УДК 621.453 + 533.6

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОСТИ НА ТЕЧЕНИЕ В СОПЛАХ РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ МАЛОЙ ТЯГИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ СКОРОСТИ

© 2009 С. А. Шустов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Приводится описание численной модели влияния вязкости на течение в соплах ракетных двигателей малой тяги, разработанной в научно-исследовательском центре космической энергетики СГАУ. Излагаются принятые допущения используемой физической модели. Дается описание математической модели в виде уравнений в частных производных, выражающих законы сохранения массы, количества движения и энергии применительно к течению в ламинарном пограничном слое сопел ракетных двигателей малой тяги (РДМТ) с отрицательным продольным градиентом давления при граничных условиях скольжения скорости и скачка температуры на стенке сопла. Излагается разработанный алгоритм численного решения уравнений математической модели, обеспечивающий устойчивость и заданную точность расчета.

Сопло Лаваля, пограничный слой, скольжение скорости, толщина вытеснения, толщина потери импульса, интегральное уравнение импульсов, уравнение Фокнера-Скан, формпараметр, коэффициент расхода, потери из-за трения.

1. Постановка задачи

В современных системах управления пространственным положением аэрокосмических летательных аппаратов (ЛА) различного назначения в условиях орбитальных и межпланетных полетов, а также при полетах в верхних слоях атмосферы планет основным видом исполнительных органов являются ракетные двигатели малой тяги (РДМТ) как на газообразном рабочем теле (ГРДМТ), так и на жидких компонентах топлива (ЖРДМТ). Тяга РДМТ находится в диапазоне от сотых долей ньютона до нескольких килоньютонов. Этому диапазону тяг соответствует диапазон чисел Рейнольдса, на 3-5 порядков более низкий, чем для сопел ракетных двигателей больших тяг, что приводит к существенно более значительному влиянию вязкости на энергетические, расходно-тяговые и габаритно-массовые характеристики.

В настоящей статье рассматривается возможность использования учета влияния вязкости на течение в соплах РДМТ в приближении ламинарного пограничного слоя со скольжением скорости. До настоящего времени остаются открытыми вопросы, связанные с границами применимости этого приближения по числу Рейнольдса как сверху, так и снизу.

Существование нижней границы связано как с возможностью использования допущения о разделении области течения на невязкое ядро и пограничный слой, так и с нарушением гипотезы о сплошности течения в соплах РДМТ при достаточно низких числах Рейнольдса. Известны попытки использования в области низких чисел Рейнольдса численных моделей учета вязкости в соплах Лаваля, основанных на использовании либо укороченных [1], либо полных [2] уравнений Навье-Стокса. Однако вследствие значительной вычислительной сложности практического использования эти модели не нашли. Верхняя граница применимости приближения ламинарного пограничного слоя по числу Рейнольдса связана с переходом от ламинарного к турбулентному характеру течения в пограничном слое сопел РДМТ. Проблемы, связанные с особенностями этого перехода в соплах РДМТ, рассматриваются в работе [3], где показано, что ламинарный характер течения в пограничном слое сохраняется в соплах ЖРДМТ вплоть до тяги 400 Н. Однако данные о характере течения в пограничном слое сопел ЖРДМТ с более высоким уровнем тяги весьма немногочисленны и имеют противоречивый характер.

В связи с этим до настоящего времени отсутствуют и апробированные расчетные методы учета влияния вязкости на течение в соплах РДМТ. Поэтому создание адекватной и удобной для практического использования методики учета влияния вязкости на течение в соплах РДМТ относится к разряду актуальных сложных научных проблем, имеющих важное практическое значение. В данной работе излагается решение этой проблемы на основе использования численной модели ламинарного пограничного слоя со скольжением скорости.

2. Используемая физико-математическая модель

Используются следующие допущения, основанные на анализе имеющихся расчетно-теоретических и экспериментальных данных как отечественных, так и зарубежных авторов о влиянии вязкости на течение в соплах РДМТ:

- разделение области течения в соплах РДМТ на невязкое ядро и пограничный слой возможно вплоть до чисел Рейнольдса, соответствующих нижней границе диапазона тяг РДМТ; характер течения в пограничном слое по всей длине сопла РДМТ является ламинарным;

- процесс течения рабочего тела в РДМТ является стационарным, объемные силы отсутствуют;

- течение рабочего тела, как в пограничном слое, так и невязком ядре является однофазным; изменение химического состава и конденсация рабочего тела отсутствует;

- рабочее тело является совершенным газом, число Прандтля равно единице;

- теплообмен между рабочим телом и стенкой сопла отсутствует (для сопел ГРДМТ возможность использования этого допущения очевидна; возможность использования этого допущения для сопел ЖРДМТ основана на анализе результатов работы [4]);

- влиянием поперечной кривизны на параметры пограничного слоя можно пренебречь (возможность использования такого допущения основана на результатах работы [5]).

При этих допущениях уравнения сжимаемого осесимметричного пограничного слоя с учетом продольного градиента давления в системе координат (s, n) показаны на рис. 1.

Эти уравнения имеют следующий вид [6]:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial s}+\frac{\partial(rn)}{\partial n}+\frac{ru}{r_w}\frac{dr_w}{ds}=0\,; \qquad (1)$$

$$ru\frac{\partial u}{\partial s}+rn\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{dp_e}{ds}+\frac{\partial}{\partial n}(m\frac{\partial u}{\partial n})\,; \qquad (2)$$

$$ru\frac{\partial i_0}{\partial s}+rn\frac{\partial i_0}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial n}(l\,\frac{\partial T_0}{\partial n})\,, \qquad (3)$$

где r – плотность; u, v – скорость соответственно в продольном и поперечном направ-

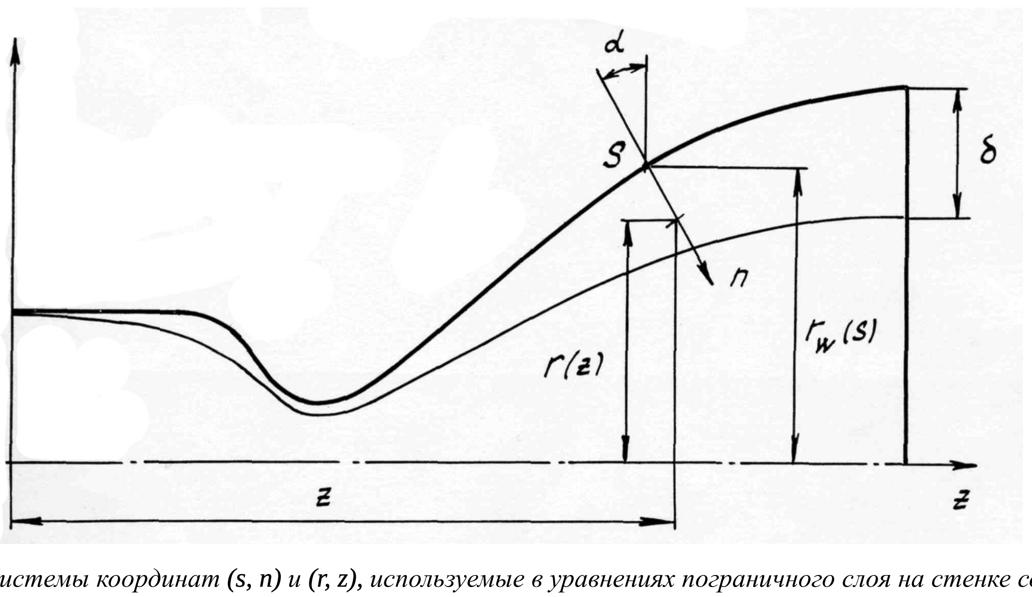

Рис. 1. Системы координат (s, n) и (r, z), используемые в уравнениях пограничного слоя на стенке сопла

лениях; i – энтальпия; T – температура; m – динамический коэффициент вязкости; l – коэффициент теплопроводности газа; r_w – радиус вращения образующей осесимметричного сопла; нижние индексы: о – значение параметра в заторможенном потоке; e – значение параметра на границе пограничного слоя; w – значение параметра на стенке.

Кроме уравнений (1), (2), (3) используется уравнение состояния совершенного газа, условие $\frac{\partial p}{\partial n}=0$ в пределах пограничного слоя, а также зависимости коэффициентов m и l от температуры в виде соответствующих формул Сазерленда.

В [6] для системы уравнений (1), (2), (3) на стенке использовались граничные условия «прилипания», соответствующие сплошному течению (число Кнудсена $Kn \to 0$), однако применительно к РДМТ этот вопрос требует дополнительного анализа. В связи с этим на рис. 2. показаны области течения в координатах $M - \mathrm{Re}_2$, соответствующие различным значениям числа Кнудсена [7] (М – число Маха, Re_2 – число Рейнольдса, у которого в качестве характерных значений длины и скорости выбраны соответственно диаметр и скорость в минимальном сечении сопла). На том же рисунке показана область, соответствующая течениям в соплах РДМТ. В соответствии с рис. 2 для сопел РДМТ основной является область течения со скольжением, и лишь верхнему диапазону тяг соответствует область сплошного течения. В связи с этим наиболее естественным для сопел РДМТ является выбор граничных условий со скольжением, при $Kn \to 0$ переходящих в граничные условия, соответствующие сплошному характеру течения.

В связи с этим для продольной скорости граничные условия скольжения выбраны в виде [8]

$$u(s,0)=\frac{2-a_u}{a_u}\frac{m}{p}\sqrt{\frac{p}{2}\frac{R_0\cdot T_w}{m_г}}\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_w, \qquad (4),$$

где a_u – коэффициент аккомодации скорости молекул для стенки, R_0 – универсальная газовая постоянная, $m_г$ – молекулярный вес.

Граничные условия для температуры на стенке зависят от рассматриваемой задачи. Для сопел РДМТ чаще всего заданной является температура стенки. В этом случае граничные условия на стенке принимают согласно [8] вид:

$$T(s,0)-T_w(s)=\frac{2-a_t}{a_t}\cdot\frac{m}{p}\cdot$$
$$\cdot\frac{2g}{\mathrm{Pr}\cdot(g+1)}\sqrt{\frac{p}{2}\frac{R_0\cdot T_w}{m_г}}\cdot\left[\frac{\partial T}{\partial n}\right]_w, \qquad (5)$$

где a_t – коэффициент аккомодации температуры молекул для стенки, g – показатель изоэнтропы расширения, Pr – число Прандтля.

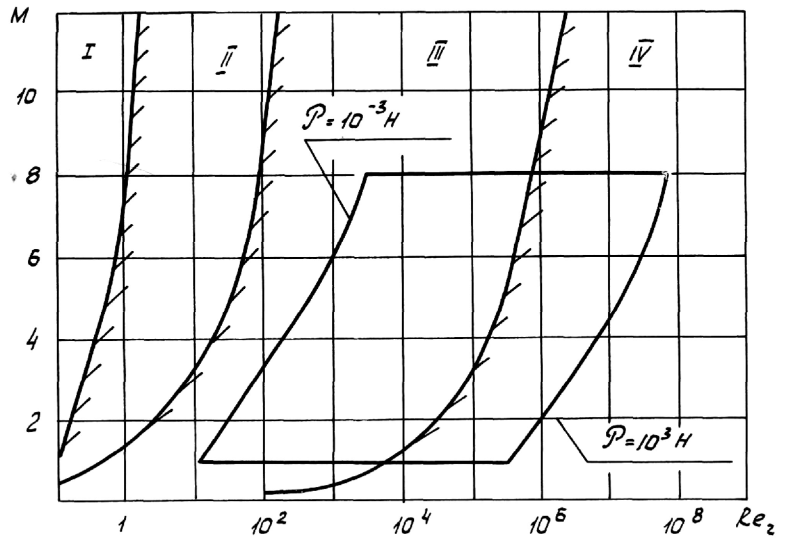

Рис. 2. Области течения, характерные для сопел РДМТ
Области течения: I – свободномолекулярная (Kn > 10); II – переходная (10 > Kn > 0,1); III – со скольжением (0,1< Kn < 0,01), IV – сплошная (Kn < 0,01); P – тяга РДМТ

На внешней границе пограничного слоя используются обычные условия:

$$u(s,n_e) = U_e(s)\,, \tag{6}$$

$$T\,(s,n_e) = T_e(s)\,, \tag{7}$$

где $U_e(s)$, $T_e(s)$ – соответственно продольная скорость и температура на внешней границе пограничного слоя. Параметры течения на внешней границе пограничного слоя определяются в процессе расчета этого течения в невязком ядре. Применительно к течениям в соплах РДМТ расчет течения в невязком ядре является самостоятельной весьма сложной задачей, особенно если это течение продуктов сгорания в соплах ЖРДМТ с профилированной сверхзвуковой частью сопла. Методика численного решения этой задачи излагается в [4].

Отметим, что с учетом принятых допущений уравнения (1) и (2) могут быть решены независимо от уравнения энергии, а решением уравнения энергии является следующая зависимость, связывающая профиль температуры в пограничном слое с профилем продольной скорости [9]:

$$\frac{T(n)}{T_e} = \frac{T_w}{T_e} - \frac{(T_e - T_w)}{T_e}\frac{u(n)}{u_e} + $$
$$+\sqrt{\Pr}\cdot\frac{g-1}{2}M_e^{\,2}\cdot\frac{u(n)}{u_e}\cdot\left(1-\frac{u(n)}{u_e}\right). \tag{8}$$

Профиль продольной скорости в (8) должен быть получен из решения динамической системы уравнений (1), (2) с граничными условиями (4)-(7). Эта система уравнений может быть решена численно с использованием той или иной разностной схемы. Основные трудности такого решения связаны с необходимостью учета больших градиентов рассчитываемых параметров как в продольном, так и в поперечном направлениях, что вызывает необходимость уменьшения шага разностной сетки и связанный с этим рост требуемых вычислительных ресурсов. В связи с этим далее излагается интегральный метод расчета ламинарного пограничного слоя в осесимметричных соплах РДМТ с учетом сжимаемости и продольного отрицательного градиента давления.

3. Численный метод расчета, основанный на использовании однопараметрического интегрального подхода

Однопараметрический интегральный метод расчета ламинарного пограничного слоя был впервые предложен Т. Карманом и К. Польгаузеном, затем развит Н. Е. Кочиным и Л. Г. Лойцянским применительно к плоским течениям несжимаемой жидкости с продольным градиентом скорости и обобщен для осесимметричных течений сжимаемого газа с продольным градиентом давления в работах Ротта и Крабтри, Коэна и Решотко [7], В.С. Авдуевского и Р.М. Копяткевича [6]. В соответствии с этим методом, последовательно используя преобразования Дородницына-Стюартсона и Степанова-Манглера [6,7], от исходных уравнений (1), (2) приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial V} + \frac{\partial V}{\partial h} = 0\,, \tag{9}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial V} + V\frac{\partial U}{\partial h} = U_e\frac{\partial U_e}{\partial V} + n\,\frac{\partial^2 U}{\partial h^2}\,, \tag{10}$$

описывающих течение в плоском несжимаемом пограничном слое.

В уравнениях (9) и (10) z и h – координаты соответственно в продольном и поперечном направлении, U и V – продольная и поперечная скорости, U_e – скорость в невязком ядре, величина v в (10) и последующих выражениях соответствует кинематическому коэффициенту вязкости.

Для системы уравнений (9) и (10) можно записать интегральное уравнение импульсов

$$\frac{df_\Delta(V)}{dV} = \frac{U_e'}{U_e}F(f_\Delta) + \frac{U_e''}{U_e}\cdot f_\Delta(V)\,, \tag{11}$$

где $f_\Delta(V) = \dfrac{U_e'(V)\cdot\Delta^{**2}(V)}{n}$ – формпараметр;

$$F(f_\Delta) = 2(J(V) - (2 + H_\Delta(V)\cdot f_\Delta))\,;$$

$$J(V) = \left[\frac{\partial(U/U_e)}{\partial(h/\Delta^{**})}\right]_{h=0};\ \ H_\Delta(V) = \Delta^*(V)/\Delta^{**}(V)\,;$$

$\Delta^*(V)$ – толщина вытеснения,

$\Delta^{**}(V)$ – толщина потери импульса.

Характер зависимостей $F(f_\Delta)$ и $H(f_\Delta)$, а следовательно, и вид зависимостей $f_\Delta(V)$, $\Delta^*(V)$, $\Delta^{**}(V)$ определяется в однопараметрическом методе выбором того или иного семейства скоростей в пограничном слое, зависящем от характера течения в невязком потоке. Вопрос о выборе конкретного семейства скоростей применительно к рассматриваемой задаче о расчете параметров ламинарного пограничного слоя в соплах РДМТ рассматривается в следующем разделе данной статьи. Там же рассматривается вопрос и о конкретном виде зависимостей $F(f_D)$ и $H(f_D)$.

При линейном характере зависимости

$$F(f_D) = a - b \cdot f_D \tag{12}$$

уравнение (11) имеет, согласно [7], интеграл

$$f_D(x) = \frac{aU'_e(V)}{U^b_e(V) r_w^2(V)} \int_{x_0}^{x} U_e^{b-1}(V) r_w^2(V) dx + \\ +[\frac{U_e(x_0)}{U_e(V)}]^b \frac{U'_e(V) \cdot r_w(x_0)}{U_e'(x_0) \cdot r_w^2(V)} f_D(x_0). \tag{13}$$

Переходя в (13) к физическим переменным, получим

$$f_D(s) = -\frac{a[1/p_e(s)]^{\frac{7g-3}{2g}}}{r_w(s)^2 M_e(s)^{b+1}} \frac{dp_e(s)}{ds} \cdot \\ \cdot \int_{s_0}^{s} M_e^{b-1}(s) p_e(s)^{\frac{7g-3}{2g}} r_w^2(s) ds + \frac{C(s)}{C(s_0)} f_D(s_0), \tag{14}$$

где

$$C(s) = (\frac{1}{p_e(s)})^{\frac{7g-3}{2g}} [M_e^b(s) r_w^2(s)]^{-1} \frac{dp_e(s)}{ds}. \tag{15}$$

В (14) и (15) M_e и p_e – число Маха и безразмерное давление на границе пограничного слоя с невязким ядром, $p_e = p_e / p_{oc}$, где p_e и p_{oc} – соответственно статическое давление на границе пограничного слоя с невязким ядром и давление на входе в сопло.

В (14) значению координаты (s_0) соответствует расстояние от начала цилиндрической части камеры сгорания до входа в сопло, а величина $f_\Delta(s_0)$ определяется по формуле

$$f_D(s_0) = \frac{u'(s_0) \cdot D^{**2}(s_0)}{\nu}. \tag{16}$$

Толщина потери импульса на входе в сопло $\Delta^{**}(s_0)$, входящая в формулу (16), определяется зависимостями

$$D^{**}(s_0) = D^*(s_0) \cdot H_D(s_0), \tag{17}$$

$$D^*(s_0) = 1,72\sqrt{\frac{\nu \cdot s_0}{u(s_0)}}. \tag{18}$$

При этом зависимость (18) определяет изменение толщины вытеснения для пограничного слоя при течении несжимаемой жидкости на цилиндрической поверхности с постоянным радиусом кривизны.

Распределение формпараметра $f(s)$ по длине сопла с учетом сжимаемости может быть найдено по формуле

$$f(s) = t_e^{\frac{2g-3}{g-1}}(s) \cdot f_D(s), \tag{19}$$

где $t_e(s) = T_e(s)/T_{oc}$ - безразмерная температура, T_{oc} - температура рабочего тела на входе в сопло.

Известное распределение формпараметра $f(s)$ позволяет определить толщину потери импульса по длине сопла

$$d^{**}(s) = \sqrt{f(s) \cdot \nu_w / (du_e/ds)}, \tag{20}$$

а затем толщину вытеснения

$$d^*(s) = d^{**}(s) \cdot H(s). \qquad (21)$$

В формуле (21) зависимость $H(s)$ с учетом сжимаемости определяется через зависимость $H_\Delta(s)$:

$$H(s) = [(H_D(s)+1)/t_e(s)]-1. \qquad (22)$$

Использование зависимостей (14)-(22) позволяет при известных параметрах течения в невязком ядре определить интегральные параметры пограничного слоя по всей длине сопла, в том числе в минимальном сечении и на срезе. Это обеспечивает возможность учесть влияние вязкости на величину расхода сопла, а также определить величину потерь удельного импульса из-за трения.

Действительный расход через сопло определяется с помощью коэффициента расхода m_c:

$$\dot{m} = \dot{m}_{èä} \cdot m_c, \qquad (23)$$

где $m_c = (1-Dm_I)(1-Dm_{òð})$. (24)

Первый сомножитель в (24) определяет уменьшение расхода из-за криволинейности поверхности перехода через скорость звука в области минимального сечения сопла. При радиусной форме этой части сопла величина Dm_I определяется с помощью зависимости

$$Dm_I = 0{,}01\bar{R}_*^{-1{,}41}, \qquad (25)$$

аппроксимирующей, как показано в [10], результаты численных расчетов в диапазоне $0{,}5 \le \bar{R}_* \le 10$ с погрешностью, не превышающей 0,1%; при $\bar{R}_* > 10$ величина Dm_I принимается равной нулю. Величина $\bar{R}_*$ равна отношению радиуса скругления трансзвуковой части сопла в продольном направлении к радиусу минимального сечения.

Второй сомножитель в (24) характеризует уменьшение расхода из-за влияния вязкости и для осесимметричного сопла определяется следующим образом:

$$Dm_{òð} = 2(d_*^* / r_*). \qquad (26)$$

В соплах ракетных двигателей для определения потерь удельного импульса из-за трения используется следующая зависимость [10]:

$$x_{òð}(s) = \frac{2d^{**}(s)/r_w(s)}{1+1/(g\,M_e^2(s))}. \qquad (27)$$

При этом в стандартном варианте этой зависимости для сопел маршевых ЖРД под зависимостью $r_w(s)$ понимается радиус контура сопла, а $M_e(s)$ – число Маха на стенке сопла в невязком приближении. Использование стандартного варианта зависимости (27) для расчета потерь из-за трения в соплах РДМТ приводит к значительной погрешности из-за нарастания пограничного слоя по длине сопла, что приводит к уменьшению эффективного сечения сопла и росту давления на стенке сопла из-за обратного влияния пограничного слоя на течение в невязком ядре. Для уменьшения этой погрешности необходимо использование модифицированного варианта зависимости (27), в котором под $r_w(s)$ понимается радиус сопла, уменьшенный на толщину вытеснения $d^*(s)$, а под зависимостью $M_e(s)$ – число Маха на стенке сопла, определенное с учетом обратного влияния пограничного слоя на течение в невязком ядре.

Для реализации изложенной методики применительно к расчету параметров ламинарного пограничного слоя по всей длине сопел РДМТ необходимо решить следующие, пока открытые, проблемы:

- установить возможность линеаризации функции $F(f_D)$ и выявить вид зависимости $H(f_D)$ во всем диапазоне значений параметра градиентности b, характерного для сопел РДМТ, в том числе для трансзвуковой части сопел РДМТ, в которой реализуются большие продольные отрицательные градиенты давления;

- обеспечить учет влияния скольжения скорости на параметры течения в пограничном слое сопел РДМТ, а также возможность расчета не только интегральных, но и локальных параметров в пограничном слое для любого заданного сечения сопла РДМТ;

- учесть обратное влияние пограничного слоя на течение в невязком ядре для сверхзвуковой части сопла.

Решению этих проблем посвящен следующий раздел данной статьи.

4. Выбор автомодельного семейства скоростей в ламинарном пограничном слое РДМТ с учетом скольжения скорости на основе использования уравнения Фокнера-Скан

В качестве семейства скоростей в однопараметрическом методе расчета интегральных параметров ламинарного пограничного слоя сопел РДМТ выбрано автомодельное семейство скоростей для класса течений с изменением скорости в невязком ядре в соответствии с зависимостью

$$U_e = cV^m. \qquad (28)$$

Для этого класса течений возможно уменьшение на единицу числа независимых переменных в уравнениях (9)…(10) за счет перехода к новой независимой переменной [7]:

$$x = \sqrt{\frac{m+1}{2}\frac{c}{v}}hV^{\frac{m-1}{2}} = h\sqrt{\frac{U'_e}{v_0 b}}, \qquad (29)$$

где b, называемый параметром градиентности, определяется выражением

$$b = 2m/(m+1). \qquad (30)$$

В результате этого преобразования вместо системы уравнений (9)-(10) в частных производных приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка, названному по имени авторов, впервые получивших его, уравнением Фокнера-Скан:

$$\frac{d^3 j(x)}{dx^3} + j(x)\frac{d^2 j(x)}{dx^2} = b[(\frac{dj(x)}{dx})^2 - 1] \qquad (31)$$

с краевыми условиями скольжения скорости на стенке:

$$j(0) = 0,\ j'(0) = j_0,\ j'(x) \to 1 \text{ при } x \to \infty. \qquad (32)$$

Функция $j(x)$ в уравнении (31) имеет смысл безразмерной функции тока, а ее производная $j'(x)$ имеет смысл безразмерной продольной скорости в пограничном слое.

Анализ показывает, что применительно к рассматриваемой задаче возможность использования однопараметрического метода расчета параметров ламинарного пограничного слоя для сопел РДМТ в первую очередь связана с численным решением уравнения (31) с краевыми условиями (32) в широком диапазоне значений параметра градиентности $0 < b \le 500$ при граничных условиях скольжения, соответствующих примерному диапазону параметра $j'(0)$ от 0 до 0.4. В диапазоне значений $0 > b \le 2.4$ уравнение (31) было впервые решено Хартри без учета граничных условий скольжения[7]. В [6] была показана необходимость решения уравнения Фокнера-Скан при значениях параметра градиентности $b > 2$ для расчета параметров пограничного слоя в трансзвуковой части сопел Лаваля, где реализуются максимальные отрицательные градиенты давления. Для этого в [6] использовалось приближенное решение уравнения Фокнера-Скан в виде

$$j'(x) = 3th^2(\sqrt{b/2}x + 1{,}146) - 2. \qquad (33)$$

Так же, как и в решении Хартри, в [6] не рассматривались граничные условия скольжения.

В данной работе предлагается методика численного решения уравнения Фокнера-Скан для произвольных значений $b > 0$ с граничными условиями скольжения, включающего, как частный случай, и решение Хартри.

Используемая методика численного решения уравнения (31) заключается в том, что исходная краевая задача (31), (32) сводится к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$j\ '(x) = u(x)\,, \quad (34),$$

$$u'(x) = v(x)\,, \quad (35)$$

$$v'(x) = b[u^2(x) - 1] - v(x)\cdot j\,(x)\,. \quad (36)$$

Начальные условия для функций j, u и v при $x = 0$ уточняются в процессе последовательного решения задачи Коши. В начальном приближении это следующие значения:

$$j\,(0) = 0\,,\ u(0) = 0\,,\ n\,(0) = 6\cdot\sqrt{\frac{b}{2}}\cdot th(1.146)\,. \quad (36)$$

Для определения начального приближения граничного условия $v(0)$ использовалось приближенное решение (33), полученное в [6], из которого дифференцированием получаем выражение для $v(0)$ в (36).

Бесконечный интервал изменения величины x заменяется конечным $0 < \xi < \xi_w$ и разбивается на отрезки одинаковой длины с шагом $h = x_w / N$.

Задача Коши при данных граничных условиях решается численно методом Рунге-Кутта. После определения функций $v(x)$, $j\,(x)$, $u(x)$, на интервале $(0, x_w)$ производится уточнение граничного условия $v(0)$:

$$n^{(r+1)}(0) = n^{(r)}(0) + d\,v^{(r+1)}, \quad (37)$$

где r – номер итерации; $d\,v^{(r+1)} = d^{(r)}/2$ – величина поправки.

Величина поправки $d\,v^{(\tilde{a}+1)}$ может быть как положительной, так и отрицательной. Если выполняется условие $u^{(\tilde{a})}(x_w) < 1$, то поправка $d\,v^{(\tilde{a}+1)}$ положительна. Если выполняется условие $u^{(\tilde{a})}(x_w) > 1$, то поправка $d\,v^{(\tilde{a}+1)}$ отрицательна. Расчет прекращается при достижении заданной точности в соответствии с условием $d\,v < e$, где $\varepsilon = 10^{-6}$.

Для заданного сечения сопла решение уравнения Фокнера-Скан (31) с неизвестными заранее граничными условиями скольжения описывается ниже.

По величине формпараметра f_Δ, методика определения которого изложена выше в разделе 3, устанавливается величина параметра градиентности b, соответствующая заданному сечению сопла с продольной ординатой s:

$$b\,(s) = 3{,}763 - 271{,}4\,f_D(s) + 0{,}6980\cdot 10^4\,f_D{}^2(s) - \\ -0{,}7294\cdot 10^5\,f_D{}^3(s) + 0{,}2811\cdot 10^6\,f_D{}^4(s). \quad (38)$$

Для определения граничного условия скольжения в процессе r-ой итерационной процедуры используются следующая зависимость:

$$j\ '(0)^{(r)} = \frac{U_w{}^{(r)}}{U_e}\,. \quad (39)$$

Величина $U_w{}^{(r)}$ в (39) определяется в соответствии с зависимостью (4). Использование преобразований Дородницына-Стюартсона, а также Степанова-Манглера позволяет выразить производную $(dU/dn)_w{}^r$ в (4) через величину $j\,''(0)^{r-1}$ с помощью следующей зависимости:

$$\left(\frac{dU}{dn}\right)_w^{(r)} = U_e\,\frac{B(b)\cdot r_w}{D^{**}(b)}\sqrt{t_e}\,p_e\overline{T}_w j\ ''(0)^{(r-1)}\,, \quad (40)$$

где величина $B(\beta)$ определяется зависимостью

$$B(b) = \int_0^\infty j\ '(x)[1 - j\ '(x)]dx\,, \quad (41)$$

а для определения величины $\Delta^{**}(\beta)$ используется выражение

$$D^{**}(b) = \int_0^\infty \frac{U(h)}{U_e(h)}(1 - \frac{U(h)}{U_e(x)})dh = \\ = \sqrt{\frac{vb}{U_e\,'(x)}}\int_0^\infty j\ '(x)[1 - j\ '(x)]dx. \quad (42)$$

В первой итерации величина $\varphi''(0)$ в (41) устанавливается с помощью зависимости (37).

После определения граничных условий в итерации (r) уравнение Фокнера-Скан решается при этих граничных условиях в соответствии с изложенной выше методикой, а затем проводится проверка точности решения с помощью условия

$$\left| j\,'(0)^{(r+1)} - j\,'(0)^{(r)} \right| \le e\,, \tag{43}$$

где величина e характеризует заданную точность. Итерационный процесс заканчивается при достижении заданной точности, при этом решение уравнения Фокнера-Скан $\varphi'(\xi)$ в последней итерации определяет профиль безразмерной продольной скорости в системе координат (x, h).

Данная методика численного решения уравнения Фокнера-Скан при граничных условиях скольжения была реализована на ЭВМ и оказалась работоспособной в диапазоне $0 \le b \le 10^4$.

Использование изложенной методики численного решения уравнения Фокнера-Скан позволило установить возможность линеаризации функции $F(f_D)$, а также определить вид функции $H(f_D)$, входящей в (22), во всем диапазоне значений параметра градиентности b, характерном для сопел РДМТ:

$$H_D(s) = 0{,}6554[\exp(-13{,}37\, f_D(s))] + 2\,. \tag{44}$$

Совокупность зависимостей (13) ...(27) совместно с зависимостью (44) обеспечивает расчет интегральных параметров ламинарного пограничного слоя по всей длине сопла РДМТ. Учет обратного влияния пограничного слоя на течение в невязком ядре обеспечивается за счет корректировки исходного контура сопла на величину толщины вытеснения, определения параметров течения в невязком ядре в этом скорректированном контуре с последующим уточнением параметров пограничного слоя.

Методика расчетного определения профилей локальных параметров течения рабочего тела в заданном сечении сопла РДМТ основана на совместном использовании решений уравнения Фокнера-Скан (31) с граничными условиями скольжения скорости (при значении параметра градиентности b, соответствующего заданному сечению сопла) и преобразований Дородницына-Стюартсона, а также Степанова-Манглера. Такое совмещение позволяет связать безразмерную координату x в (31) с поперечной координатой n в исходной системе координат (s, n) при величине s, соответствующей заданному сечению сопла.

Так, профиль продольной скорости $u(\xi)$ в пограничном слое для сечения сопла с продольной координатой s связан с профилем безразмерной скорости $\varphi'(\xi)$ соотношением

$$u(x) = u_e(x) \cdot j\,'(x)\,. \tag{45}$$

Обратные преобразования Дородницына-Стюартсона и Степанова-Манглера приводят к следующей зависимости между поперечной ординатой n и безразмерной ординатой x в пограничном слое для сечения сопла с продольной координатой s:

$$n(s) = \frac{D^{**}(s)}{r_w(s)} \frac{a_{e_0}}{a_e(s)} \int_0^x \frac{r_{e_0}}{r(x)} dx\,. \tag{46}$$

Профиль плотности $\rho(\xi)$ в (46) определяется из уравнения состояния совершенного газа

$$r(x) = \frac{p_e}{R_{\tilde{a}} T(x)}\,. \tag{47}$$

Совокупность зависимостей (45)-(47) позволяет рассчитать профиль продольной скорости $u(n)$ с учетом скольжения в пограничном слое для сечения сопла, заданного продольной ординатой s. Зависимость (8) дает возможность по известному поперечному профилю продольной скорости $u(n)$ вычислить поперечный профиль температуры $T(n)$. Использование уравнения состояния совершенного газа позволяет, в свою очередь, по поперечному профилю температуры $T(n)$ определить поперечный профиль плотности $r(n)$.

Изложенная физико-математическая модель течения в ламинарном пограничном слое со скольжением и численная методика решения уравнений этой модели были реализованы в компьютерной форме. При этом была обеспечена устойчивость численных решений в процессе достижения заданной точности расчета во всем диапазоне тяг штатных и перспективных РДМТ как на газообразных, так и на жидких компонентах топлива. Результаты апробации, показывающие адекватность разработанной численной модели, излагаются в [11].

Библиографический список

1. Шустов, С. А. Исследование течений в соплах Лаваля при низких числах Рейнольдса [Текст] / С. А. Шустов [и др.] // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1980. – №3. - С. 81-88.

2. Кувшинников, Н. Д. Исследование и расчет течений вязкого газа в соплах Лаваля [Текст] / Н. Д. Кувшинников // Дис. на соискание степени канд. физ.-мат.наук. – М., 1984.

3. Шустов, С. А. Экспериментальное исследование отрыва потока в соплах ракетных двигателей малой тяги с профилированной сверхзвуковой частью сопла [Текст] / С. А. Шустов // В данном выпуске Вестника СГАУ.

4. Шустов, С. А. Моделирование газодинамических и теплообменных процессов в ЖРДМТ [Текст] / С. А.Шустов [и др.] // Математическое моделирование, РАН, том 13. – № 6. - 2001. - С. 45-51.

5. Быркин, А. П. Численный расчет осесимметричного ламинарного пограничного слоя с учетом влияния поперечной кривизны [Текст] /А. П. Быркин // Труды ЦАГИ, выпуск 1035. – М., 1966. - 20 с.

6. Авдуевский, В. С. Расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе при наличии теплообмена и произвольном распределении давления вдоль поверхности [Текст] / В.С.Авдуевский, Р.М. Копяткевич // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. – 1960. – 1. – С. 3-11.

7. Лойцянский, Л. Г. Ламинарный пограничный слой [Текст] / Л.Г. Лойцянский // М:. Гос. изд. физ.-мат. лит-ры. – 1962. – 479 с.

8. Рэй, Дж. Некоторые результаты численных расчетов вязких течений разреженного газа в приближении узкого канала [Текст] / Дж. Рэй // Ракетная техника и космонавтика. – 1971. – №5. – С.81-90.

9. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике [Текст] / В.С. Авдуевский [и др.] // М.: Машиностроение, 1975. – 645 с.

10. Пирумов, У.Г. Особенности однофазного течения в сопле [Текст] / У.Г. Пирумов // Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. Т.1: Методы расчета. – М.: АН СССР, ВИНИТИ, 1971. – 190 с.

11. Шустов, С. А. Апробация численной модели учета влияния вязкости на течение в соплах ракетных двигателей малой тяги в приближении ламинарного пограничного слоя со скольжением [Текст] / С.А. Шустов // В данном выпуске Вестника СГАУ.

References

1. Shustov, S. A. Analysis of flows in Laval nozzles at low Reynolds numbers / S. A. Shustov et al. // Izvestiya of Academy of Science of USSR. Mechanics of fluids and gases. – 1980. – No. 3. – pp. 81-88.

2. Kuvshinnikov, N. D. Analysis and calculation of viscous gas flows in Laval nozzles / N. D. Kuvshinnikov // Dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical science. – Moscow, 1984.

3. Shustov, S. A. Experimental analysis of flow separation in low-thrust rocket engine nozzles with a profiled supersonic nozzle part / S. A. Shustov // In this issue of SSAU Vestnik.

4. Shustov, S. A. Modeling of gas dynamic and heat exchange processes in liquid-propellant low-thrust rocket engines / S. A. Shustov et al.// Mathematical modeling, Russian Academy of Sciences, vol. 13. – No. 6. – 2001. – pp. 45-51.

5. Byrkin, A. P. Numerical design of axially symmetric laminar boundary layer taking into accout the influence of transverse curvature / A.P.Byrkin // Transaction of Central Aerohydronamics Institute, issue 1035. – Moscow, 1966. – 20 pp.

6. Avduyevsky, V. S. Calculation of a laminar boundary layer in compressed gas with heat exchange and arbitrary distribution of pressure along the surface / V. S. Avduyevsky, R. M. Kopyatkevitch // Izvestiya of USSR Academy of Science, Mechanics and mechanical engineering. – 1960. – No. 1. – pp. 3-11.

7. Loytsyansky, L. G. Laminar boundary layer / L. G. Loytsyansky // Moscow: State publishers of physical and mathematical literature. – 1962. – 479 pp.

8. Ray, J. Some results of numerical results of rarefied gas viscous flows in the approximation of a narrow channel / J. Ray // Rocket engineering and cosmonautics. – 1971. – No. 5. – pp. 81-90.

9. Fundamentals of heat transfer in aviation and space rocket engineering / V. S. Avduyevsky et al // Moscow: Machinostroyeniye, 1975. – 645 pp.

10. Pirumov, U. G. Peculiarities of one-phase flow in a nozzle / U. G. Pirumov // Thermodynamical and thermophysical properties of combustion products. Vol. 1: Design methods. – Moscow: USSR Academy of Sciences, All-Union Institute of Scientific and Technical Information, 1971. – 190 pp.

11. Shustov, S. A. Approbation of the numerical model of account of viscosity impact on the flow in low-thrust rocket engine nozzles in the approximation of a laminar boundary layer with sliding // S. A. Shustov / In this issue of SSAU Vestnik.

NUMERICAL MODEL OF VISCOSITY IMPACT ON FLOW IN LOW-THRUST ROCKET ENGINE NOZZLES IN THE APPROXIMATION OF A LAMINAR BOUNDARY LAYER WITH VELOCITY SLIP

Samara State Aerospace University

The paper describes a numerical model of viscosity impact on flow in low-thrust rocket engine nozzles developed at the research centre of space power of Samara State Aerospace University. The accepted assumptions of the physical model used are outlined. The mathematical model is described in the form of equations in partial derivatives which express the laws of conservation of mass, momentum and energy as applied to the flow in the laminar boundary layer of low-thrust rocket engine nozzles with the negative longitudinal pressure gradient under boundary conditions of velocity slip and temperature jump on the nozzle wall. The developed algorithm of solving the equations of the mathematical model numerically is outlined, which provides the stability and the pre-set accuracy of calculation.

Laval nozzle, boundary layer, velocity slip, displacement thickness, momentum thickness, integral momentum equation, Fokner-skan equation, shape parameter, consumption ratio, friction losses.

Информация об авторе

Шустов Станислав Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры теории двигателей летательных аппаратов, Самарский государственный аэрокосмический университет; e-mail: Olga_Kostrova@mail.ru. Область научных интересов: термогазодинамика двигателей летательных аппаратов.

Shustov Stanislav Alexeyevitch, candidate of technical science, associate professor of the department of aircraft engine theory, Samara State Aerospace University, e-mail: Olga_Kostrova@mail.ru. Area of research: thermogasodynamics of aircraft engines.