УДК 532.526

ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ С РАЗНЫМИ ШАГАМИ В МЕТОДЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ ЗАВИХРЁННОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО СЛЕДА ЗА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНОЙ

© 2008 В.В. Никонов, В.Г. Шахов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматривается применение метода расщепления завихрённости к моделированию аэродинамического следа за продольно обтекаемой плоской пластиной. Применяется схема интегрирования с разными шагами по времени с учетом разности скоростей протекания процессов диффузии и конвекции. Показано, что схема метода позволяет получать результаты с хорошей точностью в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса.

Обтекание, прямое численное моделирование, метод расщепления завихрённости, аэродинамический след, плоская пластина, диффузия, конвекция, интегрирование с разными шагами по времени, число Рейнольдса

1. Математическая формулировка метода расщепления завихрённости

Метод расщепления завихрённости (МРЗ) был получен из метода «вихрь в ячейке» путём расщепления завихрённости на её составляющие [1]. В МРЗ вместо циркуляции вихрей в ячейках используются величины

$$\Delta_{uy}(x_i, y_j) = \int\limits_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} \int\limits_{y_j-h/2}^{y_j+h/2} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

$$\Delta_{vx}(x_i, y_j) = \int\limits_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} \int\limits_{y_j-h/2}^{y_j+h/2} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

где h – размер ячейки однородной сетки.

Скорость течения рассчитывается интегрированием вдоль координатных линий, и при этом двумерная задача сводится к нескольким одномерным:

$$u(i, j+0,5) = u(i, j-0,5) + \frac{\Delta_{uy}(i,j)}{h_x},$$

$$v(i+0,5, j) = v(i-0,5, j)_E + \frac{\Delta_{vx}(i,j)}{h_y}.$$

Скорость в центрах ячеек сетки рассчитывается следующим образом:

$$u(i,j) = u(i, j-0,5) + 0,5\Delta_{uy}\frac{(i,j)}{h_x},$$

$$v(i,j) = v(i-0,5, j) + 0,5\Delta_{vx}\frac{(i,j)}{h_y}.$$

В схеме метода МРЗ частицы движутся с потоком и переносят величины Δ_{vx} и Δ_{uy}. После расчёта поля скоростей течения новые координаты частиц получаются аналогично методу «вихрь в ячейке» численным интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера. Новое местоположение частиц не обязательно совпадёт с координатами расчётной сетки, и поэтому процедура перераспределения используется отдельно для величин Δ_{vx} и Δ_{uy}:

$$\Delta_{uy}(x_i, y_j) = \Delta_{uy}(x_k, y_l)\Lambda(x_i - x_k)\Lambda(y_j - y_l),$$

$$\Delta_{vx}(x_i, y_j) = \Delta_{vx}(x_k, y_l)\Lambda(x_i - x_k)\Lambda(y_j - y_l). \quad (1)$$

В качестве интерполяционной функции Λ использовалась формула «облако в ячейке» [2].

Диффузия в свободном потоке для схемы МРЗ рассчитывается с использованием метода донор-акцептор (Д-А) аналогично [3], но отдельно для Δ_{uy} и Δ_{vx}:

$$\Delta_{uy}(t+{}_\Delta t, x_i, y_j) = \Delta_{uy}(t, x_i, y_j) + $$
$$+ \sum_{j-n_d \le q \le j+n_d} \Big(\Delta_{uy}(t, x_i, y_q)\, G^*_{jq}(y) -$$
$$-\Delta_{uy}(t, x_i, y_j)\, G^*_{qj}(y)\Big),$$

$$\Delta_{vx}(t+{}_\Delta t, x_i, y_j) = \Delta_{vx}(t, x_i, y_j) + $$
$$+ \sum_{i-n_d \le q \le i+n_d} \Big(\Delta_{vx}(t, x_q, y_j)\, G^*_{iq}(x) -$$
$$-\Delta_{vx}(t, x_q, y_j)\, G^*_{qi}(x)\Big),$$

где n_d - радиус «диффузионной молекулы», а коэффициенты G^*_{jq} определяются по формуле

$$G_{pq}^*(z) = \frac{1}{2}\left[erf\left(\frac{z_p + h/2 - z_q}{\sqrt{4\nu_\Delta t}} \right) - \right.$$

$$\left. - erf\left(\frac{z_p - h/2 - z_q}{\sqrt{4\nu_\Delta t}} \right) \right].$$

Здесь $z - x_p$– или y_p–координаты центра ячейки p-го вихря, erf – интеграл вероятности (функция ошибок).

В схеме МРЗ с поверхности тела диффундируют величины Δ_{uy} и Δ_{vx}. Для удобства сначала определим Δ_{un} и Δ_{vs} в системе координат, связанной с панелью:

$$\Delta_{un}(s_i, n_j) = u(s_i, +0) h_s \times$$

$$\times \left[erf\left(\frac{n_j + h/2}{\sqrt{4\nu_\Delta t}} \right) - erf\left(\frac{n_j - h/2}{\sqrt{4\nu_\Delta t}} \right) \right],$$

$$\Delta_{vs}(s_i, n_j) = 0,$$

где h_s – размер ячейки локальной сетки в направлении координаты s, (s_i, n_j) – координаты центра рассматриваемой ячейки в локальной системе координат (СК). Величины Δ_{uy} и Δ_{vx} в глобальной СК запишутся как

$$\Delta_{uy}(x_i, y_j) = \Delta_{un}(s_i, n_j)\; y_n,$$

$$\Delta_{vx}(x_i, y_j) = \Delta_{un}(s_i, n_j)\; x_n. \tag{2}$$

Здесь (x_i, y_j) - координаты центра рассматриваемой ячейки в глобальной СК, $\{x_n, y_n\}$ - единичный вектор, нормальный к рассматриваемой панели, записанный в этой же системе. Величина скорости жидкости у поверхности тела определяется следующим образом:

$$u(s_i, +0) = \lim_{n \to +0} u(s_i, n),$$

В общем случае координаты (x_i, y_j) в (2) не обязательно совпадают с ячейками глобальной сетки. Поэтому для значений Δ_{uy} и Δ_{vx} применяется процедура перераспределения (1).

Для учёта уравнения неразрывности в схему метода необходимо включить корректировку поля скорости. Тогда для расположенных над пластиной ячеек вертикальная компонента скорости определится как

$$v_{i,j} = v_{i,j-1} - 0.5 h_y \left(\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_{i,j} + \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_{i,j-1} \right). \tag{3}$$

Для аппроксимации пространственных производных в правой части (3) использовалась центральная конечно-разностная схема.

В схеме метода процессы конвекции и диффузии рассматриваются отдельно на каждом шаге по времени. В работе [4] было показано, что для достижения заданной точности шаг по времени для метода Д-А определяется следующим соотношением:

$$_\Delta t = k_d\, h^2 / \nu,$$

где k_d - константа, зависящая только от радиуса n_d «диффузионной молекулы», и для $n_d = 1$ эта константа находится в диапазоне $0.2 \le k_d \le 0.21$. Принято, что $k_d = 0.21$, так как в данном случае [5] ошибки методов Д-А и моделирования процесса конвекции будут иметь разные знаки и поэтому будут компенсировать друг друга. Шаг по времени для процесса конвекции определялся с помощью неравенства

$$_\Delta t_c \le k_c \frac{h}{u_\infty},$$

соответствующего критерию Курант-Фридрих-Леви [6] с величиной коэффициента $k_c = 1.5$. При этом он не обязательно совпадёт с оптимальным шагом для расчёта процесса диффузии. Поэтому предлагается применять метод интегрирования с раздельными шагами по времени для процессов диффузии и конвекции.

2. Прямое численное моделирование аэродинамического следа за плоской пластиной

Рассматривается случай продольного обтекания плоской пластины конечной длины вязкой несжимаемой жидкостью. В результате прямого численного моделирования получены профили скорости в аэродинамическом следе за пластиной в диапазоне чисел Рейнольдса от 10 до 10^6, которые сравниваются с аналитическим решением Голдстейна [7] для сечений, расположенных на расстояниях: $x_1 = 0$; 0.0135; 0.108; 0.256 от задней кромки пластины. Полученные результаты представлены на рис. 1, 2.

Вертикальная безразмерная координата η_1 определяется следующим образом:

$$\eta_1 = y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu l_1}},$$

где l_1 – длина пластины, равная 1.0, так как она принималась за характерный размер.

Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что метод МРЗ применим не только для моделирования ламинарного пограничного слоя на плоской пластине [1], но и для моделирования аэродинамического следа за пластиной.

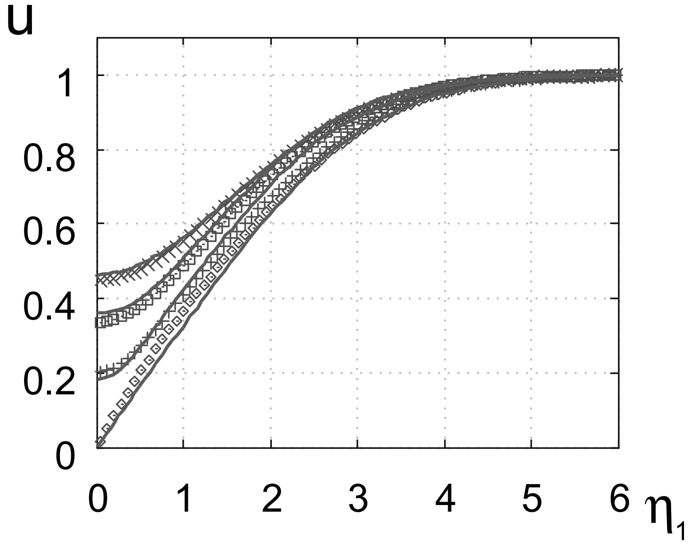

Рис. 1 Распределение продольной компоненты скорости u в следе за плоской пластиной в сравнении с аналитическим решением (Re = 10, h = 0.025).

Численное решение: ◇ - $x_1 \approx 0.0$, + - $x_1 \approx 0.0135$, □ - $x_1 \approx 0.108$, ✕ - $x_1 \approx 0.256$;

—— - Голдстейн [7]

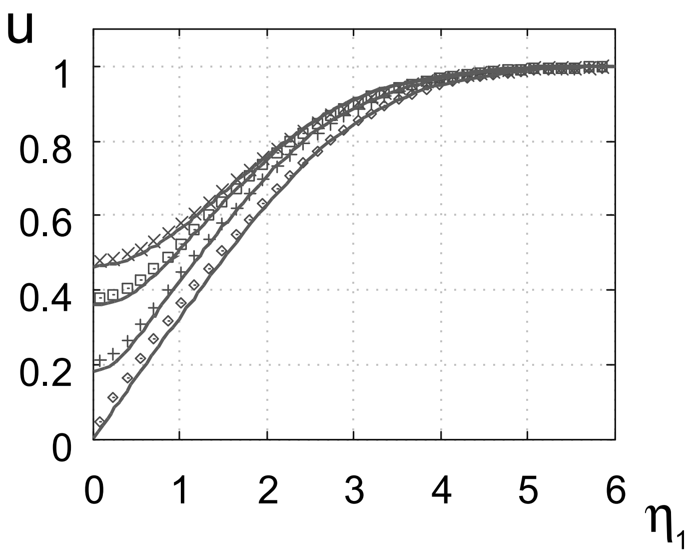

Рис. 2. Распределение продольной компоненты скорости u в следе за плоской пластиной в сравнении с аналитическим решением (Re = 10^6, h = $1.563\cdot10^{-4}$).

Численное решение: ◇ - $x_1 \approx 0.0$, + - $x_1 \approx 0.0135$, □ - $x_1 \approx 0.108$, ✕ - $x_1 \approx 0.256$;

—— - Голдстейн [7]

Библиографический список

1. **Никонов, В.В.** Схема расчета скорости для метода «вихрь в ячейке» применительно к моделированию двумерного ламинарного пограничного слоя [Текст] / В.В. Никонов, В.Г. Шахов // Известия СНЦ РАН, Самара. – 2005. – Т. 7, № 2. – С. 392-398.

2. **Григорьев, Ю.Н.** Численные методы «частицы-в-ячейках» [Текст] / Ю.Н. Григорьев, В.А. Вшивков. – Новосибирск: Наука. – Сибирская издательская фирма РАН, 2000. - 184 с.

3. **Taranov, A.** Development of the Computational Vortex Method for Calculation of Two-Dimensional Ship Sections with Flow Separation [Текст] / A. Taranov, N. Kornev, A.Leder // Schiffbauforschung. – 2000. – Vol. 39, N 2. – P. 95-105.

4. **Nikonov, V.** The Ratio between Spatial and Time Resolutions for the Diffusion Substep in 2D Computational Vortex Methods [Текст] / V. Nikonov, N. Kornev, A. Leder // Schiffbauforschung. – 2002. – Vol. 41, N 3/4. – P. 5-12.

5. **Никонов, В.В.** Модификация схемы «донор-акцептор» для расчета диффузии завихренности и ее применение в методе «вихрь в ячейке» [Текст] / В.В. Никонов, В.Г. Шахов // Вестник СГАУ, Самара. – 2003. – № 1 (3). – С. 38-46.

6. **Ferziger, J.** Computational methods for fluid dynamics [Текст] / J. Ferziger, M. Peric, 3 rev. ed. – Springer-Verlag, 2002. – 423 p.

7. **Шлихтинг, Г.** Теория пограничного слоя [Текст] / Г. Шлихтинг; пер. с нем. Г.А. Вольперта; под. общ. ред. Л.Г. Лойцянского. – М.: Наука, 1974. - 712 с.

References

1. **Nikonov, V.V.** Calculation velocity scheme for “Vortex-in-Cell” method applying to simulation of two-dimensional laminar boundary layer / V.V. Nikonov, V.G. Shakhov // Samara: Proceedings of Samara Scientific Center of Russian Academy of Sciences. – 2005. – Vol. 7, N 2. – P. 392-398. – [in Russian].

2. **Grigoryev, Yu.N.** Numerical methods “Particles-in-cells” / Yu.N. Grigoryev, V.A. Vshivkov. – Novosibirsk: “Nauka” (Science). – Siberian publishing firm of RAS. – 2000. – 184 p. – [in Russian].

3. **Taranov, A.** Development of the Computational Vortex Method for Calculation of Two-Dimensional Ship Sections with Flow Separation / A. Taranov, N. Kornev, A. Leder // Schiffbauforschung. – 2000. – Vol. 39, N 2. – P.95-105.

4. **Nikonov, V.** The Ratio between Spatial and Time Resolutions for the Diffusion Substep in 2D Computational Vortex Methods / V. Nikonov, N. Kornev, A. Leder // Schiffbauforschung. – 2002, vol. 41, N 3/4. - pp. 5-12.

5. **Nikonov, V.V.** “Donor-Acceptor” scheme modification for vorticity diffusion calculation and it application in “Vortex-in-Cell” method / V.V. Nikonov, V.G. Shakhov // Vestnik (Bulletin) SSAU. – Samara, 2003. – N 1 (3). – P. 38-46. – [in Russian].

6. **Ferziger, J.** Computational methods for fluid dynamics / J. Ferziger, M. Peric. – 3 rev. ed., Springer-Verlag. - 2002. - 423 p.

7. **Schlichting, H.** Grenzschicht-Theorie / H. Schlichting - Springer, Berlin, 1997. – 851 p.

MULTI-TIME-STEP SCHEME IN THE VORTICITY SPLITTING METHOD APPLIED TO THE SIMULATION OF THE WAKE BEHIND THE FLAT PLATE

© 2008 V.V. Nikonov, V.G. Shakhov

Samara State Aerospace University

The Vorticity Splitting Method is applied to the simulation of the wake behind the longitudinal streamlined flat plate. Moreover the Multi-Time-Step Scheme is used in the numerical algorithm because the differences in the rates of convection and diffusion processes. The method is allowed results obtaining with fine accuracy in the wide range of Reynolds numbers.

Streamline, direct numerical simulation, vorticity splitting method, wake, flat plate, diffusion, convection, multi-time-step integration, Reynolds number

Сведения об авторах

Никонов Валерий Владимирович, инженер НТП «Авиатехнокон» СГАУ, кандидат технических наук. E-mail: v_nikonov@mail.ru. Область научных интересов: вихревые методы, прямое численное моделирование несжимаемых и сжимаемых течений, пограничный слой.

Шахов Валентин Гаврилович, заведующий кафедрой аэрогидродинамики СГАУ, профессор, кандидат технических наук. E-mail: shakhov@ssau.ru. Область научных интересов: теория пограничного слоя, турбулентность, численные методы, аэродинамика летательных аппаратов.

Nikonov Valery Vladimirovich, engineer NTP "Aviatechnokon" SSAU, PhD of technical sciences. E-mail: v_nikonov@mail.ru. Scientific interests: vortex methods, direct numerical simulation of incompressible and compressible flows, boundary layer.

Shakhov Valentin Gavrilovich, Head of Aerohydrodynamic department SSAU, professor, PhD of technical sciences. E-mail: shakhov@ssau.ru. Scientific interests: boundary layer theory, turbulence, numerical methods, flying vehicles aerodynamics.