

## ОПТИМИЗАЦИЯ КОМБИНИРОВАННОГО ПОВОРОТА ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ АЭРОКОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА МЕТОДОМ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

© 2019

**А. А. Храмов** кандидат технических наук, доцент кафедры космического машиностроения; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [khramov@ssau.ru](mailto:khramov@ssau.ru)

Рассматривается задача оптимизации комбинированного поворота плоскости орбиты аэрокосмического аппарата. В качестве управлений используются угол атаки, скоростной угол крена и секундный расход топлива. Вводятся ограничения на угол атаки и секундный расход топлива, ограничения на режимы движения не накладываются. Критерием качества управления является максимум конечной массы аппарата. Оптимизация управления проводилась на участке траектории от входа в атмосферу и до выхода на конечную орбиту заданного наклона. Для определения оптимальных программ управления используется метод принципа максимума Понтрягина. Для гипотетического аэрокосмического аппарата получены решения задач в постановках с фиксированным и свободным временем перелёта. Обсуждаются изменения в структуре «двигательного» управления (секундный расход топлива) и «аэродинамическом» управлении (угол атаки и скоростной угол крена) в зависимости от длительности перелёта. Получена зависимость конечной массы аэрокосмического аппарата от времени манёвра.

*Аэрокосмический аппарат; комбинированный поворот плоскости орбиты; оптимальное управление; угол атаки; скоростной угол крена; секундный расход топлива; принцип максимума Понтрягина.*

---

*Цитирование:* Храмов А.А. Оптимизация комбинированного поворота плоскости орбиты аэрокосмического аппарата методом принципа максимума Понтрягина // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. Т. 18, № 1. С. 140-153. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-1-140-153

### Введение

Известно, что среди возможных ракетодинамических орбитальных манёвров космических аппаратов наиболее энергоёмким является манёвр поворота плоскости орбиты. Даже при небольших углах поворота требуются существенные затраты топлива. Перспективные аэрокосмические аппараты (АэрКА), обладающие значительным аэродинамическим качеством, позволяют использовать для поворота плоскости орбиты как силу тяги двигателя, так и аэродинамическую подъёмную силу, совершая погружение в плотные слои атмосферы (так называемый комбинированный поворот). Комбинированный поворот плоскости орбиты в случае изменения наклона орбиты более чем на  $5^\circ$  может сократить затраты топлива по сравнению с ракетодинамическим манёвром [1]. Использование АэрКА для проведения рассматриваемого манёвра определяет необходимость исследований в области оптимизации номинального управления траекторией и оценки манёвренных возможностей аппарата.

Исследования комбинированного поворота плоскости орбиты имеют давнюю историю. В работах [1-4] с использованием принципа максимума Понтрягина [5] решалась задача оптимизации управления по углу атаки и скоростному углу крена (двухканальное управление) на атмосферном участке траектории. Работа двигателя рассматривалась в импульсной постановке. Первый импульс прикладывался для схода с орбиты, второй – при выходе из плотных слоёв атмосферы для достижения высоты конечной круговой орбиты, третий импульс осуществлял разгон аппарата до орбитальной скорости.

В монографии [6] на основе метода последовательной линеаризации [7] проведены исследования как двухканального, так и трёхканального управления по углу атаки, крена и секундному расходу топлива. Решения задачи формирования управления получены с учётом и без учёта ограничения на максимальное значение удельного теплового потока. Для двухканального управления предполагалась трёхимпульсная схема приложения тяги, причём второй импульс мог располагаться не только в точке выхода из атмосферы, но и в точке с нулевым углом наклона траектории в случае больших потерь механической энергии АэрКА при движении в атмосфере. При формировании трёхканального управления учитывалась протяжённость активных участков. Показано, что поворот орбиты требует меньших затрат топлива при трёхканальном управлении по сравнению с двухканальным.

Целью данной работы является определение на основе принципа максимума Понтрягина оптимальных программ трёхканального управления при комбинированном повороте плоскости орбиты без ограничений на фазовые переменные. В качестве управлений используются угол атаки, скоростной угол крена («аэродинамическое» управление) и секундный расход топлива («двигательное» управление). Критерием оптимальности является максимум конечной массы АэрКА; время манёвра принималось как свободным, так и заданным. Полученные результаты могут использоваться для оценки предельных манёвренных возможностей аппарата, а также для верификации методов приближённого решения задачи оптимизации.

### Постановка задачи

В постановку задачи входят следующие составляющие: модель движения АэрКА, граничные условия движения, управление, аэродинамические характеристики, формализация процедуры решения задачи оптимизации методом принципа максимума Понтрягина.

**Модель движения.** Считается, что АэрКА движется над поверхностью Земли, имеющей форму сферы среднего радиуса  $R_{cp} = 6371$  км; поле притяжения принимается центральным. Движение аппарата относительно Земли происходит под действием силы тяготения, полной аэродинамической силы, силы тяги двигателей (на активных участках траектории) и сил, обусловленных неинерциальностью системы отсчёта. Система дифференциальных уравнений в траекторной системе координат имеет вид [6]:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -\sigma_x \rho V^2 - g \sin \theta + \frac{P}{m} \cos \alpha + R \omega_3^2 \cos \varphi (\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \chi), \\
 \dot{\theta} &= \sigma_y \rho V \cos \gamma_a + \left( \frac{V}{R} - \frac{g}{V} \right) \cos \theta + \frac{P}{Vm} \sin \alpha \cos \gamma_a + 2 \omega_3 \cos \varphi \cos \chi + \\
 &+ \frac{R \omega_3^2}{V} \cos \varphi (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \sin \chi), \\
 \dot{\chi} &= -\frac{\sigma_y \rho V}{\cos \theta} \sin \gamma_a - \frac{V \cos \theta}{R} \operatorname{tg} \varphi \cos \chi - \frac{P}{Vm \cos \theta} \sin \alpha \sin \gamma_a - \\
 &- 2 \omega_3 (\sin \varphi - \cos \varphi \sin \chi \operatorname{tg} \theta) - \frac{R \omega_3^2}{V \cos \theta} \sin \varphi \cos \varphi \cos \chi, \\
 \dot{R} &= V \sin \theta, \quad \dot{\varphi} = \frac{V \cos \theta}{R} \sin \chi, \quad \dot{m} = -\beta.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $V$  – земная скорость АэрКА;  $\theta$  – угол наклона траектории;  $\chi$  – угол пути (угол между проекцией вектора скорости на местную горизонтальную плоскость и местной параллелью в направлении с запада на восток);  $R$  – величина радиус-вектора центра масс АэрКА;  $\varphi$  – геоцентрическая широта;  $\alpha$  – угол атаки;  $\gamma_a$  – скоростной угол крена;  $m$  – масса АэрКА;  $\omega_3 \approx 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$  – угловая скорость суточного вращения Земли;  $\rho$  – плотность атмосферы на высоте  $h$ , задаваемая экспоненциальным законом  $\rho = \rho_0 \exp(-\beta_\rho h)$ ;  $\rho_0 = 1,225 \text{ кг/м}^3$  – плотность атмосферы у поверхности Земли;  $\beta_\rho = 0,141 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  – логарифмический градиент плотности;  $g = \mu / R^2$  – гравитационное ускорение;  $\mu = 398600,44 \text{ км}^3 / \text{с}^2$  – гравитационная постоянная Земли;  $P$  – сила тяги двигателя;  $\beta$  – секундный расход топлива.

Сила тяги двигателя определяется по формуле:

$$P = \beta I_{y\partial} g_0, \quad (2)$$

где  $I_{y\partial}$  – удельный импульс тяги;  $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$  – среднее гравитационное ускорение на поверхности Земли.

Баллистические коэффициенты  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  определяются по соотношениям:

$$\sigma_x = \frac{c_{xa} S}{2m}, \quad \sigma_y = \frac{c_{ya} S}{2m}, \quad (3)$$

где  $c_{xa}$ ,  $c_{ya}$  – соответственно коэффициенты силы лобового сопротивления и аэродинамической подъёмной силы;  $S$  – характерная площадь АэрКА (площадь крыла).

Предыдущие исследования манёвра комбинированного поворота плоскости орбиты [8] показали, что траектория АэрКА включает длительный гиперзвуковой полёт в верхних слоях атмосферы и на всей траектории полёта числа Маха превышают 20 единиц, при которых аэродинамические коэффициенты изменяются слабо. Это позволяет ввести допущение о том, что аэродинамические коэффициенты  $c_{xa}$  и  $c_{ya}$  зависят от угла атаки и высоты полёта и не зависят от числа Маха.

**Граничные условия движения.** Для интегрирования дифференциальных уравнений движения (1) при решении задачи оптимизации в начальный момент времени  $t_0$  задаются начальные условия:

$$t_0 = 0, \quad V = V_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \chi = \chi_0, \quad R = R_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad m = m_0. \quad (4)$$

В конце участка движения АэрКА заданы скорость полёта, угол наклона траектории, наклонение и высота орбиты:

$$t = t_k, \quad V = V_k, \quad \theta = \theta_k, \quad i = i_k, \quad h = h_k. \quad (5)$$

**Управление.** АэрКА управляется за счёт тяги двигателя, определяемой секундным расходом топлива  $\beta$ , изменения угла атаки  $\alpha$  и скоростного угла крена  $\gamma_a$ .

На угол атаки  $\alpha$  наложены ограничения:

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, \quad (6)$$

где  $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$  – минимальный и максимальный угол атаки соответственно.

Возможные значения секундного расхода топлива принадлежат диапазону:

$$0 \leq \beta \leq \beta_{\max}. \quad (7)$$

Здесь  $\beta_{\max}$  – максимальный секундный расход топлива.

**Аэродинамические характеристики.** Зависимости коэффициента силы лобового сопротивления и подъёмной силы от угла атаки аппроксимируются по табличным значениям полиномами третьей степени в виде:

$$\begin{aligned} c_{xa} &= c_{xa0}(h) + a_1(h)\alpha + b_1(h)\alpha^2 + c_1(h)\alpha^3, \\ c_{ya} &= c_{ya0}(h) + a_2(h)\alpha + b_2(h)\alpha^2 + c_2(h)\alpha^3, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $c_{xa0}$  и  $c_{ya0}$  – значения аэродинамических коэффициентов при нулевом угле атаки;  $a_i, b_i, c_i$  ( $i=1,2$ ) – коэффициенты полиномов при соответствующих степенях угла атаки. Коэффициенты полиномов (8) являются функциями высоты полёта, значения которых между узловыми точками определяются кубической сплайн-интерполяцией. На рис. 1 представлены зависимости аэродинамических коэффициентов гипотетического АэрКА от угла атаки и высоты полёта.

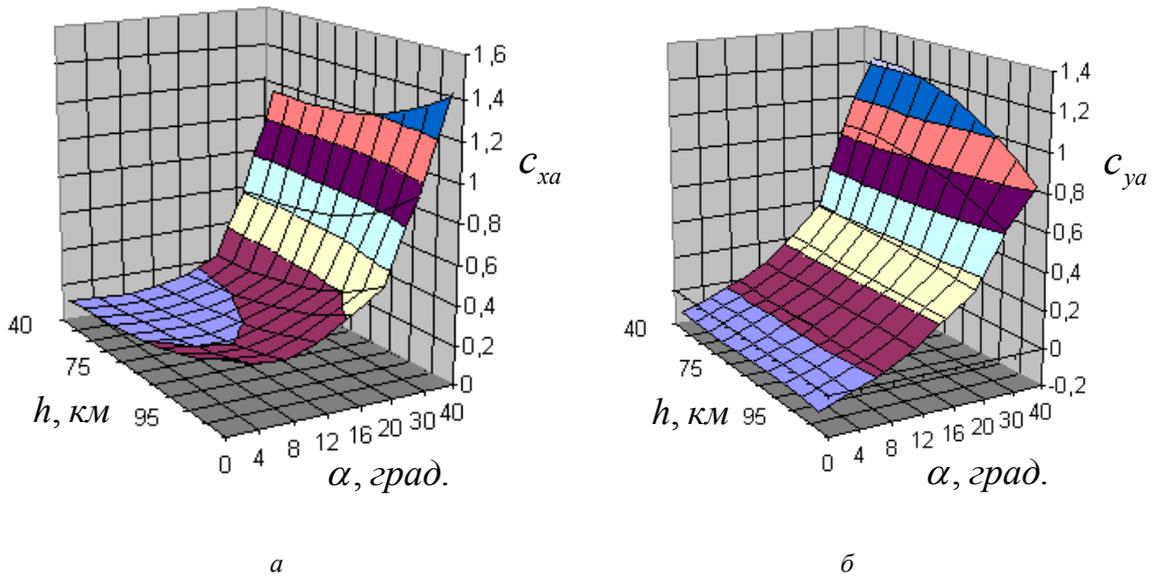


Рис. 1. Зависимости коэффициента силы лобового сопротивления (а) и подъёмной силы (б) от угла атаки и высоты полёта

Задачу оптимизации движения АэрКА сформулируем следующим образом: для системы дифференциальных уравнений (1) при заданных начальных (4) и конечных (5) условиях определить оптимальные программы изменения угла атаки  $\alpha(t)$ , скоростного угла крена  $\gamma_a(t)$  и секундного расхода топлива  $\beta(t)$  при заданных ограничениях (6) и (7), обеспечивающие максимум конечной массы АэрКА.

**Решение задачи оптимизации.** Для определения оптимального управления воспользуемся принципом максимума Понтрягина [5]. Гамильтониан для системы (1) записывается в виде:

$$H = \psi_V \frac{dV}{dt} + \psi_\theta \frac{d\theta}{dt} + \psi_\chi \frac{d\chi}{dt} + \psi_R \frac{dR}{dt} + \psi_\varphi \frac{d\varphi}{dt} + \psi_m \frac{dm}{dt}$$

или

$$\begin{aligned} H = & -\psi_V \left( \frac{c_{ya} S}{2m} \rho V^2 + \frac{\mu}{R^2} \sin \theta - \frac{P}{m} \cos \alpha - R \omega_3^2 \cos \varphi (\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \chi) \right) + \\ & + \psi_\theta \left( \frac{c_{ya} S}{2m} \rho V \cos \gamma_a + \left( \frac{V}{R} - \frac{\mu}{VR^2} \right) \cos \theta + \frac{P}{Vm} \sin \alpha \cos \gamma_a + 2\omega_3 \cos \varphi \cos \chi + \right. \\ & \left. + \frac{R \omega_3^2}{V} \cos \varphi (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \sin \chi) \right) - \\ & - \psi_\chi \left( \frac{c_{ya} S}{2m} \rho V \frac{\sin \gamma_a}{\cos \theta} + \frac{V \cos \theta}{R} \operatorname{tg} \varphi \cos \chi + \frac{P}{Vm \cos \theta} \sin \alpha \sin \gamma_a + \right. \\ & \left. + 2\omega_3 (\sin \varphi - \cos \varphi \sin \chi \operatorname{tg} \theta) + \frac{R \omega_3^2}{V \cos \theta} \sin \varphi \cos \varphi \cos \chi \right) + \\ & + \psi_R V \sin \theta + \psi_\varphi \frac{V \cos \theta}{R} \sin \chi - \psi_m \frac{P}{I_{y0} g_0}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\psi_V, \psi_\theta, \psi_\chi, \psi_R, \psi_\varphi, \psi_m$  – сопряжённые множители.

Согласно принципу максимума оптимальное управление для принятого критерия оптимальности должно обеспечивать минимум функции Гамильтона (9) в каждой точке траектории.

Необходимое условие оптимальности управления по скоростному углу крена запишется в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma_a} = -\frac{\psi_\theta}{m} \left( \frac{c_{ya} S}{2} \rho V + \frac{P}{V} \sin \alpha \right) \sin \gamma_a - \frac{\psi_\chi}{m} \left( \frac{c_{ya} S}{2} \rho V + \frac{P}{V} \cos \alpha \right) \frac{\cos \gamma_a}{\cos \theta} = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \gamma_{a \text{ opt}} &= \operatorname{arctg} \left( -\frac{\psi_\chi}{\psi_\theta \cos \theta} \right), \\ \operatorname{sign}(\sin \gamma_{a \text{ opt}}) &= \operatorname{sign}(\psi_\chi / \cos \theta), \quad \operatorname{sign}(\cos \gamma_{a \text{ opt}}) = \operatorname{sign}(-\psi_\theta). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, оптимальное управление по каналу скоростного угла крена напрямую не зависит от управлений по каналам угла атаки и секундного расхода топлива.

Необходимое условие оптимальности управления по углу атаки запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \alpha} = & -\frac{\psi_V}{m} \left( \frac{S}{2} \rho V^2 \frac{\partial c_{xa}}{\partial \alpha} + P \sin \alpha \right) + \frac{\psi_\theta}{m} \left( \frac{S}{2} \rho V \frac{\partial c_{ya}}{\partial \alpha} + \frac{P}{V} \cos \alpha \right) \cos \gamma_a - \\ & - \frac{\psi_\chi}{m} \left( \frac{S}{2} \rho V \frac{\partial c_{ya}}{\partial \alpha} + \frac{P}{V} \cos \alpha \right) \frac{\sin \gamma_a}{\cos \theta} = 0, \end{aligned}$$

где, с учётом (8),  $\frac{\partial c_{xa}}{\partial \alpha} = a_1 + 2b_1\alpha + 3c_1\alpha^2$ ,  $\frac{\partial c_{ya}}{\partial \alpha} = a_2 + 2b_2\alpha + 3c_2\alpha^2$ ,

откуда

$$a \cos \alpha_{opt} - b \sin \alpha_{opt} = c + d \alpha_{opt} + e \alpha_{opt}^2. \quad (11)$$

Здесь  $a = -\frac{P}{V} A$ ,  $b = \psi_V P$ ,  $c = \frac{S}{2} \rho V (a_2 A + a_1 \psi_V V)$ ,  $d = S \rho V (b_2 A + b_1 \psi_V V)$ ,  
 $e = \frac{3}{2} S \rho V (c_2 A + c_1 \psi_V V)$ ,  $A = \sqrt{\psi_\theta^2 + (\psi_\chi / \cos \theta)^2}$ .

Трансцендентное уравнение (11) относительно неизвестного угла атаки  $\alpha_{opt}$  может быть решено только численно. На пассивных участках полёта оптимальный угол атаки определяется в аналитическом виде решением квадратного уравнения:  $c + d \alpha_{opt} + e \alpha_{opt}^2 = 0$ .

Оптимальное значение секундного расхода топлива двигателя АэрКА, входящего линейно в Гамильтониан, является релейной функцией:

$$\beta_{opt} = \frac{\beta_{max}}{2} \left[ 1 - \text{sign} \left( \psi_V V \cos \alpha - \sqrt{\psi_\theta^2 + (\psi_\chi / \cos \theta)^2} \sin \alpha - \psi_m \frac{Vm}{I_{y0} g_0} \right) \right]. \quad (12)$$

Система дифференциальных уравнений для сопряжённых множителей определяется как:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad (13)$$

где  $\psi = (\psi_V, \psi_\theta, \psi_\chi, \psi_R, \psi_\varphi, \psi_m)^T$  – вектор сопряжённых множителей,  $\mathbf{x} = (V, \theta, \chi, R, \varphi, m)^T$  – вектор фазовых координат. Конечные соотношения для сопряжённых множителей не приводятся в силу их громоздкости.

Системы уравнений (1) и (13) с управлением (10-12) определяют семейство оптимальных траекторий. Искомая оптимальная траектория будет определяться граничными условиями задачи. В соответствии с постановкой задачи в начале движения значения фазовых координат зафиксированы (4). Для определения конечных условий движения необходимо учитывать, что параметры  $V, \theta, \chi$ , входящие в систему уравнений движения (1), определяют вектор скорости аппарата относительно вращающейся Земли (в неинерциальной траекторной системе координат), которые связаны с параметрами в инерциальном пространстве  $V_u, \theta_u, \chi_u$  следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} V_u^2 &= V^2 + V_3^2 + 2VV_3 \cos \theta \cos \chi, \\ \theta_u &= \arcsin\left(\frac{V}{V_u} \sin \theta\right), \\ \chi_u &= \arcsin\left(\frac{V \cos \theta}{V_u \cos \theta_u} \sin \chi\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $V_3 = R\omega_3 \cos \varphi$  – переносная скорость, направленная по касательной к местной параллели на восток. Наклонение орбиты определяется широтой и углом пути в инерциальном пространстве:

$$\cos i = \cos \varphi \cos \chi_u. \quad (15)$$

Конечные условия движения АэрКА при выходе на заданную круговую орбиту в параметрах инерциальной системы координат запишем в виде:

$$\mathbf{g}_u(t_k) = \begin{pmatrix} V_u^2 - V_{uk}^2 \\ \theta_u \\ \cos i - \cos i_k \\ R - R_k \end{pmatrix} = 0, \quad (16)$$

где  $V_{uk} = \sqrt{\frac{\mu}{R_k}}$  – орбитальная скорость АэрКА,  $i_k$  и  $R_k = R_{cp} + h_k$  – наклонение и радиус конечной орбиты.

Тогда, с учётом (14) и (15), конечные условия движения АэрКА в параметрах траекторной системы координат принимают вид:

$$\mathbf{g}(t_k) = \begin{pmatrix} V^2 + V_{3k}^2 + 2VV_{3k} \cos \chi - V_{uk}^2 \\ \theta \\ \cos \varphi \frac{V \cos \chi + V_{3k}}{V_u} - \cos i_k \\ R - R_k \end{pmatrix} = 0. \quad (17)$$

Здесь  $V_{3k} = R_k \omega_3 \cos \varphi$  – переносная скорость на конечной орбите.

Дополнительно к условиям (17) запишем условия трансверсальности:

$$\begin{aligned} \psi_{vk} &= \frac{\partial g_1}{\partial V} v_1 + \frac{\partial g_3}{\partial V} v_3, \\ \psi_{\chi k} &= \frac{\partial g_1}{\partial \chi} v_1 + \frac{\partial g_3}{\partial \chi} v_3, \\ \psi_{\varphi k} &= \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} v_1 + \frac{\partial g_3}{\partial \varphi} v_3, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $g_1$  и  $g_3$  – первый и третий компонент вектора  $\mathbf{g}$ ;  $\nu_1$  и  $\nu_3$  – неопределённые множители.

Определяя множители  $\nu_1$  и  $\nu_3$  из первых двух уравнений системы (18) и подставляя их в третье, получим:

$$\psi_{\varphi k} = \frac{V_{3k}}{V} \operatorname{tg} \varphi \left\{ \psi_{V_k} V \left[ 1 - \left( 1 - \frac{V_{3k}}{V} \right) \cos \chi \right] + \frac{\psi_{\chi k}}{\sin \chi} \left( 2 + \frac{V^2 + V_{3k}^2}{V V_{3k}} \cos \chi \right) \right\}. \quad (19)$$

Кроме того, для принятого критерия оптимальности в конечный момент времени согласно [5] должно выполняться условие:

$$\psi_{m k} = -1. \quad (20)$$

Уравнения (17) совместно с условием трансверсальности (19) и условием (20) замыкают граничные условия на правом конце траектории. Их отклонения от требуемых значений в задаче оптимизации с фиксированным временем определяют невязки, используемые при решении краевой задачи. Заданное время манёвра в этом случае используется для выхода из интегрирования.

В задаче оптимизации со свободным временем выход из интегрирования выполняется по одному из конечных условий; при этом выбранное условие выхода заменяется условием равенства Гамильтониана нулю [5]. Для рассматриваемой задачи в качестве условия выхода из интегрирования целесообразно принять условие (20) в силу монотонности изменения сопряжённого множителя  $\psi_m(t)$  в течение манёвра. Полученная оптимальная траектория будет обеспечивать абсолютный максимум конечной массы АэрКА.

Частным случаем задачи оптимизации с нефиксированным временем перелёта является задача на быстродействие при работе двигателя без выключений:  $\beta \equiv \beta_{\max}$ . При этом критерий максимума конечной массы соответствует критерию минимального времени перелёта, а управление оптимизируется только по углу атаки и скоростному углу крена.

Таким образом, задача оптимизации сводится к шестипараметрической двухточечной краевой задаче. Требуется определить начальные значения сопряжённых множителей  $\psi_{V_0}$ ,  $\psi_{\theta_0}$ ,  $\psi_{\chi_0}$ ,  $\psi_{R_0}$ ,  $\psi_{\varphi_0}$ ,  $\psi_{m_0}$ , обеспечивающие выполнение начальных (4) и конечных (17) и (19) условий. В качестве шестого конечного условия в задаче с заданным временем принимается условие (20), в задаче со свободным временем – условие  $H = 0$ .

### Результаты решения задач оптимизации

**Исходные данные.** Для решения задач оптимизации заданы следующие начальные:  $V_0 = 7367 \text{ м/с}$ ,  $\theta_0 = -1,076^0$ ,  $\chi_0 = \varphi_0 = 0$ ,  $R_0 = 6471 \text{ км}$ ,  $m_0 = 8333 \text{ кг}$  и конечные:  $V_{uk} = 7788 \text{ м/с}$ ,  $\theta_k = 0$ ,  $i_k = 15^0$ ,  $h_k = 200 \text{ км}$  условия движения. Начальные условия движения получены при численном моделировании схода АэрКА с экваториальной орбиты высотой 200 км после тормозного участка и пассивного движения до высоты 100 км. Время тормозного участка рассчитывалось по аналитическим соотношениям согласно [9] в предположении импульсного характера приложения тяги и обеспечения

требуемого угла входа в плотные слои атмосферы. Конечные условия движения соответствуют выведению АэрКА на круговую орбиту заданной высоты и наклона.

Характерная площадь (площадь крыла)  $S = 18,44 \text{ м}^2$ . Ограничения на управление по углу атаки:  $\alpha_{\min} = 0^0$ ,  $\alpha_{\max} = 40^0$ . Максимальный секундный расход топлива  $\beta_{\max} = 6 \text{ кг/с}$ .

На первом этапе исследований оптимальных траекторий АэрКА при повороте плоскости орбиты было получено решение задачи на быстродействие. Далее проводилась оптимизация с фиксированным временем перелёта, значение которого последовательно увеличивалось. Получив решение задачи со значением Гамильтониана близким к нулю, провели оптимизацию управления со свободным временем, обеспечивающего максимально возможную конечную массу АэрКА. При решении краевых задач в качестве начального приближения вектора сопряжённых множителей использовались результаты решения задачи предыдущего шага с меньшим временем перелёта. Краевые задачи для всех вариантов её постановки решались модифицированным методом Ньютона [10].

Далее представлены зависимости высоты, наклона, секундного расхода топлива («двигательное» управление) и зависимости угла атаки, скоростного угла крена («аэродинамическое» управление) от времени, полученные при решении следующих задач:

- на быстродействие (рис. 2);
- с фиксированным временем манёвра 655 с (рис. 3);
- с фиксированным временем манёвра 930 с (рис. 4);
- максимизации конечной массы со свободным временем (рис. 5).

Приведённые решения задач оптимизации представляют возможные варианты «двигательного» управления в зависимости от длительности манёвра. Задача на быстродействие ( $t_k = 565 \text{ с}$ ) и задача максимизации конечной массы со свободным временем ( $t_k = 2624 \text{ с}$ ) ограничивают временной диапазон, в котором поставленная задача оптимизации имеет решения. В задаче с минимальным временем полёта двигатель работает без выключений (рис. 2).

Максимально возможную конечную массу обеспечивает управление с двумя включениями двигателя: первое осуществляется в плотных слоях атмосферы в области минимальной высоты, второе – в конце манёвра (рис. 5).

При времени манёвра, входящего в указанный диапазон, возможны ещё две структуры «двигательного» управления. Длительность поворота, равная 655 с, является максимальной, при которой траектория содержит два активных участка и один пассивный участок между ними, расположенный выше плотных слоёв атмосферы (рис. 3).

Длительность поворота, равная 930 с, является максимальной, при которой траектория содержит три активных и два пассивных участка, один из которых расположен на участке погружения АэрКА в атмосферу, а другой – выше плотных слоёв атмосферы (рис. 4).

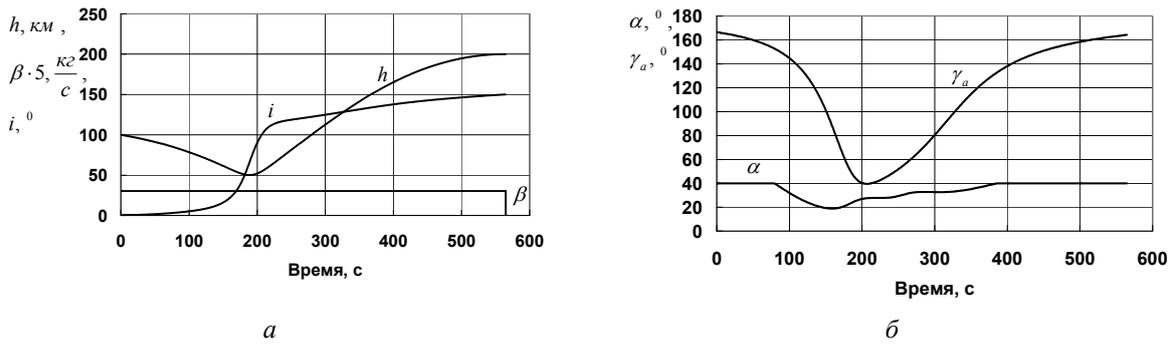


Рис. 2. Зависимости высоты, наклона, массового расхода топлива (а) и угла атаки, скоростного угла крена (б) от времени при минимальной длительности манёвра

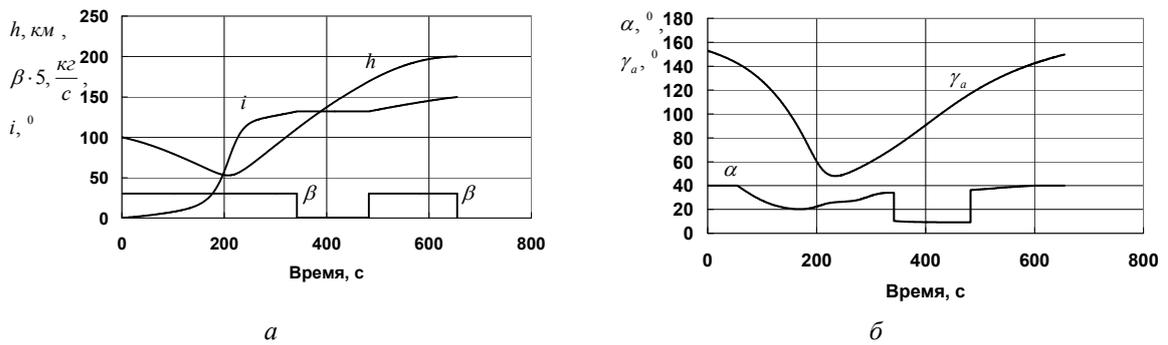


Рис. 3. Зависимости высоты, наклона, массового расхода топлива (а) и угла атаки, скоростного угла крена (б) от времени при длительности манёвра 655 с

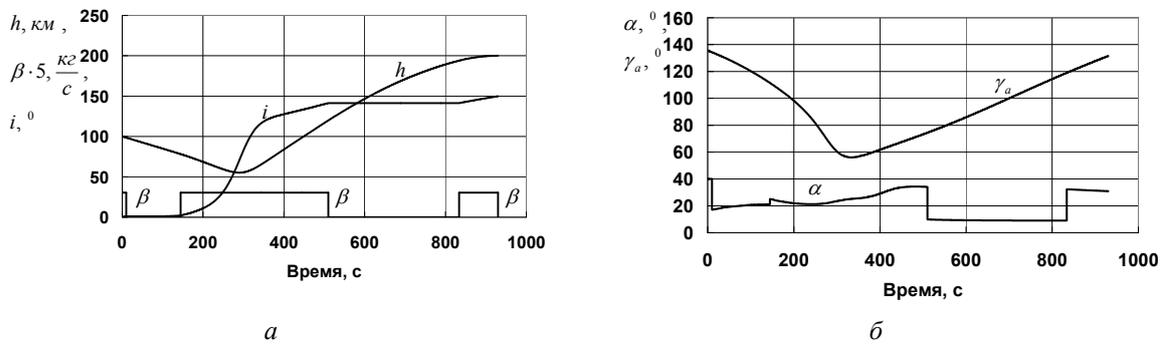


Рис. 4. Зависимости высоты, наклона, массового расхода топлива (а) и угла атаки, скоростного угла крена (б) от времени при длительности манёвра 930 с

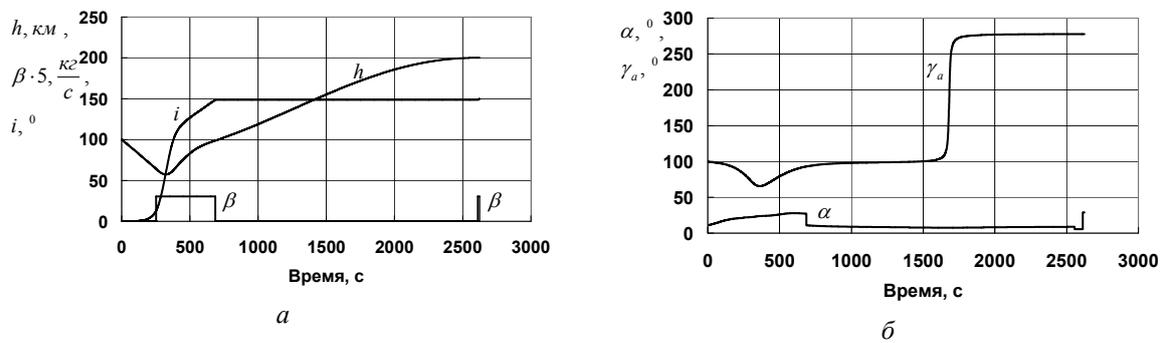


Рис. 5. Зависимости высоты, наклона, массового расхода топлива (а) и угла атаки, скоростного угла крена (б) от времени в задаче максимизации конечной массы

### **Обсуждение результатов**

В области малых длительностей перелёта  $565\text{ с} \leq t_k \leq 930\text{ с}$  включение двигателя производится непосредственно при входе в плотные слои атмосферы (рис. 2 – 4), что обеспечивает более интенсивное погружение АэрКА и меньшее время достижения минимальной высоты полёта. В окрестности минимальной высоты эффективность использования аэродинамической силы для поворота плоскости орбиты выше; здесь реализуется наибольшее изменение наклона орбиты. Таким образом, сокращая время погружения АэрКА в атмосферу, манёвр можно реализовать за меньшее время. С увеличением длительности перелёта требуемая интенсивность погружения снижается, что приводит при  $t_k > 655\text{ с}$  к появлению на рассматриваемом участке траектории интервала с выключенным двигателем, длительность которого с ростом времени манёвра увеличивается. Траектория погружения при этом становится более пологой, минимальная высота полёта увеличивается, снижая аэродинамические потери скорости и затраты топлива на выход из плотных слоёв атмосферы и в целом на выведение АэрКА на орбиту.

Угол атаки при входе в плотные слои атмосферы выходит на ограничение и составляет  $40^\circ$ , обеспечивая максимальную подъёмную силу. Так как скоростной угол крена при этом существенно больше  $90^\circ$ , значительную величину имеет составляющая подъёмной силы в вертикальной плоскости, направленная вниз. Таким образом, «аэродинамическое» управление, так же как и «двигательное», обеспечивает необходимую скорость погружения АэрКА в плотные слои атмосферы. При дальнейшем полёте угол атаки и скоростной угол крена уменьшаются. В окрестности точки траектории с минимальной высотой угол атаки близок к значению, обеспечивающему максимальное аэродинамическое качество, а скоростной угол крена достигает минимального значения ( $40\text{--}60^\circ$ ). «Аэродинамическое» управление на рассматриваемом участке манёвра обеспечивает, с одной стороны, значительную боковую составляющую подъёмной силы и поворот плоскости орбиты, с другой – достаточную вертикальную составляющую подъёмной силы для дальнейшего увеличения высоты полёта.

Так как траектории с большими длительностями перелёта  $930\text{ с} < t_k \leq 2624\text{ с}$  не требуют высокой скорости погружения, то при входе в атмосферу двигатель выключен, угол атаки изменяется от  $10$  до  $20^\circ$ , что снижает потери скорости, а скоростной угол крена близок к  $90^\circ$ , обеспечивая спуск в атмосфере, близкий к баллистическому (рис. 5). Первое включение двигателя осуществляется в точке, близкой к точке траектории с минимальной высотой. После включения двигателя в области минимальной высоты полёта характер изменения «аэродинамического» управления аналогичен рассмотренному ранее для меньших длительностей перелёта. При этом формируется орбита с высотой апогея около  $200\text{ км}$ . Далее следует длительный пассивный участок с практическим постоянным углом атаки, близким к  $10^\circ$ , при котором АэрКА движется по восходящему полувитку орбиты к апогею. Второе включение реализует разгон аппарата до орбитальной скорости. С увеличением времени манёвра длительность включения двигателя в конце перелёта уменьшается (рис. 3 – 5). Максимально возможная конечная масса АэрКА достигается, таким образом, при минимальной длительности завершающего манёвра активного участка.

Перелёт с наибольшим временем, соответствующий выведению аппарата с максимальной конечной массой, содержит участок «перекладки» скоростного угла крена, при котором направление боковой составляющей подъёмной силы меняется на противоположное. При этом участок «перекладки» находится в области, где аргумент широты АэрКА в орбитальном движении близок к  $270^\circ$ . Это согласуется с известным законом управления при ракетодинамическом манёвре поворота плоскости орбиты с непре-

рывной тягой, когда при смене знака косинуса аргумента широты направление бинормальной составляющей тяги меняется на противоположное [9].

На рис. 6 представлены зависимости конечной массы АэрКА и значения Гамильтониана от времени перелёта. Пунктирными линиями обозначены граничные решения, соответствующие минимальной  $m_k^{\min} = 4898 \text{ кг}$  (задача на быстродействие) и максимальной  $m_k^{\max} = 5608 \text{ кг}$  выводимой массе. Таким образом, разница этих решений по массе аппарата составила более  $700 \text{ кг}$ , что в процентном выражении относительно начальной массы АэрКА  $m_0$  составляет более  $8\%$ . С увеличением времени манёвра выигрыш в конечной массе уменьшается и при времени перелёта  $1200 \text{ с}$  составляет менее  $100 \text{ кг}$  (менее  $2\%$  начальной массы аппарата).

Зависимость Гамильтониана от времени перелёта построена в диапазоне  $600 \text{ с} \leq t_k \leq 2624 \text{ с}$ . Гамильтониан для граничных решений в задаче на быстродействие  $H_{mk \min}$  и в задаче выведения АэрКА максимальной массы  $H_{mk \max}$  равен нулю, так как в этих задачах время манёвра нефиксировано. В задачах с фиксированным временем Гамильтониан равен некоторому отрицательному значению. Для всех полученных решений значение Гамильтониана на траектории манёвра сохраняет постоянное значение, что подтверждает их оптимальность.

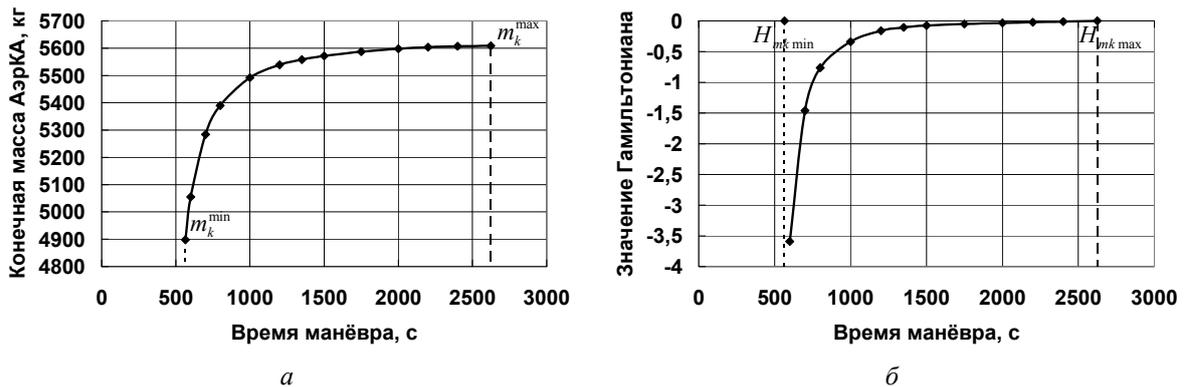


Рис. 6. Зависимость конечной массы АэрКА (а) и Гамильтониана (б) от времени перелёта

### Заключение

С использованием метода принципа максимума Понтрягина получено решение ряда задач оптимизации комбинированного поворота плоскости орбиты аэрокосмического аппарата с целью максимизации конечной массы в постановках с фиксированным и свободным временем перелёта. Определён диапазон длительностей манёвра, в котором поставленная задача оптимизации имеет решения. Выявлено изменение структуры «двигательного» управления в зависимости от длительности перелёта. Показано, что при малых длительностях перелёта, близких к времени быстродействия, характер управления определяется требуемой скоростью погружения АэрКА в плотные слои атмосферы, где осуществляется наибольшее изменение наклона орбиты. При больших длительностях перелёта траектория содержит два активных участка. Первый участок, необходимый для формирования эллиптической орбиты с высотой апогея, близкой к высоте конечной орбиты, расположен в области минимальной высоты полёта, второй – в конце манёвра для обеспечения орбитальной скорости аппарата.

Показано, что с увеличением времени перелёта конечная масса аэрокосмического аппарата растёт. Выигрыш в конечной массе может составить более 8 % относительно начальной массы аппарата.

### **Библиографический список**

1. Шкадов Л.М., Буханова Р.С., Илларионов В.Ф., Плохих В.П. Механика оптимального пространственного движения летательных аппаратов в атмосфере. М.: Машиностроение, 1972. 240 с.
2. Гурман В.И., Салмин В.В., Шершнёв В.М. Аналитическая оценка приближённо-оптимальных комбинированных разворотов // Космические исследования. 1969. Т. 7, № 6. С. 819-826.
3. Балакин В.Л., Белоконов В.М., Шершнёв В.М. Об оптимальных режимах поворота плоскости орбиты спутника Земли с использованием аэродинамических сил // Космические исследования. 1974. Т. 12, № 3. С. 346-352.
4. Балакин В.Л., Белоконов В.М., Шершнёв В.М. Комбинированный манёвр поворота плоскости орбиты при наличии ограничений на режимы движения // Космические исследования. 1976. Т. 14, № 4. С. 498-503.
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.
6. Лазарев Ю.Н. Управление траекториями аэрокосмических аппаратов. Самара: Самарский научный центр РАН, 2007. 274 с.
7. Федоренко Р.П. Приближённое решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
8. Балакин В.Л., Ишков С.А., Храмов А.А. Оптимизация комбинированного поворота плоскости орбиты аэрокосмического аппарата на основе метода последовательной линеаризации // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2018. Т. 17, № 2. С. 23-36. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-2-23-36
9. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полёта: учеб. пособие. М.: Наука, 1990. 448 с.
10. Салмин В.В., Ишков С.А., Старинова О.Л. Методы решения вариационных задач механики космического полёта с малой тягой. Самара: Самарский научный центр РАН, 2006. 162 с.

## **OPTIMIZATION OF SPACE VEHICLE COMBINED ORBITAL PLANE CHANGE MANEUVER ON THE BASIS OF PONTRYAGIN'S MAXIMUM PRINCIPLE**

© 2019

**A. A. Khramov** Candidate of Science (Engineering), Associate Professor  
of the Department of Space Engineering;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[khramov@ssau.ru](mailto:khramov@ssau.ru)

The task of optimizing the space vehicle combined orbital plane change maneuver with the aim of maximizing its final mass is considered in the paper. Burst of power is used for the vehicle's exit from the initial low earth orbit and subsequent re-entry. Starting from atmospheric entry till the end of the orbital plane change with the entry in the final orbit the angle of attack, the air-path bank angle and the fuel-flow rate are used as controls. Limitations for the angle of attack, fuel-flow rate, adiabatic recovery temperature, longitudinal and vertical load factor are introduced. The successive linearization method is used to determine the optimal control programs. Solving the optimization task is exemplified

by a hypothetical space vehicle. The results of modeling space vehicle motion are presented. The changes in the determined “aerodynamic” (angle of attack and air-path bank angle) and “motion” (fuel-flow rate) controls with increasing the angle of orbital plane change are discussed with and without account of the key limitation on the modes of motion – maximum adiabatic recovery heating temperature.

*Space vehicle; combined orbital plane change maneuver; optimal control; angle of attack; air-path bank angle; fuel-flow rate; Pontryagin’s maximum principle.*

---

*Citation:* Khramov A.A. Optimization of space vehicle combined orbital plane change maneuver on the basis of pontryagin’s maximum principle. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2019. V. 18, no. 1. P. 140-153. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-1-140-153

## References

1. Shkadov L.M., Bukhanova R.S., Illarionov V.F., Plokhikh V.P. *Mekhanika optimal’nogo prostranstvennogo dvizheniya letatel’nykh apparatov v atmosfere* [Mechanics of optimal spatial motion of flying vehicles in the atmosphere]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1972. 240 p.
2. Gurman V.I., Salmin V.V., Shershnev V.M. Analytical estimation of approximately-optimal combined turns. *Kosmicheskie Issledovaniya*. 1969. V. 7, no. 6. P. 819-826. (In Russ.)
3. Balakin V.L., Belokonov V.M., Shershnev V.M. Optimal modes of Earth satellite aerodynamic orbital plane change. *Kosmicheskie Issledovaniya*. 1974. V. 12, no. 3. P. 346-352. (In Russ.)
4. Balakin V.L., Belokonov V.M., Shershnev V.M. Combined maneuver of orbital plane change with limitations on the motion mode. *Kosmicheskie Issledovaniya*. 1976. V. 14, no. 4. P. 498-503. (In Russ.)
5. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal’nykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka Publ., 1983. 393 p.
6. Lazarev Yu.N. *Upravleniye trayektoriyami aerokosmicheskikh apparatov* [Space trajectory control]. Samara: Samarskiy Nauchnyy Tsentr RAN Publ., 2007. 274 p.
7. Fedorenko R.P. *Priblizhennoye resheniye zadach optimal’nogo upravleniya* [Approximate solution of optimal control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1978. 488 p.
8. Balakin V.L., Ishkov S.A., Khramov A.A. Optimization of space vehicle combined orbital plane change maneuver on the basis of the successive linearization method. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2018. V. 17, no. 2. P. 23-36. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-2-23-36. (In Russ.)
9. Okhotsimskiy D.E., Sikharulidze Yu.G. *Osnovy mekhaniki kosmicheskogo poleta: uch. posobie* [Basics of space flight mechanics: Textbook]. Moscow: Nauka Publ., 1990. 448 p.
10. Salmin V.V., Ishkov S.A., Starinova O.L. *Metody resheniya variatsionnykh zadach mekhaniki kosmicheskogo poleta s maloy tyagoy* [Methods of solving variational problems of low-thrust mission mechanics]. Samara: Samarskiy Nauchnyy Tsentr RAN Publ., 2006. 162 p.