

УДК 535.42

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВИХРЕВЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ В ГРАДИЕНТНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ

© 2008 А.С. Стрилец

Самарский государственный аэрокосмический университет

В работе рассматривается распространение вихревых лазерных пучков $\exp\{i\mu\phi\}$ в параболическом оптическом волокне. Зависимость комплексной амплитуды от поперечных координат и расстояния вдоль оптической оси описывается результатом действия интегрального оператора распространения в параболической среде на распределение амплитуды входного пучка. Этот оператор является аналогом интеграла Френеля, описывающего распространение параксиальных лазерных пучков в однородной среде. Результат действия интегрального оператора на вихревой пучок аналитически можно представить двумя способами. В первом случае ядром аналитического выражения для амплитуды является вырожденная гипергеометрическая функция. Вторым способом представления является композиция бесконечного числа мод Гаусса – Лагерра, которые являются собственными модами параболического волокна. Полученные аналитические выражения проверяются с помощью численного моделирования с использованием интегрального оператора и метода распространения световых пучков через тонкие линзы (реализован с использованием быстрого преобразования Фурье). Результаты численного моделирования согласуются с результатами вычислений аналитических выражений с точностью до погрешности метода.

Вихревые лазерные пучки, моды Гаусса-Лагерра, параболическое оптическое волокно, метод распространения световых пучков, параксиальный интегральный оператор распространения

Световые пучки с вихревой фазовой особенностью являются предметом пристального внимания уже более десяти лет [1]. Такие пучки часто используются в оптических твизерах для передачи орбитального углового момента захваченным микрообъектам [2]. Наиболее простым типом рассматриваемых пучков являются чистые оптические вихри. Формирование и распространение их в свободном пространстве достаточно хорошо исследовано [3].

Предмет исследования

В работе рассматривается распространение вихревого пучка Гаусса с произвольным начальным эффективным радиусом σ в параболическом волокне.

Комплексная амплитуда вихревого пучка описывается выражением

$$E_0(r, \phi) = C_{0,0} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} \exp\{i\mu\phi\}, \quad (1)$$

где $C_{0,0} = 1/(\sigma\sqrt{\pi})$ - нормировочный коэффициент, μ - произвольная вещественная константа.

Для показателя преломления градиентного параболического волокна справедливо соотношение

$$n^2(r) = n_0^2 \left(1 - 2\Delta \frac{r^2}{r_0^2}\right) = n_0^2 (1 - \alpha^2 r^2), \quad (2)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - радиус цилиндрической системы координат; n_0 - показатель преломления на оптической оси волокна; r_0 - характерный радиус волокна; Δ - параметр дисперсии показателя преломления среды; $\alpha = \sqrt{2\Delta}/r_0$ - константа, определяющая кривизну профиля показателя преломления.

Целью работы является определение распределения комплексной амплитуды вихревого пучка на произвольном расстоянии вдоль оптической оси с использованием различных способов аналитического представления и методов численного моделирования.

Параксиальный интегральный оператор распространения в параболической среде

Комплексная амплитуда произвольного светового пучка в приближении Френеля для параболической среды при условии $\alpha r \ll 1$ определяется интегралом [4]:

$$E(\rho, \theta, z) = -\frac{ik\alpha}{2\pi \sin(\alpha z)} \times \exp\{ikz\} \exp\left\{\frac{ik\alpha}{2 \tan(\alpha z)} \rho^2\right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(r, \varphi) \exp\left\{\frac{ik\alpha}{2 \tan(\alpha z)} r^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{ik\alpha}{\sin(\alpha z)} \rho r \cos(\varphi - \theta)\right\} r dr d\varphi, \quad (3)$$

где $k = (2\pi/\lambda_0) n_0$ - волновое число в одно-родной среде с показателем преломления n_0 .

Распределение

$F(\rho, \theta, z) = E(\rho, \theta, z) \exp\{-ikz\}$ имеет период $z_T = 2\pi/\alpha$. При этом на полупериоде формируется перевернутое распределение $-E_0(\rho, \pi + \theta)$, а на четверти и трех четвертях - Фурье образы.

Действуя интегральным оператором (3) на вихревой пучок (1) для целых значений μ , можно получить аналитическое выражение, ядром которого является функция Куммера

$$F(\rho, \theta, z) = C_{0,0} 2^{-\frac{|\mu|}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{|\mu|}{2} + 1\right)}{\Gamma(|\mu| + 1)} \frac{\sigma}{\sigma(z)} \times \left(1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha z)} \frac{\sigma^4}{\sigma_0^4}\right)^{\frac{|\mu|}{4}} \left(\frac{\rho}{\sigma(z)}\right)^{|\mu|} \times \exp\left\{i\left(\frac{|\mu|}{2} + 1\right) \arctan\left(\frac{1}{\tan(\alpha z)} \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)\right\} \times \exp\left\{-i(|\mu| + 1) \frac{\pi}{2}\right\} \exp\{i\mu\theta\} \times \exp\left\{\frac{i}{2 \tan(\alpha z)} \frac{\rho^2}{\sigma_0^2}\right\} {}_1F_1\left\{\frac{|\mu|}{2} + 1; |\mu| + 1; -\frac{\rho^2}{2\sigma^2(z)} \left(1 + \frac{i}{\tan(\alpha z)} \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)\right\}, \quad (4)$$

где $\sigma(z) = \sigma \sqrt{\cos^2(\alpha z) + \frac{\sigma_0^4}{\sigma^4} \sin^2(\alpha z)}$ - эффективный радиус пучка; $\sigma_0^2 = 1/k\alpha$ - квадрат

эффективного радиуса фундаментальной моды волокна.

Композиция мод Гаусса-Лагерра

Известно [5, 6], что решением уравнения Гельмгольца (3), конечным на оптической оси, в цилиндрических координатах является суперпозиция мод Гаусса-Лагерра (ГЛ)

$$\Psi_{n,m}(r, \varphi, z) = C_{n,m} \left(\frac{r}{\sigma_0}\right)^{|m|} \times L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{\sigma_0^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_0^2}\right) \times \exp(im\varphi) \exp(\pm i\beta_{n,m}z), \quad (5)$$

где r, φ, z - цилиндрические координаты; n - неотрицательное целое число, m - целое число; $L_n^m(\xi) = \frac{1}{n!} e^{\xi} \xi^{-m} \frac{d^n}{d\xi^n} \{e^{-\xi} \xi^{n+m}\}$ - многочлены Лагерра.

В выражение (5) входят следующие параметры:

- 1) $\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{k\alpha}}$ - эффективный радиус фундаментальной моды;
- 2) $\beta_{n,m} = k \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{k} (2n + |m| + 1)}$ - постоянная распространения;
- 3) $C_{n,m} = \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{n!}{\pi(n + |m|)!}}$ - нормировочная константа.

Результатом действия интегрального оператора (3) на моды ГЛ (5) с произвольным начальным эффективным радиусом σ является выражение [4]:

$$\Psi_{n,m}(r, \varphi, z) = C_{n,m} \frac{\sigma}{\sigma(z)} \left(\frac{r}{\sigma(z)}\right)^{|m|} \times L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{\sigma^2(z)}\right) \times \exp\{i\beta_{n,m}(r, z) - \frac{r^2}{2\sigma^2(z)} + im\varphi\}, \quad (6)$$

где $\sigma(z)$ - эффективный радиус пучка - такой же, как в выражении (4);

Таблица 1. Распределения интенсивности вихревого пучка для значений $\mu = 2, \sigma = \sigma_0$.

0	$\frac{1}{8}z_T$	$\frac{1}{4}z_T$	$\frac{3}{8}z_T$	$\frac{1}{2}z_T$

$$\beta_{n,m}(r, z) = kz + (2n + |m| + 1) \times$$

$$\times \left[\arctan \left\{ \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \frac{1}{\tan(\alpha z)} \right\} - \frac{\pi}{2} \right] +$$

$$+ \left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2(z)} \right) \frac{1}{\tan(\alpha z)} \frac{r^2}{2\sigma_0^2} -$$

– функция, определяющая фазу $\Psi_{n,m}(r, \varphi, z)$.

Благодаря тому, что система функций ГЛ образует полный ортонормированный базис, любое распределение комплексной амплитуды с конечной энергией может быть представлено в виде композиции мод ГЛ: $E(r, \varphi, z) = \sum_{n,m} A_{n,m} \Psi_{n,m}(r, \varphi, z)$ [5].

Коэффициенты композиции вихревого пучка определяются следующим образом:

$$A_{n,m} = \frac{\binom{|m|}{2}_n \Gamma\left(\frac{|m|}{2} + 1\right)}{\sqrt{(n + |m|)! n!}} \times$$

$$\times \frac{\exp\{2\pi i(\mu - m)\} - 1}{2\pi i(\mu - m)},$$

где $(x)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1), & n \neq 0 \end{cases}$

– факториальное произведение; $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Численное моделирование с использованием алгоритма FFT

Для среды с малыми поперечными неоднородностями показателя преломления ($n(x, y) = n_0 + \delta n(x, y)$, $\delta n(x, y) \ll n_0$) справедлива аппроксимация [7]:

$$E(x, y, z) \approx \exp\left\{i \frac{z}{2} [\nabla_{\perp}^2 + k^2]^{1/2}\right\} \times$$

$$\times \exp\{iz\chi(x, y)\} \exp\left\{i \frac{z}{2} [\nabla_{\perp}^2 + k^2]^{1/2}\right\} \times, \quad (8)$$

$$\times E_0(x, y) + O(z^3),$$

где $\chi(x, y) = k \frac{\delta n(x, y)}{n_0}$.

Результатом операции

$$\exp\left\{i \frac{z}{2} [\nabla_{\perp}^2 + k^2]^{1/2}\right\} E_0(x, y)$$

является распределение комплексной амплитуды, формируемое при распространении волны в однородной среде с показателем преломления n_0 на расстоянии $z/2$ от начального распределения. Умножение распределения комплексной амплитуды на выражение $\exp\{iz\chi(x, y)\}$ эквивалентно действию тонкого оптического элемента на проходящую через него световую волну.

Многочисленное использование аппроксимации (8) с точностью до погрешности $O(z^3)$ эквивалентно моделированию распространения светового пучка через периодическую систему одинаковых тонких оптических элементов с функцией пропускания $\exp\{iz\chi(x, y)\}$ в однородной среде с показателем преломления n_0 . Первый элемент расположен на расстоянии $z/2$ от начала отсчета, два соседних элемента располагаются на расстоянии z друг от друга.

Для параболической среды (2) оптическими элементами являются тонкие собирающие линзы.

Аппроксимация (8) позволяет произвести численное моделирование распространения светового пучка в неоднородной среде на значительные расстояния. Для этого необходимо выбрать достаточно малый шаг δz по оптической оси, учитывая то, что погрешность на расстоянии z порядка $zO(\delta z^2)$. Использование алгоритма FFT позволяет получить наиболее высокую ско-

рость расчета, однако этот алгоритм вносит дополнительную погрешность из-за необходимости ограничения пространственной и спектральной областей [7-10].

Сравнение полученных результатов

Ниже приводятся сравнительные графики зависимости интенсивности вихревого пучка от радиуса на расстоянии $(1/4)z_T$.

Таблица 2. Распределения интенсивности разложения вихревого пучка для значений $\mu = 1,5$, $\sigma = (1/2)\sigma_0$ для конечного числа мод $n_{\max} = 50$.

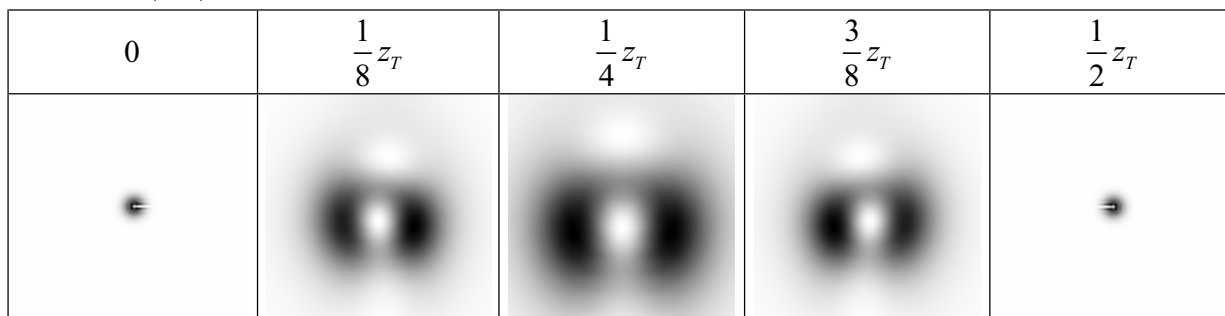


Таблица 3. Распределения интенсивности результатов численного моделирования распространения вихревого пучка для значений $\mu = 1$, $\sigma = (1/2)\sigma_0$.

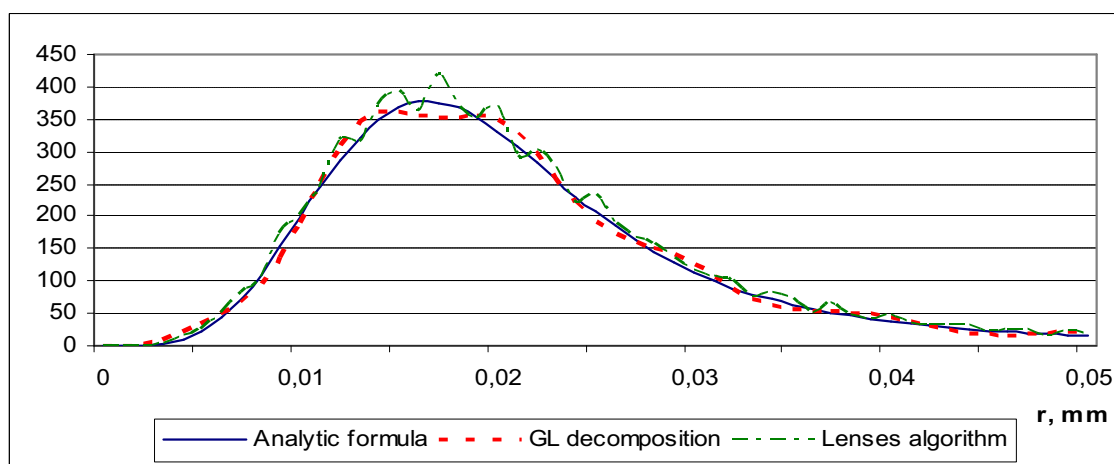
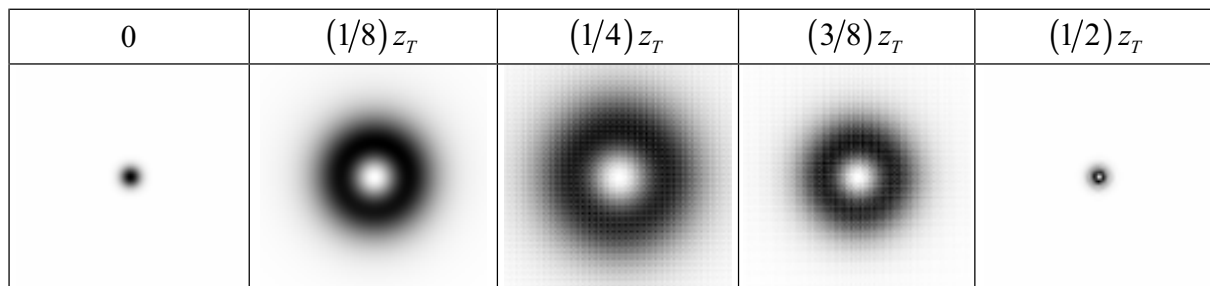


Рис. 1. Зависимость интенсивности от радиуса вихревого пучка для значений $\mu = 2$, $\sigma = \sigma_0$.

Заключение

В работе получено аналитическое выражение, описывающее зависимость ком-

плексной амплитуды вихревого пучка, распространяющегося в параболическом волокне от расстояния вдоль оптической оси в

приближении Френеля. Получено аналитическое разложение вихревого пучка в виде композиции мод Гаусса – Лагерра. Проведено численное моделирование распространения вихревого пучка в параболическом волноводе с использованием метода тонких линз. Сравнение полученных аналитических и численных результатов показывает их справедливость с точностью до погрешностей численного моделирования.

This work was partially supported by the Russian-American program “Basic Research and Higher Education” (CRDF Project RUX0-014-SA-06) and by the Russian Foundation for Basic Research grants 07-07-97600 and 08-07-99007.

Библиографический список

1. M. S. Soskin and M. V. Vasnetsov, *Progress in Optics*. – 2001. – 42. – P.219.
2. Soifer V.A., Kotlyar V.V., Khonina S. N., *Physics of Particles and Nuclei* 35(6), 733 (2004)
3. Kotlyar V.V., et al, *J. Opt. Soc. Am. A* 22(5), 849 (2005)
4. **Стрилец, А.С.** Согласование и исследование методов, основанных на дифференциальном и интегральном операторах распространения лазерного излучения в сре-

References

1. M. S. Soskin and M. V. Vasnetsov, *Progress in Optics*. – 2001. – 42. – P.219.
2. Soifer V.A., Kotlyar V.V., Khonina S. N., *Physics of Particles and Nuclei* 35(6), 733 (2004)
3. Kotlyar V.V., et al, *J. Opt. Soc. Am. A* 22(5), 849 (2005)
4. **Strilec, A.S.** The coordination and research of the methods based on differential and integrated operators of distribution of laser radiation in the environment with small inhomogeneity / A.S. Strilec, S.N. Khonina // *Computer Optics*. – 2008. – V.32, N1. – P.33-38.
5. **Snayder, A.** The theory of optical wave guides / A. Snayder, D. Love – Moscow, “Radio I Svyaz” (Radio and communication), 1987.

де с малыми неоднородностями [текст] / А.С. Стрилец, С.Н. Хонина, // *Компьютерная оптика*. – 2008. – Т.32, №1. – P.33-38.

5. **Снайдер, А.** Теория оптических волноводов [текст] / А. Снайдер, Д. Лав – М.: Радио и связь, 1987.

6. Методы компьютерной оптики [текст] / Под ред. В.А.Сойфера. – М.: Физматлит, 2003. – 688с.

7. **Feit, M.D.** Light Propagation in Graded-Index Optical Fibers [текст] / M.D. Feit, J.A. Fleck // *Appl. Opt.* – 1978. – Vol. 17 (24). – PP. 3990-3998.

8. **Okoshi, T.** The Beam Propagation Method [текст] / T. Okoshi, S. Kitazawa // *Analysis methods for electromagnetic wave problems*. Editor E. Yamashita, Artech House, 1990. Chapter 10.

9. **Huand, W.** The Finite-Difference Vector Beam Propagation Method: Analysis and Assesment [текст] / W. Huand [and other] // *J. of Lightwave Technology*. – 1992. – Vol. 10 (3).

10. **Lu, Y.Y.** Some Techniques for Computing Wave Propagation in Optical Waveguides [текст] / Y.Y. Lu // *Communications in Computational Physics*. – 2006. – Vol. 1. – P. 1056-1075.

6. *Methods of Computer Optics* / Edited by V.A. Soifer. – Moscow, Fizmatlit, 2003. – 688p.

7. **Feit, M.D.** Light Propagation in Graded-Index Optical Fibers / M.D. Feit, J.A. Fleck // *Appl. Opt.* – 1978. – Vol. 17 (24). – PP. 3990-3998.

8. **Okoshi, T.** The Beam Propagation Method / T. Okoshi, S. Kitazawa // *Analysis methods for electromagnetic wave problems*. Editor E. Yamashita, Artech House, 1990. Chapter 10.

9. **Huand, W.** The Finite-Difference Vector Beam Propagation Method: Analysis and Assesment / W. Huand [and other] // *J. of Lightwave Technology*, 1992. Vol. 10 (3).

10. **Lu, Y.Y.** Some Techniques for Computing Wave Propagation in Optical Waveguides / Y.Y. Lu // *Communications in Computational Physics*. – 2006. – Vol. 1. – P. 1056-1075.

PROPAGATION OF LASER VORTEX BEAMS WITH AN ARBITRARY TOPOLOGICAL CHARGE IN A CRADED-INDEX PARABOLIC FIBER

© 2008 A. S. Strilets

Samara State Aerospace University

In this work, we discuss the propagation of the laser vortex beams $\exp\{i\mu\varphi\}$ in a parabolic fiber. The relationship between the complex amplitude and the transverse coordinates and the distance on the optical axis is described as the integral operator of propagation in a parabolic medium acting on the input beam amplitude distribution. This integral is analogous to the Fresnel integral that describes the propagation of paraxial laser beams in a uniform medium. The result of action of the integral operator onto the vortex beam can be analytically represented in two ways. In the first case, the kernel of the analytical expression for the amplitude is given by a degenerate hyper-geometric function. In the second case, the amplitude is represented as a composition of an infinite number of Gauss-Laguerre modes, which are eigenmodes of the parabolic fiber. The analytical relations derived are verified by numerical modeling with use of the integral operator and the method for propagating the light beams through thin lenses, which relies on the fast Fourier transform. The results of the numerical modeling and the analytical calculations agree within the method's accuracy.

Laser vortex beams, Gauss-Laguerre modes, parabolic optical fiber, light beam propagation method, paraxial integral operator of propagation

Сведения об авторе

Стрилец Алексей Сергеевич, студент, Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева email: axsc@inbox.ru. Область научных интересов - моделирование распространения лазерных полей в оптических волноводах, программирование.

Strilec Alexey Sergeevich, S. P. Korolyov Samara State Aerospace University, the student. Area of research - modelling of distribution of laser fields in optical wave guides, programming.