NANOSATELLITE UNDER THE ACTION OF AERODYNAMIC AND GRAVITATIONAL TORQUES

© 2019

**E. V. Barinova** Candidate of Science (Engineering), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[L5545@yandex.ru](mailto:L5545@yandex.ru)

**I. A. Timbai** Doctor of Science (Engineering), Professor, Professor of Inter-University Department of Space Research;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[timbai@mail.ru](mailto:timbai@mail.ru)

Motion of a dynamically symmetric CubeSat nanosatellite around the mass center on the circular orbit under the action of aerodynamic and gravitational torques is considered. We determined the nanosatellite equilibrium positions in the flight path axis system. We took into account the fact that the CubeSat nanosatellite has a rectangular parallelepiped shape and, therefore, the aerodynamic drag force coefficient depends on the angles of attack and proper rotation. We obtained formulae which allow calculating the values of the angles of attack, precession and proper rotation that correspond to the equilibrium positions, depending on the mass-inertia and geometric parameters of the nanosatellite, the orbit altitude, and the atmospheric density. It is shown that if the gravitational moment predominates over the aerodynamic one, there are 16 equilibrium positions, if the aerodynamic moment predominates over the gravitational one, there are 8 equilibrium positions, and in the case when both moments have comparable values there are 8, 12 or 16 equilibrium positions. Using the formulae obtained, we determined the equilibrium positions of the SamSat-QB50 nanosatellite. We calculated the ranges of altitudes where SamSat-QB50 nanosatellite has 8, 12, or 16 relative equilibrium positions.

*CubeSat nanosatellite; angular equilibrium positions; aerodynamic moment; gravitational torque; angle of attack; angle of precession; angle of proper rotation.*

---

*Citation:* Barinova E.V., Timbai I.A. Relative equilibria of dynamically symmetric CubeSat nanosatellite under the action of aerodynamic and gravitational torques. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2019. V. 18, no. 2. P. 21-32. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-2-21-32

### References

1. Sarychev V.A., Gutnik S.A. Dynamics of an axisymmetric satellite under the action of gravitational and aerodynamic torques. *Cosmic Research*. 2012. V. 50, Iss. 5. P. 367-375. DOI: 10.1134/S0010952512050061

2. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A., Duarte E.K. Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2007. V. 97, Iss. 4. P. 267-287. DOI: 10.1007/s10569-006-9064-3

3. Sarychev V.A., Gutnik S.A. Dynamics of a satellite subject to gravitational and aerodynamic torques. Investigation of equilibrium positions. *Cosmic Research*. 2015. V. 53, Iss. 6. P. 449-457. DOI: 10.1134/S0010952515060064

4. Beletskiy V.V. *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass* [Motion of an artificial satellite relative to the center of mass]. Moscow: Nauka Publ., 1965. 416 p.

5. Belokonov I.V., Kramlikh A.V., Timbai I.A. Low-orbital transformable nanosatellite: Research of the dynamics and possibilities of navigational and communication problems solving for passive aerodynamic stabilization. *Advances in the Astronautical Sciences*. 2015. V. 153. P. 383-397.

6. Gantmakher F.R. *Lektsii po analiticheskoy mekhanike* [Lectures on analytical mechanics]. Moscow: Nauka Publ., 1966. 300 p.

7. Shakhmatov E., Belokonov I., Timbai I., Ustiugov E., Nikitin A., Shafran S. SSAU project of the nanosatellite SamSat-QB50 for monitoring the Earth's thermosphere parameters. *Procedia Engineering*. 2015. V. 104. P. 139-146. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.04.105

8. GOST 4401-81. Standard atmosphere. Parameters. Moscow: Izdatel'stvo Standartov Publ., 1981. 181 p. (In Russ.)