

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИЛОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ ВЫПУКЛОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

© 2018

Е. А. Кишов аспирант;
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва;
evgeniy.kishov@ssau.ru

В. А. Комаров доктор технических наук, профессор;
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва;
vkomarov@ssau.ru

Предложен аппарат топологической оптимизации, основанный на методе выпуклой линеаризации. Формулировка задачи подразумевает минимизацию энергии деформации конструкции при ограничении на объём материала. Решение основано на использовании явной, выпуклой и сепарабельной аппроксимации Лагранжиана с привлечением теории двойственности. Для связи проектных переменных (плотности) с упругими характеристиками материала (модулем упругости) использована нелинейная степенная модель. Проведён анализ чувствительности целевой функции и функции ограничений. Получены основные расчётные формулы итерационного алгоритма оптимизации. Рассмотрен ряд тестовых задач топологической оптимизации, соответствующих передаче усилий элементарными способами: растяжением, сдвигом и кручением. Для всех случаев вычислена величина силового фактора: аналитически и при помощи конечно-элементной модели. Показано полное соответствие полученных силовых схем инженерным представлениям о теоретически оптимальных конструкциях для данных примеров.

Топологическая оптимизация; SIMP-модель; силовая конструкция; метод выпуклой линеаризации; нелинейное программирование; метод конечных элементов.

Цитирование: Кишов Е.А., Комаров В.А. Топологическая оптимизация силовых конструкций методом выпуклой линеаризации // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2018. Т. 17, № 1. С. 137-149. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-1-137-149

Введение

В настоящее время, в связи с бурным развитием аддитивных технологий, стали доступны практически неограниченные по сложности формы деталей. Поэтому можно сказать, что ситуация в корне изменилась: теперь задача инженеров-конструкторов состоит в том, чтобы проектировать на уровне, как можно более близком к оптимальному. Ключевой технологией синтеза оптимальных конструкций, гармонично дополняющей методы 3D-печати, является топологическая оптимизация. Теоретические основы проектирования аддитивных конструкций изложены в [1].

Традиционное проектирование базируется на методе проб и ошибок. Начальный этап основан на «креативности», опыте, интуиции и знаниях инженера. Затем следовал поверочный расчёт, по результатам которого принималось решение о введении поправок, модификаций и создании новой конструкции. Процесс «исходный вариант – расчёт – новый вариант» происходил до тех пор, пока каких-либо улучшений сделать не удавалось. Традиционный подход к проектированию изложен в [2; 3]. Достижения компьютерных технологий и относительная дешевизна вычислительных мощностей привели к революционному прорыву в подходе к проектированию. Можно уверенно сказать, что в области разработки силовых конструкций «оптимизация» прочно вошла в обиход, вытеснив эвристический метод проб.

Топологическая оптимизация – это математический подход, который служит для поиска наиболее выгодного в определённом смысле распределения конструкционного материала в пределах заданного пространства при заданных граничных условиях. Её истоки восходят к работам [4-6].

Топологическая оптимизация базируется на методах конечных элементов и нелинейного математического программирования [7; 8].

Постановка задачи

Проектными переменными выступают плотности элементов ρ_i . Их связь с упругими свойствами среды даётся формулой SIMP-модели материала [9] (Solid Isotropic Material with Penalization):

$$E_i = E_0 \rho_i^p, \quad p > 1, \quad (1)$$

где E_i – модуль упругости элемента i ; E_0 – модуль упругости исходного конструкционного материала; p – так называемый коэффициент «пенализации».

Классическая задача топологической оптимизации состоит в минимизации энергии деформации конструкции при ограничении на количество материала:

$$U(\rho_1, \dots, \rho_n) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \rightarrow \min$$

при условии

$$\begin{cases} g(\rho_1, \dots, \rho_n) = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i - f \cdot V_0 \leq 0, \\ \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \\ \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь f – объёмная доля материала; \mathbf{K} – матрица жёсткости конструкции; \mathbf{u} – вектор перемещений; \mathbf{f} – вектор нагрузок. Плотности ρ_i ограничены снизу малой величиной ρ_{\min} (например, 0.001) для предотвращения плохой обусловленности системы уравнений равновесия.

Метод выпуклой линейризации

Метод выпуклой линейризации, в англоязычной литературе [10] называемый CONLIN (Convex Linearization), относится к категории градиентных методов нелинейного программирования, основанного на явных выпуклых аппроксимациях. Он предназначен для решения задач оптимизации общего вида:

$$\begin{cases} \min_{x_i \in \mathbb{R}^n} f_0(x_1, \dots, x_n), \\ f_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ x_{i\min} \leq x_i \leq x_{i\max}, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3)$$

Суть метода состоит в сведении (3) к последовательности выпуклых подзадач, заданных явными аналитическими выражениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n} f_{0C}^{(k)}(\mathbf{x}) = c_0^{(k)} + \sum_{i=1}^n \left(p_{0i}^{(k)} x_i + \frac{q_{0i}^{(k)}}{x_i} \right), \\ f_{Cj}^{(k)}(\mathbf{x}) = c_j^{(k)} + \sum_{i=1}^n \left(p_{ij}^{(k)} x_i + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_i} \right) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ \alpha_i^{(k)} \leq x_i \leq \beta_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (4)$$

Здесь $k = 1, 2, \dots$ – номер внешних итераций (номер подзадачи); $f_{0C}^{(k)}(\mathbf{x})$ и $f_{Cj}^{(k)}(\mathbf{x})$ – CONLIN-аппроксимации целевой функции и функций ограничений. Коэффициенты c_j , p_{ij} и q_{ij} определяются как:

$$\begin{aligned} c_j &= f_j(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^n \left(p_{ij} x_{0i} + \frac{q_{ij}}{x_{0i}} \right), \\ p_{ij} &= \max \left\{ \frac{\partial f_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}, 0 \right\}, \quad q_{ij} = \max \left\{ -\frac{\partial f_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} x_{0i}^2, 0 \right\}, \\ j &= 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5)$$

Величины $\alpha_i^{(k)}$ и $\beta_i^{(k)}$ задают так называемый «регион доверия» (trust region [11]) аппроксимации и находятся как

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(k)} &= \max \left(x_{i \min}, x_i^{(k)} - \nu (x_{i \max} - x_{i \min}) \right), \\ \beta_i^{(k)} &= \min \left(x_{i \max}, x_i^{(k)} + \nu (x_{i \max} - x_{i \min}) \right), \\ 0 &< \nu < 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Чем ближе коэффициент ν к единице, тем шире «регион доверия» и тем больше шаг в пространстве проектных переменных на текущей итерации. Когда точности CONLIN-аппроксимации оказывается недостаточно, процесс сходимости приобретает осциллирующий характер. В этом случае необходимо уменьшить ν и начать расчёт заново.

Функции, описываемые формулой (4), являются сепарабельными и выпуклыми [7]. Это позволяет для решения аналитических подзадач использовать теорию двойственности. Её идея состоит в следующем. Из условия оптимальности проектные переменные выражаются через множители Лагранжа: если задача записана в явном аналитическом виде – это, как правило, нетрудно сделать. Последние принимаются за так называемые двойственные переменные, для которых решается задача максимизации соответствующей двойственной целевой функции при весьма простых ограничениях. Найденные множители Лагранжа затем подставляются в выражения для основных проектных переменных и находится оптимальное решение основной задачи.

Запишем проблему минимизации функции Лагранжа и условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ) для CONLIN-подзадачи (номер итерации k для краткости опущен):

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} L = f_{0c}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^l \lambda_j f_{jc}(\mathbf{x}), \\ \lambda_j f_{jc}(\mathbf{x}^*) = 0; \mathbf{x}^* = \arg \min L, \\ f_{jc}(\mathbf{x}^*) \leq 0, \\ \lambda_j \geq 0, j=1, \dots, l, \\ \mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i=1, \dots, n\}. \end{array} \right. \quad (7)$$

Доказано [7], что постановка (7) эквивалентна задаче на минимакс:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} \max_{\lambda \geq 0} L(\mathbf{x}, \lambda). \quad (8)$$

Лагранжиан сначала максимизируется по отношению к $\lambda \geq 0$ при фиксированном \mathbf{x} , а затем результат минимизируется по $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$. Выпуклость CONLIN-функций позволяет в (8) поменять местами операторы минимума и максимума, что не изменит оптимального решения \mathbf{x}^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\lambda \geq 0} \varphi(\lambda), \\ \varphi(\lambda) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} L(\mathbf{x}, \lambda). \end{array} \right. \quad (9)$$

Здесь $\varphi(\lambda)$ – двойственная целевая функция, а множители Лагранжа λ – двойственные переменные. Градиент φ по отношению к λ вычисляется как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda_j} &= f_{cj}(\mathbf{x}^*(\lambda)), j=1, \dots, l, \\ \mathbf{x}^*(\lambda) &= \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}} L(\mathbf{x}, \lambda). \end{aligned} \quad (10)$$

Находить максимум функции φ можно при помощи градиентного метода наискорейшего спуска. Формулы для вычисления вектора оптимального решения \mathbf{x}^* по данному вектору множителей Лагранжа λ записываются следующим образом:

$$x_i^*(\lambda) = \begin{cases} \beta_i, & \text{если } \nabla_i L_i(\lambda)|_{x_i=\beta_i} \leq 0, \\ \alpha_i, & \text{если } \nabla_i L_i(\lambda)|_{x_i=\alpha_i} \geq 0, \\ \sqrt{\frac{B_i(\lambda)}{A_i(\lambda)}} & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (11)$$

$$i = 1, \dots, n,$$

где $A_i(\lambda) = p_i + \sum_{j=1}^l \lambda_j p_{ij}$, $B_i(\lambda) = q_i + \sum_{j=1}^l \lambda_j q_{ij}$ и $\nabla_i L_i(\lambda) = A_i(\lambda) - B_i(\lambda)/x_i^2$.

Применение метода выпуклой линеаризации к задаче минимизации энергии деформации

Анализ чувствительности. Для построения CONLIN-аппроксимации энергии деформации и функции ограничений необходима градиентная информация, т. е. их частные производные по проектным переменным.

Для энергии деформации получим:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho_i} = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_i} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{u}. \quad (12)$$

Производная вектора перемещений по плотностям находится путём дифференцирования обеих частей уравнения равновесия $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ (объёмные силы, зависящие от плотности, в данной работе не рассматриваются, т. е. $\partial \mathbf{f} / \partial \rho_i = 0$). При этом:

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_i} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{u}. \quad (13)$$

Подстановка (13) в (12) даёт:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho_i} = - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{u}. \quad (14)$$

Для нахождения производной глобальной матрицы жёсткости заметим, что из соотношения (1) непосредственно следует идентичная зависимость для матрицы жёсткости элемента: $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_{0i} \rho_i^p$. Поскольку матрица жёсткости конструкции представляет собой сумму матриц жёсткости элементов, то

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} = p \rho_i^{p-1} \mathbf{K}_{0i} = p \frac{\mathbf{K}_i}{\rho_i}. \quad (15)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \rho_i} = -p \frac{U_i}{\rho_i}, \quad (16)$$

где $U_i = 1/2 \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i$ – энергия деформации i -го элемента.

Формула (16) решает задачу об анализе чувствительности целевой функции. Заметим, что все компоненты её вектора градиента отрицательны, т. е. добавление материала в любой элемент всегда приводит к уменьшению энергии деформации конструкции [12-14].

На основании (2) градиент функционального ограничения на объём материала находится как

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_i} = V_i. \quad (17)$$

Основные расчётные формулы алгоритма топологической оптимизации. В силу знакопостоянства градиента энергии деформации её CONLIN-аппроксимация на k -й итерации $U_c^{(k)}$ содержит только члены, обратно пропорциональные плотности:

$$U_c^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) = U(\boldsymbol{\rho}^{(k)}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial U(\boldsymbol{\rho}^{(k)})}{\partial \rho_i} \cdot \rho_i^{(k)2} \left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_i^{(k)}} \right). \quad (18)$$

CONLIN-аппроксимация ограничения на объём является линейной ввиду положительности компонентов его вектора градиента (17):

$$g_c^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i - f \cdot V_0. \quad (19)$$

Градиент функции Лагранжа, составленной из величин $U_c^{(k)}(\boldsymbol{\rho})$ и $g_c^{(k)}(\boldsymbol{\rho})$, примет вид:

$$\frac{\partial L}{\partial \rho_i} = \frac{\partial U}{\partial \rho_i} \cdot \left(\frac{\rho_i^{(k)}}{\rho_i} \right)^2 + \lambda V_i. \quad (20)$$

Производная энергии деформации находится по формуле (16). Приравнивая $\partial L / \partial \rho_i$ к нулю, получим:

$$\rho_i = \rho_i^{(k)} \sqrt{-\frac{\nabla_i U}{\lambda V_i}}. \quad (21)$$

Здесь ∇_i обозначает частную производную по ρ_i . Ввиду того, что градиент энергии деформации отрицателен и $\lambda > 0, V_i > 0$, величина под корнем в (21) всегда положительна. Физический смысл данной формулы состоит в добавлении материала пропорционально корню из удельной энергии, т. е. напряжениям – в полном соответствии с известным эвристическим принципом получения рациональных в силовом отношении конструкций.

С учётом «региона доверия» CONLIN-аппроксимации $\alpha_i^{(k)} \leq \rho_i^* \leq \beta_i^{(k)}$, вектор оптимального решения на k -й итерации, в соответствии с (11), вычисляется как

$$\rho_i^*(\lambda) = \begin{cases} \alpha_i^{(k)}, & \text{если } \nabla_i L(\alpha_i^{(k)}) \geq 0, \\ \beta_i^{(k)}, & \text{если } \nabla_i L(\beta_i^{(k)}) \leq 0, \\ \rho_i^{(k)} \sqrt{-\frac{\nabla_i U}{\lambda V_i}} & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (22)$$

$i = 1, \dots, n.$

Двойственная задача сводится здесь к одномерному поиску по λ :

$$\begin{cases} \varphi^{(k)}(\lambda) = U_c^{(k)}(\boldsymbol{\rho}^*(\lambda)) + \lambda g_c^{(k)}(\boldsymbol{\rho}^*(\lambda)) \rightarrow \max, \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (23)$$

Критерием прекращения поиска является малая величина градиента функции φ . Физически это означает удовлетворение ограничению на количество материала.

Найденному таким путём значению множителя Лагранжа λ^* соответствует вектор проектных переменных на следующей, $(k + 1)$ -й итерации $\rho^{(k+1)} = \rho^*(\lambda^*)$.

Алгоритм решения задачи топологической оптимизации

Для наглядного представления вычислительного процесса топологической оптимизации построим его блок-схему (рис. 1).

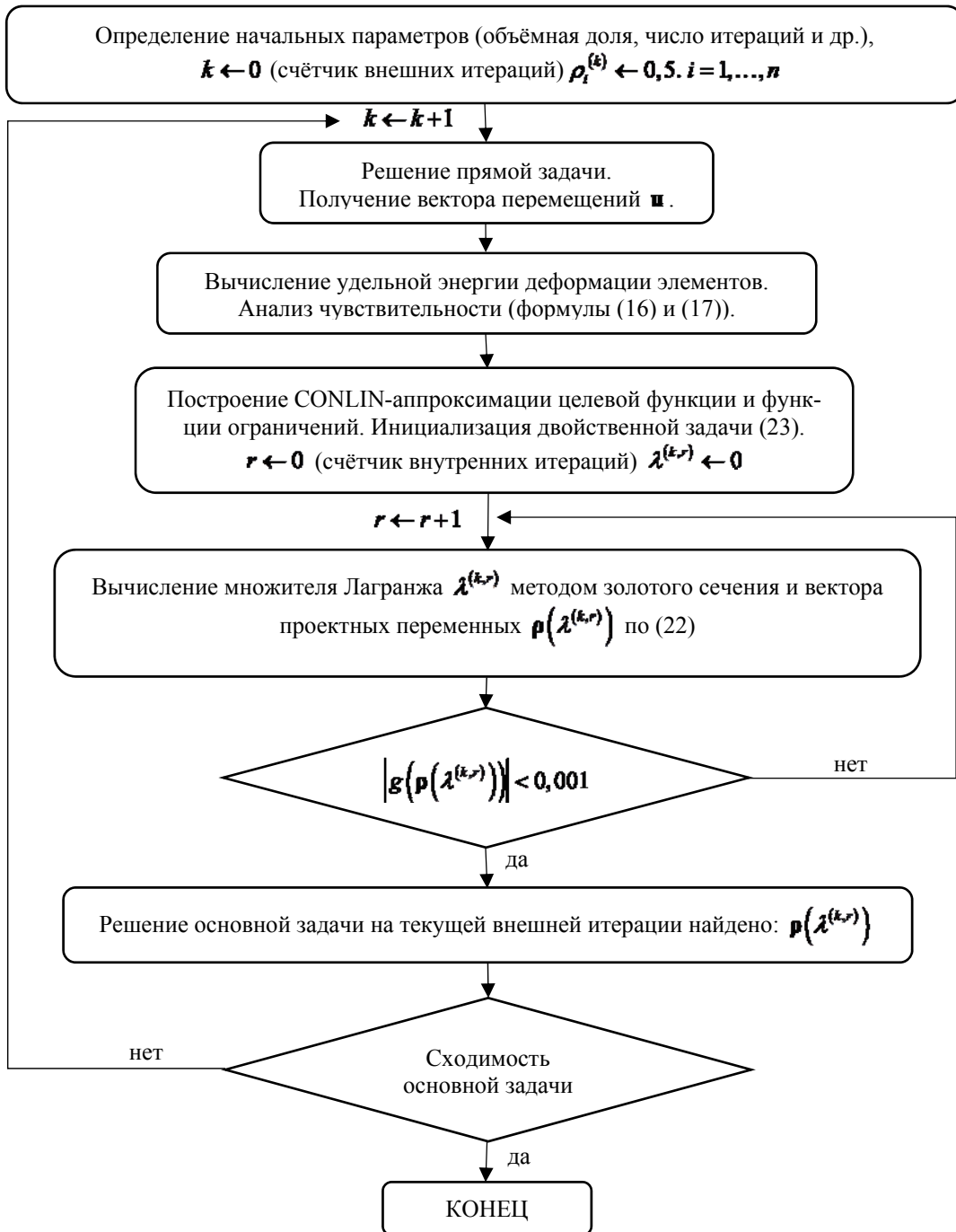


Рис. 1. Блок-схема алгоритма топологической оптимизации

Тестовые задачи

На основе изложенного математического аппарата разработано программное обеспечение – модуль для системы конечно-элементного анализа ANSYS. С использованием данного модуля решён ряд задач топологической оптимизации, соответствующих передаче нагрузки простейшими способами: растяжением, сдвигом и кручением. Для каждой задачи посчитан силовой вес: по формулам [15] и по конечно-элементной модели после топологической оптимизации согласно соотношению:

$$G = \sum_{i=1}^n \sigma_{i\text{экв}} V_i, \quad (24)$$

где $\sigma_{i\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz}) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$ – эквивалентные напряжения, V_i – объёмы элементов.

Для всех примеров использован материал с модулем упругости $E = 71000$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$.

Растяжение. Конечно-элементная модель проектной области и граничные условия представлены на рис. 2, а. Распределение материала после топологической оптимизации с ограничением на объём 25% от исходного количества приведено на рис. 2, б.

Толщина = 1 мм

Объёмная доля материала = 40%

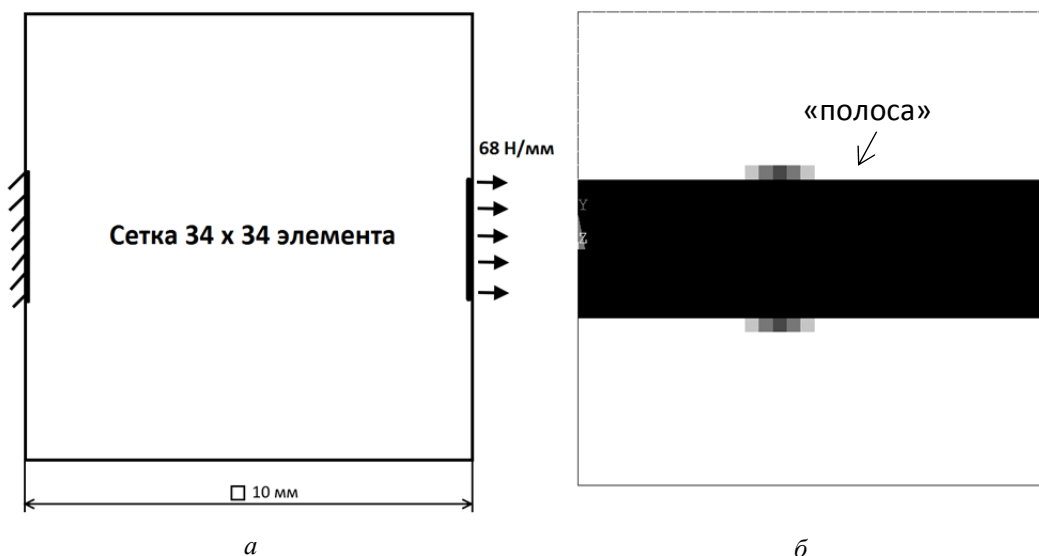


Рис. 2. Решение задачи топологической оптимизации для случая растяжения:
а – постановка задачи; б – распределение материала

Произведение приложенной силы 900 Н на длину её передачи 10 мм даёт силовой фактор 9000 Н×мм. Значение, полученное по МКЭ-модели, составляет 9033 Н×мм. Разница относительно теоретического значения составляет менее 0,5% и обусловлена небольшой неравномерностью поля напряжений внутри «стержня» в модели.

Изгиб. Проектная область представляет собой прямоугольник, закреплённый шарнирно в двух точках с одной стороны и нагруженный сосредоточенной силой на противоположной кромке (рис. 3).

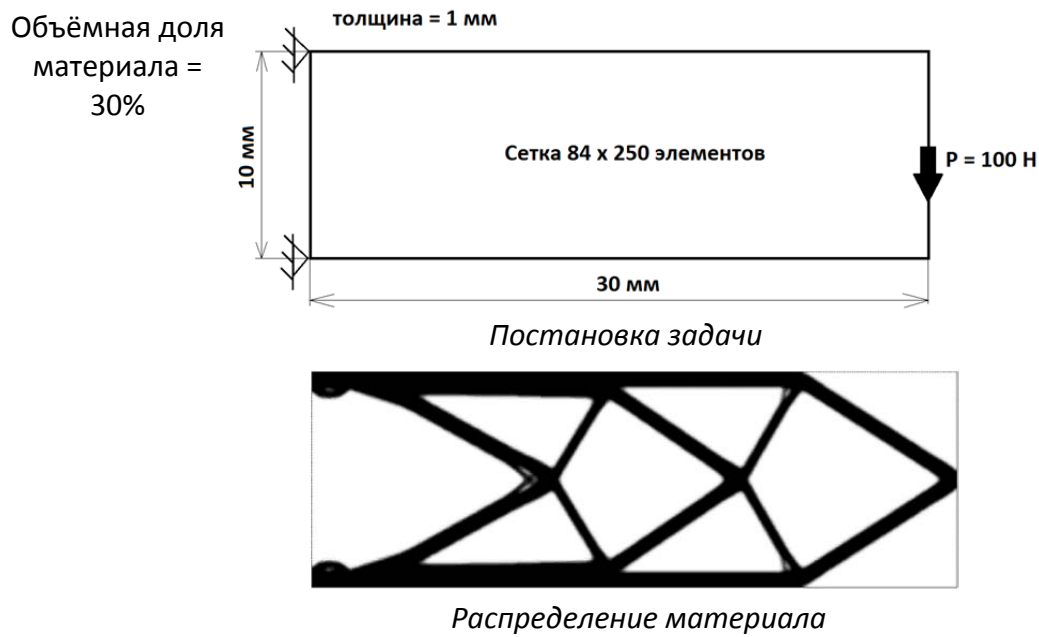


Рис. 3. Решение задачи топологической оптимизации для случая изгиба

Расчёт по конечно-элементной модели даёт величину силового фактора $G = 14471 \text{ Н} \times \text{мм}$. Коэффициент силового фактора $G/(PL)$ равен 4,82. Это значение на 6% отличается от значения 4,53, полученного в работе [16] аналитическим путём для теоретически оптимальной фермы. Последняя представляет собой «стержневой континуум», состоящий из бесконечно большого числа тонких стержней, расположенных друг относительно друга определённым образом. Очевидно, её невозможно воплотить в реальную конструкцию. В то же время приведённый на рис. 3 результат следует рассматривать как хорошее приближение к оптимуму с простой интерпретацией в виде 14-стержневой фермы.

Заметим, что теоретически оптимальная конструкция вовсе не обязана принадлежать классу ферм. Варьируя в данной задаче коэффициентом пенализации в формуле (1) или используя твёрдотельную модель с мелким разбиением по толщине, можно получить балочную конструкцию, превосходящую по жёсткости любую мыслимую ферму [17].

Кручение. Проектная область для данного примера представляет собой параллелепипед квадратного поперечного сечения (твёрдотельная модель бруса). Нагрузка приложена к кромкам одного из его торцов, кромки другого торца жёстко закреплены. Результат оптимизации приведён на рис. 4.

Аналитическое решение даёт для силового фактора величину

$$G = \frac{M_{кр}}{2\Omega} \sqrt{3} \cdot Pl = 3,2 \cdot 10^6 \text{ Н} \times \text{мм}, \quad (25)$$

где $M_{кр}$ – крутящий момент; Ω – площадь контура сечения; P – периметр контура; l – длина бруса.

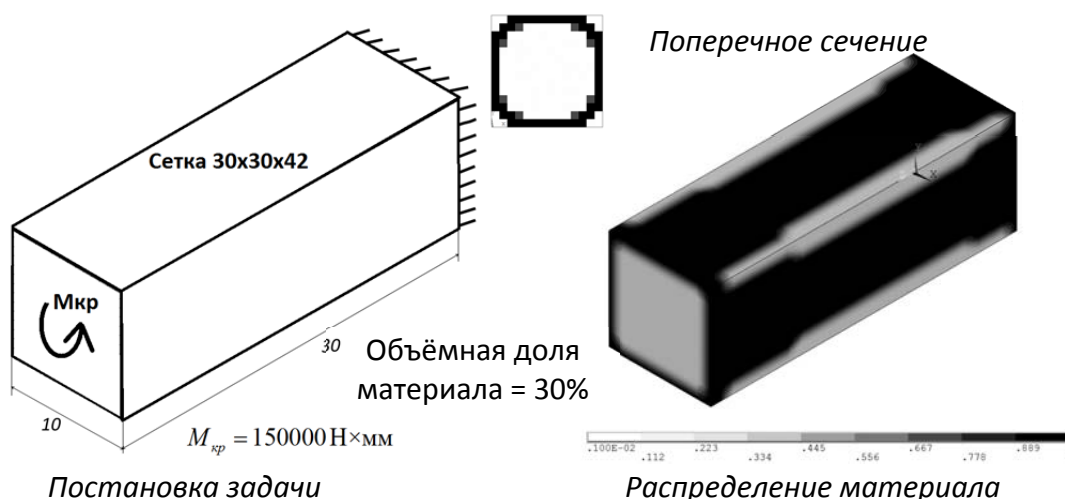


Рис. 4. Решение задачи топологической оптимизации для случая кручения

Расчёт по конечно-элементной модели после топологической оптимизации приводит к значению $G = 3,18 \cdot 10^6 \text{ Н} \times \text{мм}$. Отличие относительно результата, посчитанного по формуле (25), составляет менее 1%.

Изменение целевой функции (энергии деформации) по итерациям показано на рис. 5.

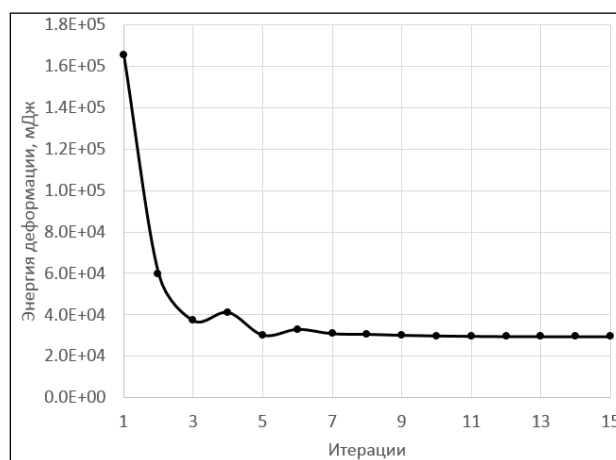


Рис. 5. Изменение целевой функции по итерациям

Видно, что процесс оптимизации стабилизируется уже после 9-й итерации. Всего в данном примере достаточно 15 расчётов, чтобы относительное изменение энергии деформации при переходе на следующий шаг цикла составило менее 0,05%. Ограничение на объём удовлетворяется с точностью 0,1%. Приведённый график является характерным и для остальных рассмотренных задач.

Анализ и интерпретация результатов топологической оптимизации

Переход от распределения плотности к реальной конструкции заслуживает отдельной публикации, поэтому здесь ограничимся лишь общими соображениями.

Пространственное распределение плотности, полученное после оптимизации, экспортируется в геометрический формат данных (например, STL или IGS). Этот файл

затем используется в качестве «опорного» объекта для построения геометрической модели конструкции в САД-системе.

Рассмотрим удовлетворение проектных ограничений. В постановке задачи топологической оптимизации (2) фигурирует только одно ограничение – на объём материала. При этом требования, например, прочности во внимание не принимаются. Однако сведения о напряжениях в конечных элементах с плотностью, близкой к единице, являются достоверными. Ввиду этого представляется целесообразным проведение параметрического исследования решения путём варьирования объёмной доли. Опыт показывает – можно подобрать такое количество материала, чтобы уровень напряжений в целом по конструкции «вышел» на приемлемые значения. В этом случае концептуальное представление детали, выраженное в виде распределения плотности, будет хорошей отправной точкой для её дальнейшей конструкторской проработки.

Более строгий подход состоит во введении ограничений на напряжения в математическую постановку задачи. Данное направление является весьма многообещающим, но требует решения ряда дополнительных вопросов (адекватная оценка уровня напряжений в элементах с промежуточной плотностью, одновременный учёт большого количества существенно нелинейных ограничений и др.), решение которых намечено на будущее.

Заключение

Градиентные методы нелинейного программирования, основанные на явных выпуклых аппроксимациях (в частности, метод выпуклой линеаризации), позволяют решать задачи топологической оптимизации с тысячами проектных переменных за приемлемое машинное время. Решение трёх тестовых задач показало полную физическую адекватность полученных силовых схем. Предложенный в работе математический аппарат может служить основой для разработки алгоритмов и программ по оптимизации конструкций на широкий спектр критериев и ограничений.

Библиографический список

1. Комаров В.А. Проектирование силовых аддитивных конструкций: теоретические основы // Онтология проектирования. 2017. Т. 7, № 2 (24). С. 191-206. DOI: 10.18287/2223-9537-2017-7-2-191-206
2. Niu M.C.Y. Airframe structural design: Practical Design Information and Data on Aircraft Structures. Hong Kong: Conmilit Press Ltd, 1988. 612 p.
3. Ендогур А.И. Проектирование авиационных конструкций. М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. 537 с.
4. Комаров А.А. Основы проектирования силовых конструкций. Куйбышев: Куйбышевское книжное издательство, 1965. 88 с.
5. Комаров В.А. Проектирование силовых схем авиационных конструкций // Сб. статей «Актуальные проблемы авиационной науки и техники». М.: Машиностроение, 1984. С. 114-129.
6. Bendsoe M.P., Sigmund O. Topology Optimization: Theory, Methods and Applications. Springer, 2003. 271 p.
7. Christensen P.W., Klarbring A. An introduction to structural optimization. Springer, 2003. 214 p.
8. Лазарев И.Б. Математические методы оптимального проектирования конструкций. Новосибирск: Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта, 1974. 192 с.

9. Bendsoe M.P. Optimal shape design as a material distribution problem // *Structural Optimization*. 1989. V. 1, Iss. 4. P. 193-202. DOI: 10.1007/bf01650949
10. Fleury C., Braibant V. Structural optimization: a new dual method using mixed variables // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1986. V. 23, Iss. 3. P. 409-428. DOI: 10.1002/nme.1620230307
11. Conn A.R., Gould N.I.M., Toint Ph.L. *Trust Region Methods*. SIAM, 2000. 959 p.
12. Комаров В.А. Повышение жёсткости конструкций топологическими средствами // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королёва*. 2003. № 1 (3). С. 24-37.
13. Комаров В.А. К доказательству теорем об изменении жёсткости конструкций // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва*. 2004. № 1 (5). С. 49-51.
14. Wasiutinski Z. On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength // *Bull. Acad. Polon. Sci.* 1960. No. 6. P. 344-365.
15. Козлов Д.М., Майнсков В.Н., Резниченко Г.А. *Проектирование детали: учебное пособие*. Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2012. 88 с.
16. Lewinski T., Zhou M., Rozvany G.I. N. Extended exact solutions for least-weight truss-layouts – Part I: Cantilever with horizontal axis of symmetry // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1994. V. 36, Iss. 5. P. 375-398. DOI: 10.1016/0020-7403(94)90043-4
17. Sigmung O., Aage N., Andreassen E. On the (non-)optimality of Michell structures // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2016. V. 54, Iss. 2. P. 361-373. DOI: 10.1007/s00158-016-1420-7

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF A LOAD-BEARING STRUCTURE VIA THE METHOD OF CONVEX LINEARIZATION

© 2018

E. A. Kishov Postgraduate Student;
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;
evgeniy.kishov@ssau.ru

V. A. Komarov Doctor of Science (Engineering), Professor;
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;
evgeniy.kishov@ssau.ru

A method of topology optimization based on the convex linearization approach is proposed. The problem formulation implies minimization of the strain energy of a structure subject to volume constraint. The solution is based on explicit, convex and separable Lagrangian approximation with the involvement of the duality theory. A non-linear model is used to relate design variables (density) and elastic properties of the material (modulus of elasticity). The sensitivity of the gain function and the constraint function is analyzed. The basic design formulae for the iteration algorithm of topology optimization are obtained. A number of test problems that correspond to the basic load states: tension, shear and torsion are considered. For all cases the load-carrying factor is calculated: both analytically and with the use of finite-element models. The resulting topologies are shown to be in full compliance with engineering concepts of theoretically optimal structures.

Topology optimization; SIMP-model; load-carrying structure; convex linearization method; non-linear programming; finite-element method.

Citation: Kishov E.A., Komarov V.A. Topology optimization of a load-bearing structure via the method of convex linearization. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2018. V. 17, no. 1. P. 137-149. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-1-137-149

References

1. Komarov V.A. Theoretical basis for design of load-bearing structures produced using additive technologies. *Ontology of designing*. 2017. V. 7, no. 2 (24). P. 191-206. DOI: 10.18287/2223-9537-2017-7-2-191-206. (In Russ.)
2. Niu M.C.Y. *Airframe structural design: Practical Design Information and Data on Aircraft Structures*. Hong Kong: Conmilit Press Ltd, 1988. 612 p.
3. Endogur A.I. *Proektirovanie aviatsionnykh konstruktsiy* [Designing aircraft structures Moscow: MAI-PRINT Publ., 2009. 537 p.
4. Komarov A.A. *Osnovy proektirovaniya silovykh konstruktsiy* [Basics of structural design]. Kuybyshev: Kuybyshevskoe Knizhnoe Izdatel'stvo Publ., 1965. 88 p.
5. Komarov V.A. Proektirovanie silovykh skhem aviatsionnykh konstruktsiy. *Sb. statey «Aktual'nye problem aviatsionnoy nauki i tekhniki»*. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1984. P. 114-129. (In Russ.)
6. Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer, 2003. 271 p.
7. Christensen P.W., Klarbring A. *An introduction to structural optimization*. Springer, 2003. 214 p.
8. Lazarev I.B. *Matematicheskie metody optimal'nogo proektirovaniya konstruktsiy* [Mathematical methods of optimal structural design]. Novosibirsk: Siberian Transport University Publ., 1974. 192 p.
9. Bendsoe M.P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*. 1989. V. 1, Iss. 4. P. 193-202. DOI: 10.1007/bf01650949
10. Fleury C., Braibant V. Structural optimization: a new dual method using mixed variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1986. V. 23, Iss. 3. P. 409-428. DOI: 10.1002/nme.1620230307
11. Conn A.R., Gould N.I.M., Toint Ph.L. *Trust Region Methods*. SIAM, 2000. 959 p.
12. Komarov V.A. Structure stiffening by topological changes. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2003. No. 1 (3). P. 24-37. (In Russ.)
13. Komarov V.A. Proving Theorems of Changing Structure Rigidity. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2004. No. 1 (5). P. 49-51. (In Russ.)
14. Wasiutinski Z. On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength. *Bull. Acad. Polon. Sci.* 1960. No. 6. P. 344-365.
15. Kozlov D.M., Maynskov V.N., Reznichenko G.A. *Proektirovanie detali: uchebnoe posobie* [Part design: textbook]. Samara: Samara State Aerospace University Publ., 2012. 88 p.
16. Lewinski T., Zhou M., Rozvany G.I. N. Extended exact solutions for least-weight truss-layouts – Part I: Cantilever with horizontal axis of symmetry. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1994. V. 36, Iss. 5. P. 375-398. DOI: 10.1016/0020-7403(94)90043-4
17. Sigmund O., Aage N., Andreassen E. On the (non-)optimality of Michell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2016. V. 54, Iss. 2. P. 361-373. DOI: 10.1007/s00158-016-1420-7