*УДК 533.6:519.63*

# РАВНОМЕРНЫЙ И ЭКВИДИСТАНТНЫЙ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ УПОРЯДОЧЕННОЙ РАСЧЕТНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

©2008 А. Н. Ефимов, В. Н. Матвеев

Самарский государственный аэрокосмический университет

Представлены два способа создания плоской упорядоченной алгебраической расчетной сетки для четырехугольных областей с криволинейными образующими.

*Газовая динамика, исследование, погрешность, расчетная сетка, разбиение, построение*

В настоящее время широкое распространение получили численные методы исследования, применение которых требует разбиения пространства на элементарные подобласти (элементы) и совместного исследования процессов в них. При этом форма элемента может быть выбрана произвольно, исходя из удобства записи уравнений для описания происходящих в нем физических процессов. На подобном подходе основаны широко распространенные в инженерной практике методы конечных элементов[1] и контрольных объемов [2]. Но при этом возникает задача разбиения исходной геометрической модели на элементы - создание расчетной сетки. Для уменьшения погрешности расчета на форму элемента накладывается некоторый ряд требований и ограничений [6]:

- в качестве формы элемента желательно использовать треугольник или четырехугольник;
- фигура должна быть выпуклой, т.е. прямая, проходящая через любую из сторон, не должна пересекать другие стороны;
- для достижения наибольшей точности расчета желательно, чтобы внутренние углы при вершинах элементов лежали в пределах $45° \le \alpha \le 135°$.

Известны два основных подхода к построению сетки.

1. **Использование неупорядоченной сетки**. При данном подходе сетка создается произвольным образом. В качестве формы элемента обычно используется треугольник (тетраэдр в случае трехмерной задачи) ввиду того, что данная геометрическая фигура всегда является выпуклой. В то же время форма всей расчетной области может быть произвольной. На количество получаемых элементов обычно не накладывается жестких ограничений. Данный подход очень удобен для построения сетки для достаточно сложной исходной геометрии, он позволяет осуществить локальное сгущение сетки. Самым известным способом построения неупорядоченной сетки является триангуляция Делоне [3]. Сложность создания сетки не зависит от формы расчетной области. Основным недостатком использования неупорядоченной сетки является существенная численная диффузия [4], увеличивающая погрешность расчета. Причем эта погрешность имеет нерегулярный, вероятностный характер. Неупорядоченная сетка применяется обычно в случаях, когда сетка упорядоченного типа просто не может быть создана либо когда допускается повышенная погрешность расчета.

**Использование упорядоченной сетки**. В данном случае сетка строится в соответствии с жесткими правилами. Число элементов задается точно, как и закон их распределения по расчетной области. В качестве формы элемента обычно используется четырехугольник (параллелепипед в случае трехмерной задачи). Сеткой подобного типа легче управлять, но процесс ее создания чрезвычайно трудоемок, особенно при сложной геометрии исходной области. Этот способ построения сетки применяется в основном в случаях, когда точность результатов расчета крайне важна. Использование упорядоченной сетки желательно при расчете потоков в соплах и турбомашинах, при определении параметров газа, обтекающего профиль крыла самолета, и сверхзвуковых течений газа.

В процессе создания упорядоченной сетки возможно применение двух способов- алгебраического и дифференциального. Оба эти способа определяют координаты узлов элементов и отличаются типом решаемой системы уравнений. Реализация алгебраического наиболее легка, но он подходит для построения сетки достаточно простых областей. Несмотря на это, он широко используется в таких коммерческих системах, как Ansys, StarCD, CFX и др. Дифференциальный метод [5] основан на численном решении системы эллиптических уравнений, подходит для более сложных областей и используется в пакете EZ-Turbo[8].

На сегодняшний день в литературе практически отсутствуют публикации, касающиеся построения расчетных сеток с помощью алгебраического метода. Между тем, ввиду своей простоты данный метод может быть проще реализован на ЭВМ. В данной статье предлагаются два способа построения плоской упорядоченной алгебраической сетки, предназначенной для разбиения четырехугольных областей с криволинейными сторонами.

**Равномерный способ** предназначен для разбиения областей со сторонами произвольной формы.

**Эквидистантный способ** используется в случае, когда две противолежащие стороны области эквидистантны друг другу и при этом необходимо, чтобы стороны элементов были нормальны к эквидистантным сторонам области. Такое требование встречается довольно часто при решении задач газовой динамики в пристеночных зонах.

При использовании предложенных способов к расчетной области предъявляются следующие требования:

- количество элементов вдоль противолежащих образующих должно быть равным;
- противолежащие образующие не должны пересекаться.

**Равномерный способ.**

В качестве исходных данных используются следующие:

○ Форма области. Предполагается, что образующие- стороны области- заданы в виде плоских сплайнов третьего порядка, представленных в параметрическом виде [7]:

$$X(l) = S_{k,x}(l);$$

$$Y(l) = S_{k,y}(l),$$

где $l$-длина сплайна от его начала до произвольной точки с координатами (x,y);

$S_{k,x}(l)$, $S_{k,y}(l)$-сплайн-функции;

$k$-номер образующей.

Образующие попарно пересекаются в точках $A,B,C,D$ (рис. 1). При этом образующие CD и CA начинаются в точке C, образующая AB-в точке A, образующая BD-в точке D. Тогда

$$\begin{cases} S_{1,x}(0) = X_C \\ S_{1,y}(0) = Y_C \end{cases}; \begin{cases} S_{2,x}(0) = X_C \\ S_{2,y}(0) = Y_C \end{cases}; \begin{cases} S_{3,x}(0) = X_A \\ S_{3,y}(0) = Y_A \end{cases}; \begin{cases} S_{4,x}(0) = X_D \\ S_{4,y}(0) = Y_D. \end{cases}$$

Количество элементов вдоль образующих $N_k$: $N_1 = N_3$ и $N_2 = N_4$.

○ Закон распределения узлов вдоль каждой образующей, определяющий расстояние вдоль $k$-го сплайна от его начала до $n$-ого узла, описывается зависимостью $l(n) = T_k(n)$. Здесь $n$-номер узла вдоль образующей.

Функция $l(n)$ обладает следующими свойствами:

$$l(0) = 0;$$

$$l(N_k) = L_k,$$

где $L_k$- длина $k$-ой образующей.

В случае равномерного распределения узлов может быть использована функция

$$l(n) = \frac{L_k}{N_k} \cdot n$$

Процесс построения расчетной сетки заключается в создании матрицы $R$ узлов размером $h \times v$ и определении ее элементов:

$$R = \begin{pmatrix} R_{0,0} & \dots & R_{n,0} & \dots & R_{h,0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{0,m} & \dots & R_{n,m} & \dots & R_{h,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{0,v} & \dots & R_{n,v} & \dots & R_{h,v} \end{pmatrix},$$

где $h = N_1 + 1$,

$v = N_2 + 1$,

$R_{i,j} = \begin{Bmatrix} X_{i,j} \\ Y_{i,j} \end{Bmatrix}$. -элемент матрицы, который соответствует узлу, заданному вектором координат. Определение элементов матрицы R проходит в три этапа. На первом этапе на-

ходятся элементы $R_{0,0}, R_{h,0}, R_{0,v}, R_{h,v}$.- координаты узлов, расположенных в точках *C,D,A* и *B*.

Точке *C* соответствует элемент

$$R_{0,0} = \begin{Bmatrix} S_{1,x}(0) \\ S_{1,y}(0) \end{Bmatrix}$$, точке *D*- элемент

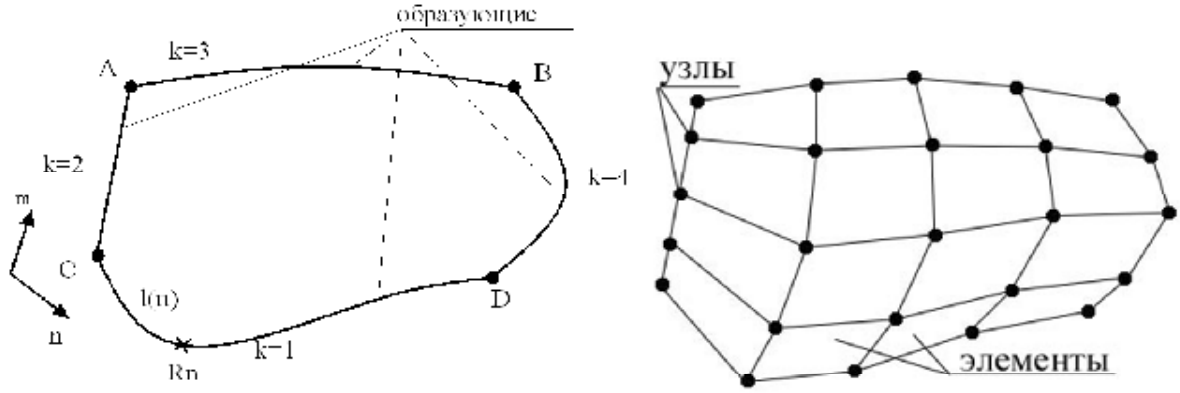
$$R_{h,0} = \begin{Bmatrix} S_{1,x}(L_1) \\ S_{1,y}(L_1) \end{Bmatrix}$$, точке A- элемент

$$R_{0,v} = \begin{Bmatrix} S_{3,x}(0) \\ S_{3,y}(0) \end{Bmatrix}$$, а точке *B*- элемент

$$R_{h,v} = \begin{Bmatrix} S_{3,x}(L_3) \\ S_{3,y}(L_3) \end{Bmatrix}.$$

На втором этапе создаются узлы, лежащие на образующих, между точками A,B,C,D. На образующей CD располагаются узлы с координатами

$$R_{n,0} = \begin{Bmatrix} S_{1,x}\left(T_1(n)\right) \\ S_{1,y}\left(T_1(n)\right) \end{Bmatrix}, 1 \le n \le h-1,$$




*а* *б*

*Рис.1. Создание расчетной сетки равномерным способом:*
*а- исследуемая область, б- сетка*

на образующей CA- узлы с координатами

$$R_{0,m} = \begin{Bmatrix} S_{2,x}\left(T_2(m)\right) \\ S_{2,y}\left(T_2(m)\right) \end{Bmatrix}, 1 \le m \le v-1,$$

на образующей *AB*- узлы с координатами

$$R_{n,v} = \begin{Bmatrix} S_{3,x}\left(T_3(n)\right) \\ S_{3,y}\left(T_3(n)\right) \end{Bmatrix}, 1 \le n \le h-1,$$

на образующей DB- узлы с координатами

$$R_{h,m} = \begin{Bmatrix} S_{4,x}\left(T_4(m)\right) \\ S_{4,y}\left(T_4(m)\right) \end{Bmatrix}, 1 \le m \le v-1.$$

На третьем этапе создаются внутренние узлы $R_{n,m}$. Для этого строится восьмиугольник AFBGDHCE с прямолинейными сторонами (рис.2), для чего выбираются точки, координаты которых совпадают с координатами имеющихся узлов: $H = R_{n,0}, E = R_{0,m}, F = R_{n,v}, G = R_{h,m}$. Значение *n* изменяется в диапазоне $1 \le n \le h-1$ и определяет положение точек H и V, в то время как *m* изменяется в диапазоне $1 \le m \le v-1$ и определяет положение точек E и G. Суммарное количество восьмиугольников равно $(h-2)\cdot(v-2)$.

Строятся четыре дополнительные точки $N_1, K_1, N_2, K_2$- точки пересечения прямых, проходящих через стороны многоугольника AFBGDHCE:

$N_1 = CE \cap DG, N_2 = EA \cap BG, K_1 = CH \cap AF, K_2 = FB \cap HD$

(рис. 2).

Координаты точки E, которая является точкой пересечения двух прямых AB и CD (рис. 3), заданных координатами двух точек, могут быть найдены по формулам

$$Y_E = \frac{(Y_A \cdot e - X_A) - (Y_C \cdot f - X_C)}{g - f}$$

при $g \ne f$. Если $g=f$, то следует принять $Y_E = 10^6$, $X_E = Y_E \cdot f - Y_C \cdot f + X_C$,

где

$$\begin{cases} g = \dfrac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}, & \text{если } Y_B \ne Y_A \\ g = 10^6, & \text{если } Y_B = Y_A \end{cases},$$

$$\begin{cases} f = \dfrac{X_D - X_C}{Y_D - Y_C}, & \text{если } Y_D \neq Y_C \\ f = 10^6, & \text{если } Y_D = Y_C \end{cases}.$$

В дальнейшем строятся четыре дополнительные точки $I_1, I_2, I_3, I_4$ (рис.2), являющиеся точками пересечения соответственно пересечением следующих прямых: $T_1H$ и $K_1E$, $K_1E$ и $N_2F$, $N_2F$ и $K_2G$, $K_2G$ и $N_1H$. Координаты точек $I_1, I_2, I_3, I_4$ определяются по тому же правилу, что и координаты точки E на рис. 3.

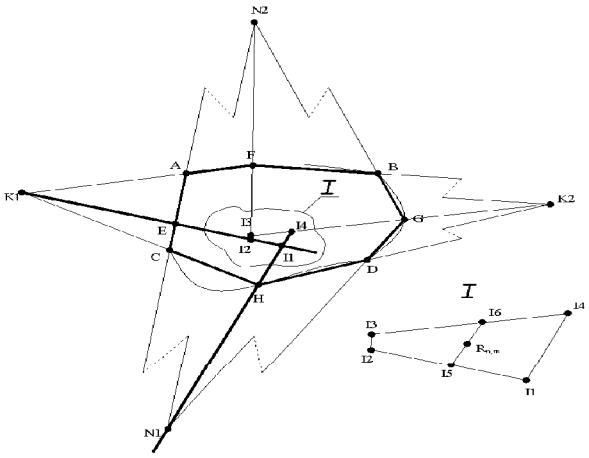



*Рис.2. К определению дополнительных точек $I_1 \ldots I_6$ и $R_{n,m}$*

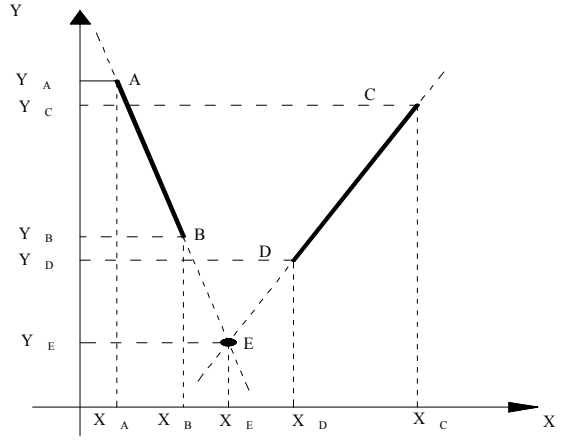



*Рис.3. К определению координат точки пересечения двух прямых*

Методом линейной интерполяции определяются координаты дополнительных точек $I_5$ и $I_6$. Точка $I_5$ расположена на отрезке, проходящем между точками $I_1$ и $I_2$, а точка $I_6$- между точками $I_3, I_4$. Их координаты могут быть найдены по формулам:

$$\begin{cases} X_{I_5} = X_{I_1} \cdot \left(1 - \dfrac{n}{h}\right) + X_{I_2} \cdot \dfrac{n}{h}; \\ Y_{I_5} = Y_{I_1} \cdot \left(1 - \dfrac{n}{h}\right) + Y_{I_2} \cdot \dfrac{n}{h}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{I_6} = X_{I_3} \cdot \left(1 - \dfrac{n}{h}\right) + X_{I_4} \cdot \dfrac{n}{h}; \\ Y_{I_6} = Y_{I_3} \cdot \left(1 - \dfrac{n}{h}\right) + Y_{I_4} \cdot \dfrac{n}{h}. \end{cases}$$

Искомый узел $R_{n,m}$ находится на отрезке, соединяющем точки $I_5$ и $I_6$. Его координаты могут быть найдены методом линейной интерполяции по формуле

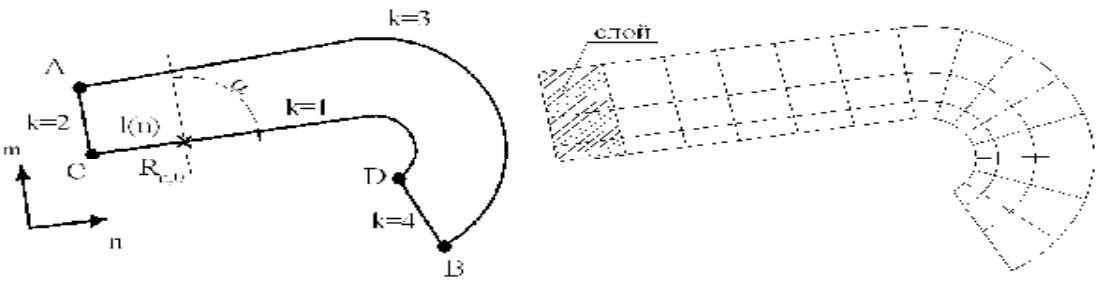
$$R_{n,m} = \begin{Bmatrix} X_{I_5} \cdot \left(1 - \dfrac{m}{v}\right) + X_{I_6} \cdot \dfrac{m}{v} \\ Y_{I_5} \cdot \left(1 - \dfrac{m}{v}\right) + Y_{I_6} \cdot \dfrac{m}{v} \end{Bmatrix}.$$

После заполнения матрицы R можно приступить к формированию элементов сетки. Процесс формирования элементов сетки описан ниже.

**Эквидистантный способ**

Исходные данные идентичны используемым в равномерном способе. Вместе с тем, к расчетной области предъявляется ряд дополнительных требований (рис. 4):

- образующие $AB$ и $CD$ должны быть эквидистантны;
- при построении сетки между эквидистантными кривыми обычно трудно подобрать такие функции распределения узлов по эквидистантным кривым $T_1(n)$ и $T_3(n)$, чтобы ребра элементов были нормальны к образующим. Поэтому предполагается, что функция $T_3(n)$ распределения узлов по образующей AB неизвестна;
- образующие области взаимно перпендикулярны в точках пересечения $AC \perp AB, AC \perp CD, BD \perp AB, BD \perp CD$ длины образующих AC и BD равны. Для данных образующих заданы одинаковые функции распределения узлов $T_2(m) = T_4(m)$, где $0 \leq m \leq v$. Это обуславливает одинаковое распределение соответствующих узлов вдоль данных образующих и равенство длин сторон соответствующих элементов, расположенных как на образующих, так и внутри области.




*а* *б*

*Рис.4. Создание расчетной сетки эквидистантным способом: а- исследуемая область, б- сетка*

Создание матрицы R с помощью эквидистантного метода осуществляется в два этапа.

На первом этапе определяются элементы матрицы

$$R_{n,0} = \begin{Bmatrix} S_{1,x}\left(T_1(n)\right) \\ S_{1,y}\left(T_1(n)\right) \end{Bmatrix}, \text{ где } 0 \le n \le h.$$

На втором этапе создаются остальные элементы матрицы $R_{n,m}$ в диапазоне $0 \le n \le h$, $1 \le m \le v$ послойно от *AC* к *BD*. Для этого восстанавливаются нормали к образующей *CD* в каждом ее узле с координатами $R_{n,0}$. Затем определяются координаты узлов, лежащих на этих нормалях от $R_{n,1}$ до $R_{n,v}$, по формулам

$$R_{n,m} = \begin{Bmatrix} X_{R_{n,0}} + T_2(m)\cos(\alpha) \\ Y_{R_{n,0}} + T_2(m)\sin(\alpha) \end{Bmatrix},$$

где

$$\alpha = arctg\left(\frac{\frac{dS_{1,y}(l)}{dl}}{\frac{dS_{1,x}(l)}{dl}}\right), \text{ при } \frac{dS_{1,x}(l)}{dl} \ne 0$$

и

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ при } \frac{dS_{1,x}(l)}{dl} = 0.$$

**Создание элементов сетки на базе полученных узлов**

По полученным узлам (как в случае использования равномерного, так и эквидистантного способов) создается матрица элементов E размером $(h-1)\times(v-1)$. Каждый элемент матрицы E соответствует элементу сетки. Элемент сетки представляет из себя четырехугольник, вершинами которого являются узлы. Нумерация узлов зависит от конкретного пакета программ, для которого строится сетка (рис. 5). В пакетах Ansys, StarCD принята нумерация узлов против часовой стрелки, в пакетах Fluent и CFX – послойная нумерация узлов. В зависимости от варианта нумерации узлов элемент матрицы записывается в виде

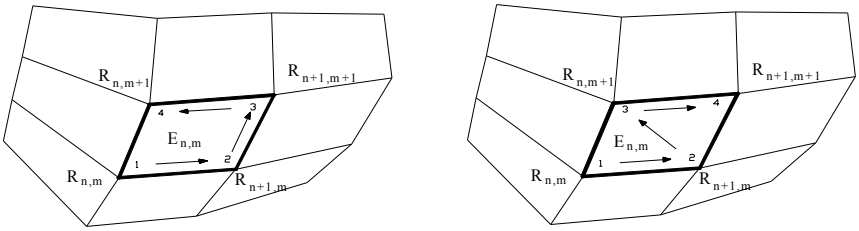
$$E_{m,n} = \begin{Bmatrix} R_{n,m} \\ R_{n+1,m} \\ R_{n+1,m+1} \\ R_{n,m+1} \end{Bmatrix} \text{ для варианта 1,}$$

и $$E_{m,n} = \begin{Bmatrix} R_{n,m} \\ R_{n+1,m} \\ R_{n,m+1} \\ R_{n+1,m+1} \end{Bmatrix} \text{ для варианта 2.}$$

Полученную матрицу узлов R можно в случае необходимости использовать также и для создания треугольной упорядоченной сетки. Для этого каждый плоский элемент разбивается на два треугольных.

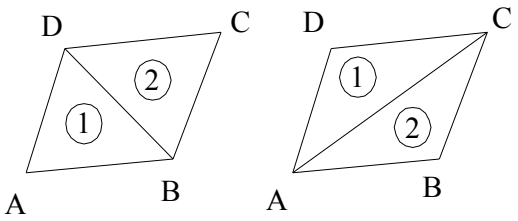
Разбиение выполняется между противолежащими узлами. Существует два варианта подобного разбиения (рис. 6) - отрезками AC и BD. Искомым вариантом разбиения является вариант с наименьшей длиной секущего отрезка [3], в данном случае вариант *а*.

При построении расчетных сеток для решения задач газовой динамики целесообразно комбинировать оба приведенных в статье способа.




*а* *б*

*Рис.5. Варианты нумерации узлов плоского элемента: а - Ansys, StarCD; б - Fluent, CFX*




*а* *б*

*Рис.6. Варианты разбиения четырехугольного элемента на треугольные*

Для этого расчетная область делится вспомогательными образующими на четырехугольные зоны, в которых создается расчетная сетка с использованием равномерного или эквидистантоного способов. При этом эквидистантный способ используется для построения сетки вблизи твердых стенок в области повышенных нормальных градиентов скоростей, так как полученная сетка лучше удовлетворяет критериям качества [6]. Между тем, требование эквидистантности двух противолежащих образующих в общем случае не позволяет использовать данный способ для построения сетки всей расчетной области. Оставшаяся расчетная область разбивается сеткой с использованием равномерного способа, не имеющего подобных ограничений.

Приведенные в статье способы построения сетки реализованы в препроцессоре TurboMesh и используются для построения расчетной сетки межлопаточных каналов турбин. При этом эквидистантный способ используется для построения сетки в области пограничного слоя, а с помощью равномерного способа создается сетка в области ядра потока.

## Библиографический список

1. Сабоннадьер Ж.-К.,Кулон Ж.-Л. Метод конечных элементов и САПР / Пер. с франц.- М.: Мир, 1989. -190 с.
2. С.Патанкар. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152с
3. М.Щербак. Алгоритм автоматической генерации двумерной конечно-элементной сетки. [http://home.onego.ru/~scherbak/].31.05.2005.
4. Эффективное решение конвективного уравнения переноса современными численными методами: методические указания по изучению спецкурса «Решение задач на ЭВМ» / Перм. ун-т; Сост. А.В. Штраубе. – Пермь, 2003. – 28 с.
5. Основы проектирования турбин авиадвигателей /А.В.Деревянко, В.А.Журавлев, В.В.Зикеев и др. /Под.ред. С.З.Копелева.- М.: Машиностроение, 1988. -328 с.
6. ANSYS Modeling and Meshing Guide. [http://strelka.ftf2.tsu.ru/~sid/Linux/Ansys_doc/ /Ansys_html/guide_55/g-mod/GMODToc.htm]. 20.06.2005.
7. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование: учеб. пособие для студентов втузов. - М.: Высш.шк., 1990.- 544с.
8. EZ-Turbo.[http://www.cd-adapco.com/ news/16/es-turbo.htm]. 20.06.2005.

## References

1. Sabonadier J-C., Kulon J-L. Finish Elements Method and CAD. Transl. from French. Moscow: “Mir”, 1989.
2. S.Patankar. Numerical solution methods of heat exchange problems and fluid dynamics. Moscow: “Energoatomizdat, 1984.
3. Scherbak M. Algorithm of 2D FE grid automatic generation. [http://home. onego.ru./~scherbak/]. 31.05.2005.
4. Schtraube A.V. Effective solution of convective equation by modern computing: learners guide for “Problem solving using computer”. Perm: Perm’s University, 2003.
5. Derevyanko A.V., Zhuravlev V.A., Zikheev V.V. Aircraft Turbines Design Basis. Moscow: ”Mashinostroenie”, 1988.

6. ANSYS Modelling and Meshing Guide. [http://strelka.ftf2.tsu.ru/~sid/Linux/ Ansys_doc/_____/Ansys_html/guide_55/g-mod/GMODToc.htm]. 20.06.2005.

7. Bogkaev Y.P Calculus Mathematics and Programming. Tutorial. Moscow: ”Vysshaya Shkola”, 1990.

8. EZ-Turbo. [http://www.cd-adapco.com/news/16/es-turbo.htm] 20.06.2005,

## UNIFORM AND EQUIDISTANT WAYS OF STRUCTURED COMPUTATION GRIGD CREATION FOR CFD PROBLEMS

©2008 A. N. Yefimow, V. N. Matveev

Samara State Aerospace University

Two ways of structured plain algebraic computation grid for tetragonal regions with curvilinear sides are introduced. Uniform way can be used in tetragonal regions with arbitrary side shape. Equidistant way is used in regions where two opposite sides are equidistant.

*Gas dynamics, research, inaccuracy, computational grid, meshing, modeling*

### Информация об авторах

**Ефимов Алексей Николаевич,** аспирант кафедры теории двигателей летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университета. E-mail: tdla@ssau.ru. Область научных интересов – турбомашины, газовая динамика, системы охлаждения.

**Матвеев Валерий Николаевич,** доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теории двигателей летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университета. E-mail: tdla@ssau.ru. Область научных интересов: рабочие процессы микротурбомашин.

**Efimov Alexei Nikolaevich,** postgraduate of Samara State Aerospace University “Theory of Aircraft Engines” department. E-mail: tdla@ssau.ru. Area of research: turbomachines, gas dynamics, cooling systems.

**Matveev Valeriy Nikolaevich,** Doctor of Engineering Science, professor, head of SSAU “Theory of Aircraft Engines” department. E-mail: tdla@ssau.ru. Area of research: operation processes in microturbomachines.